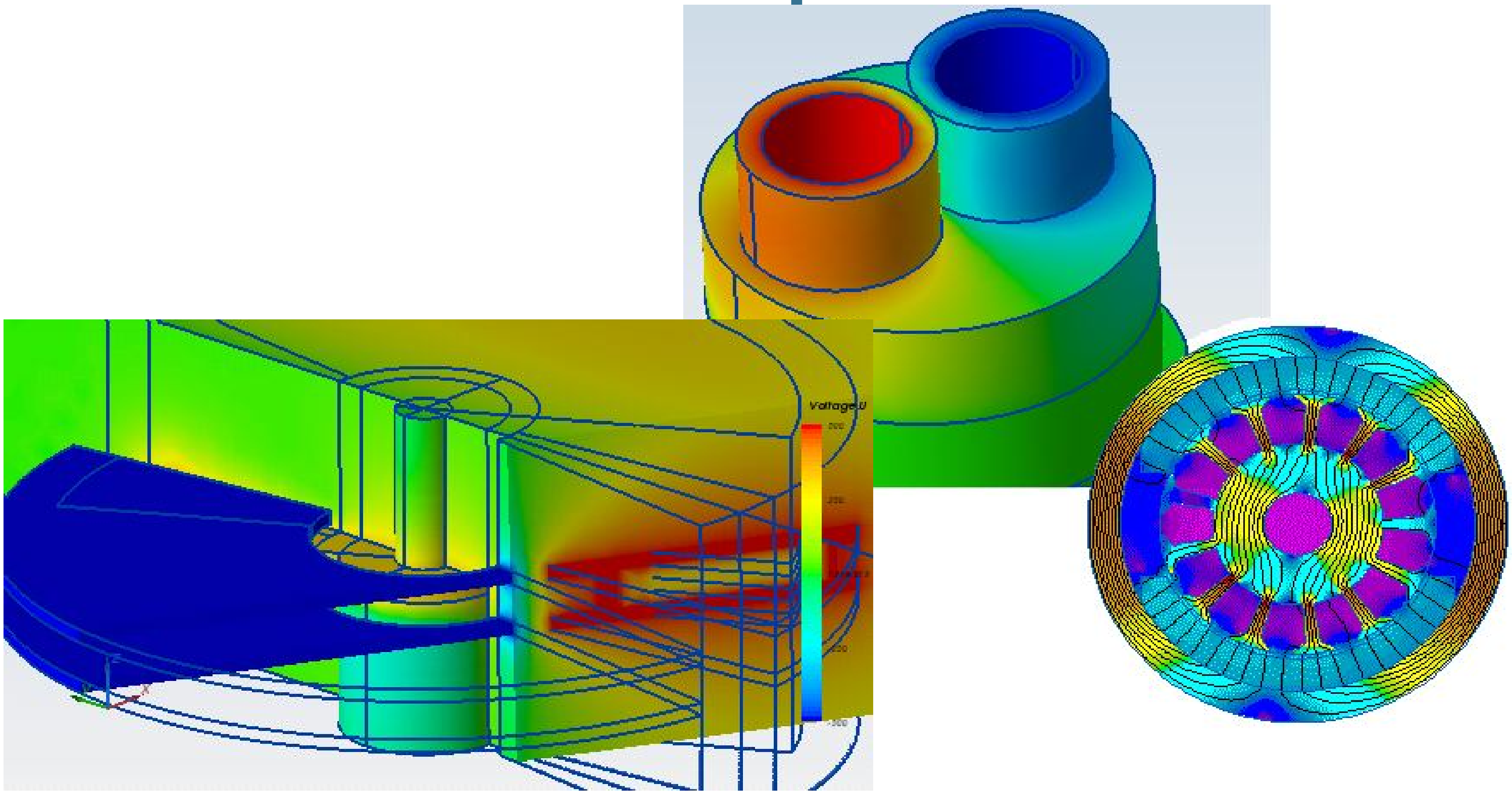
Теория электромагнитного поля.
Лекция 1.



© Кафедра ТОЭ, СПбГПУ, доц. А.Г. Калимов 15.10.2014

Разработка курса

*Автор курса – **Калимов Александр Гелиевич,***
доцент кафедры Теоретических Основ Электротехники
Санкт-Петербургского Политехнического Университета

Базовая литература:

1. *К.С. Демирчян, Л.Р.Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. Теоретические основы электротехники.*
2. *И.Е. Тамм. Основы теории электричества.*
3. *К. Бинс, П. Лауренсон. Анализ и расчет электрических и магнитных полей.*

……………………………………………………………………………..

Общая структура курса

Введение.

1. *Основы теории электромагнитного поля.*
   Электростатика, магнитостатика

2. *Электродинамика.*
   Силовые взаимодействия в электромагнитных полях.
   Сверхпроводимость.

3. *Численные методы расчета электромагнитных поле.*

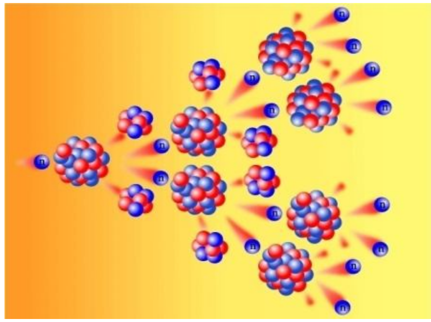
Практический расчет электромагнитных полей
с использованием программы ***ELCUT***

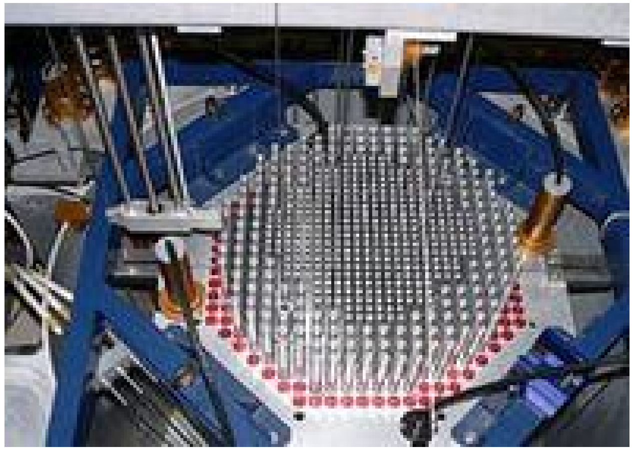
Общие понятия теории электромагнитного поля

Короткодействующие силы

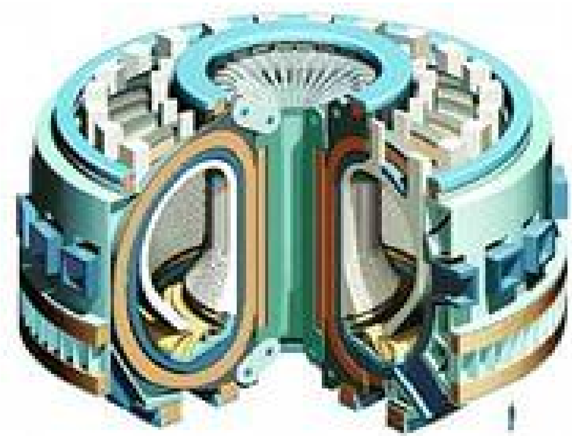
Расстояния $< 10^{-13}$ м

- Сильное
- Слабое





Ядерный реактор



Термоядерный реактор

Гравитационные взаимодействия

Чрезвычайно слабые силы!

Предположительно открыты Ньютоном в 1666 году

Действует на всех расстояниях

Электромагнитные взаимодействия

Действует на всех расстояниях

- *Электрическое поле*
- *Магнитное поле*

- *Электромагнитные волны*

Сравнение различных типов взаимодействия

Тип	Интенсивность	Расстояния (м)
Гравитация	10^{-38}	любые
Слабое	10^{-3}	$<10^{-18}$
Электромагнитное	1	любые
Сильное	100	$<10^{-13}$

Электрическое поле

Источники электрического поля

Источники электростатического поля – **электрические заряды** (электроны, ионы)

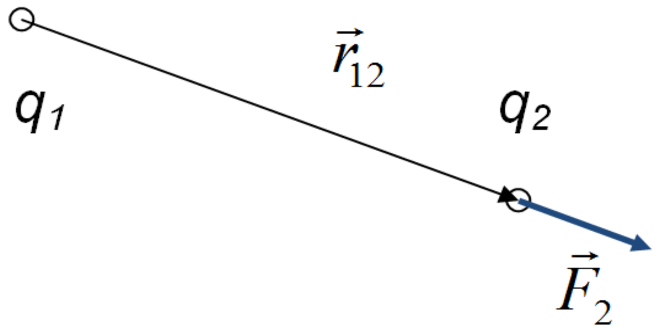
Единица измерений в СИ– **Кулон** (=$5 \cdot 10^{18}$ электронов)

Фундаментальные законы:

- Закон сохранения заряда
- Квантование заряда.   Минимальный заряд = е

Взаимодействие заряженных объектов. Закон Кулона.

Этот закон был открыт Ш.Кулоном в 1785 г.



$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - диэлектрическая проницаемость вакуума.

Одноименно заряженные тела отталкиваются.
Заряды различных знаков притягиваются.

Напряженность электрического поля

Напряженность - основная физическая величина, характеризующая интенсивность электрического поля

Напряженность - это вектор, определяющий силу, действующую на заряженную частицу со стороны электрического поля.

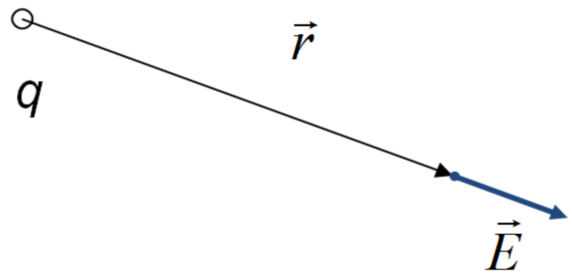
$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \qquad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Единица измерения Н/Кл = В/м.

Источники электрического поля – заряженные тела

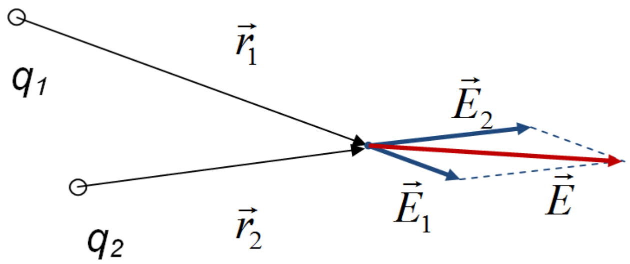
Принцип суперпозиции

- *Следствие Закона Кулона:*



$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

- *Напряженность электрического поля системы зарядов:*



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots$$

Принцип суперпозиции выполняется в вакууме!

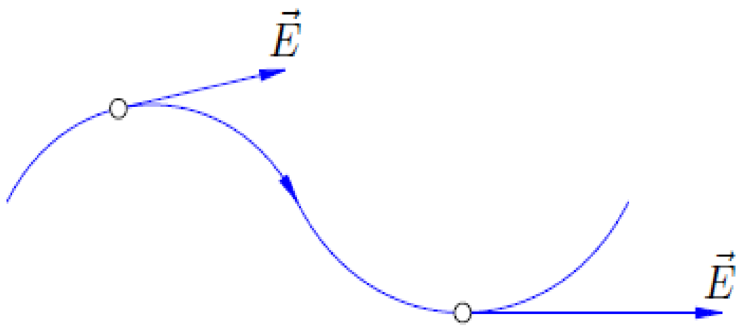
Линии напряженности электрического поля.

Линия напряженности - ***вектор напряженности электрического поля касателен к линии напряженности в любой ее точке.***

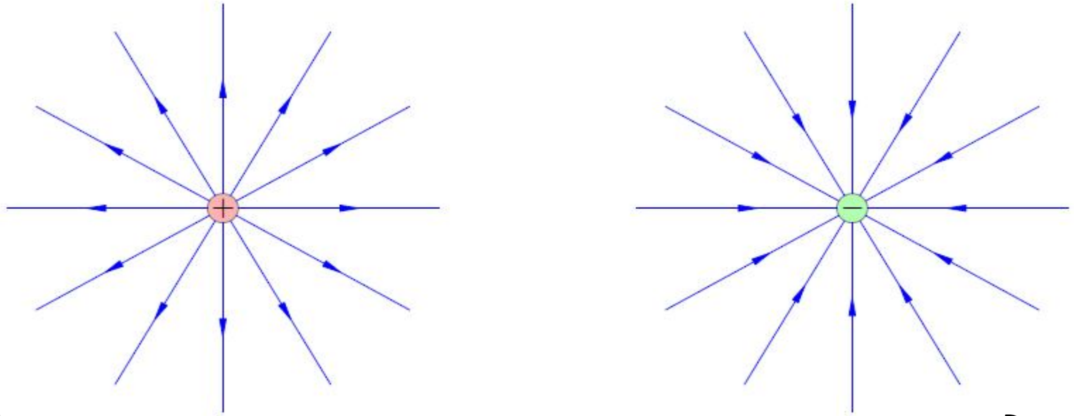
Основные свойства:

- *Линии начинаются и заканчиваются на источниках (или в бесконечности);*
- *Линии имеют направления;*
- *Линии напряженности не пересекаются;*
- *Расстояние между соседними линиями обратно пропорционально величине напряженности поля;*
- *Линии напряженности не могут быть замкнутыми (только в электростатике)*

Линии напряженности (примеры)

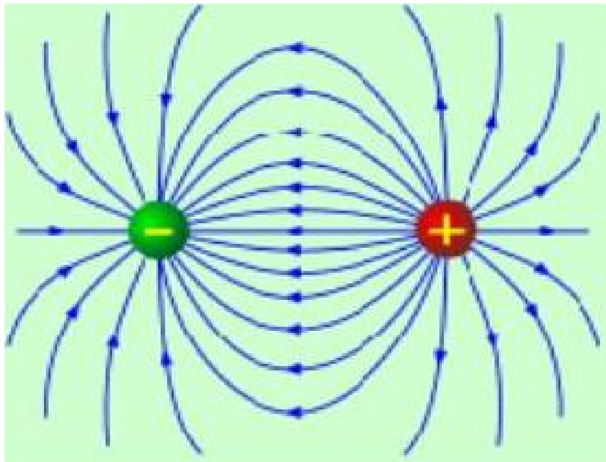


В общем случае



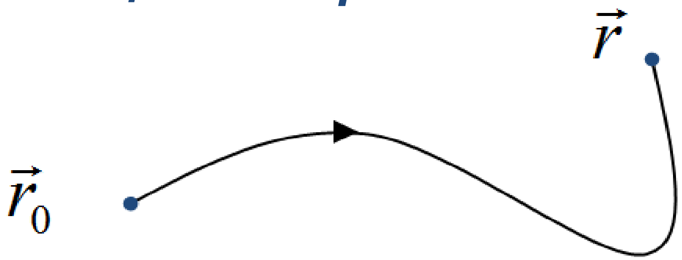
Линии напряженности точечных зарядов

Система из двух заряженных сфер →



Работа в поле точечного заряда

Общее определение работы: $$A(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')d\vec{r}\,'$$



В общем случае работа зависит от пути

Работа в поле точечного заряда:
(перемещается заряд q_2)

$$A(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{\vec{r}\,d\vec{r}}{r^3}$$

Поскольку $\frac{\vec{r}\,d\vec{r}}{r^3} = d\left(\frac{1}{r}\right)$, работа равна:

$$\boxed{A(\vec{r}) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Работа **не** зависит от формы пути!

Потенциал точечного заряда

Выражение для работы удобно представить в виде:

$$A(\vec{r}) = q_2 \cdot \left[U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0)\right]$$

$$U(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ - потенциал точечного заряда

Важные свойства:

- Работа зависит только от *разности* потенциалов
- $U \to 0$ если $r \to \infty$
- Напряженность и потенциал связаны соотношением:

$$\vec{E} = -\frac{dU}{d\vec{r}} = -gradU = -\vec{\nabla} U$$

Работа в электрическом поле. Потенциал электрического поля.

В конечном итоге произвольное электрическое поле является суперпозицией полей точечных зарядов, поэтому:

- Работа по перемещению заряда: $A(\vec{r}) = q \cdot \left[U(\vec{r}) - U(\vec{r}_0)\right]$

$U(\vec{r})$ - потенциал электрического поля

- Потенциал определен с точностью до постоянного слагаемого
- Точка с нулевым потенциалом может быть выбрана произвольно
- Работа по перемещению заряда по замкнутой траектории равна нулю.
- Потенциал – непрерывная функция координат.

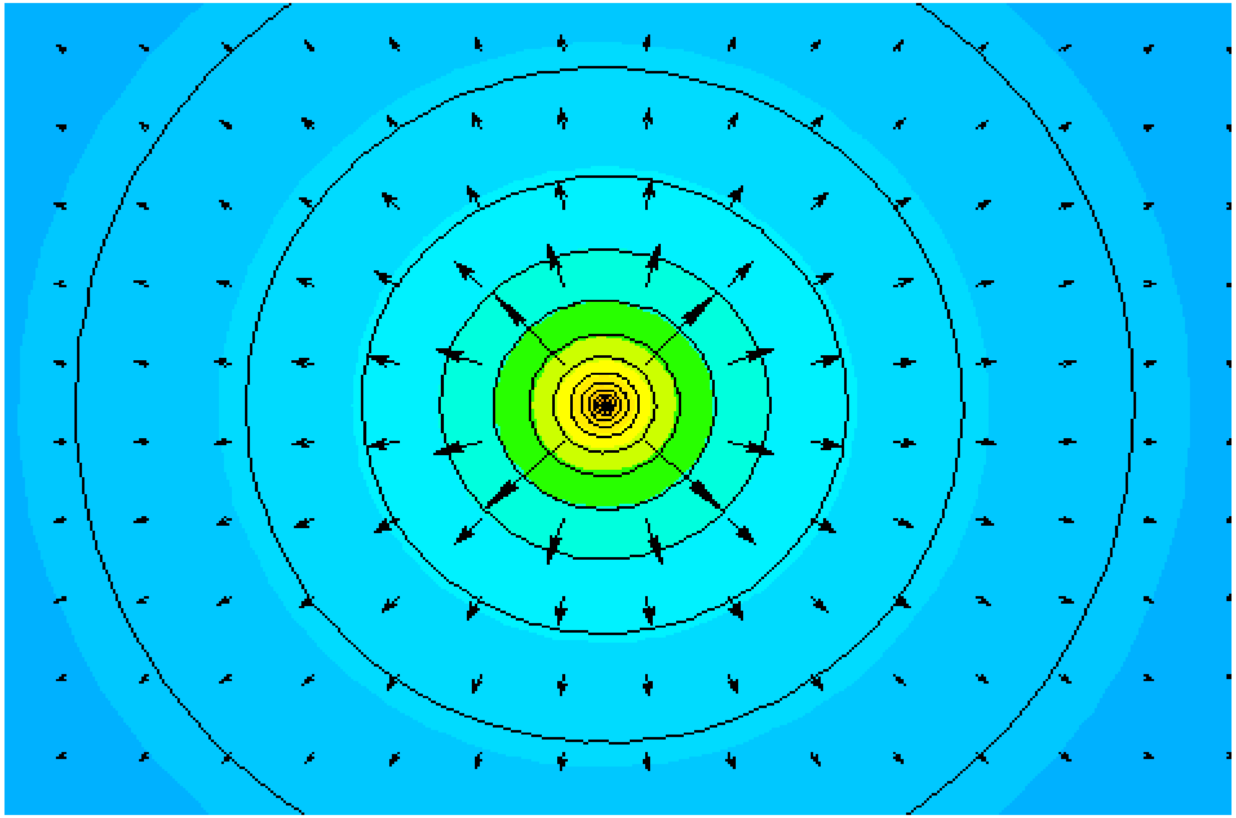
Линии (поверхности) равного потенциала.

Линия (поверхность), соединяющая точки с фиксированным значением потенциала

Свойства линий (поверхностей) равного потенциала:

- Линии (поверхности) равного потенциала замкнуты.
- Чем меньше расстояние между линиями равного потенциала, тем выше напряженность электрического поля
- Проекция вектора напряженности электрического поля на касательные к линии равного потенциала равны нулю; то есть линии напряженности и линии равного потенциала взаимно перпендикулярны.
- Поверхность проводника представляет собой поверхность равного потенциала

Линии равного потенциала. Пример.



Линии равного потенциала,
наведенного точечным зарядом

Потенциальная энергия взаимодействия системы зарядов

❖ Два заряженных тела.

1. На бесконечно большом расстоянии они не взаимодействуют.
2. При сближении на расстояние r произведена работа ΔA.
3. Потенциальная энергия равна:
4. Симметричная форма записи энергии:

❖ Произвольное количество заряженных тел.

1. Симметричная форма записи энергии:

$$\boxed{W_э = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} U_k \cdot q_k}$$

Энергия взаимодействия может быть как положительной, так и отрицательной!

Полная энергия электрического поля

Для зарядов, распределенных по пространству и поверхности:

$$W_э = \frac{1}{2}\int \rho \cdot U dV + \frac{1}{2}\int \sigma \cdot U dS$$

Для точечных и линейных зарядов полная энергия поля бесконечно велика

Полная энергия электрического поля может быть выражена через напряженность:

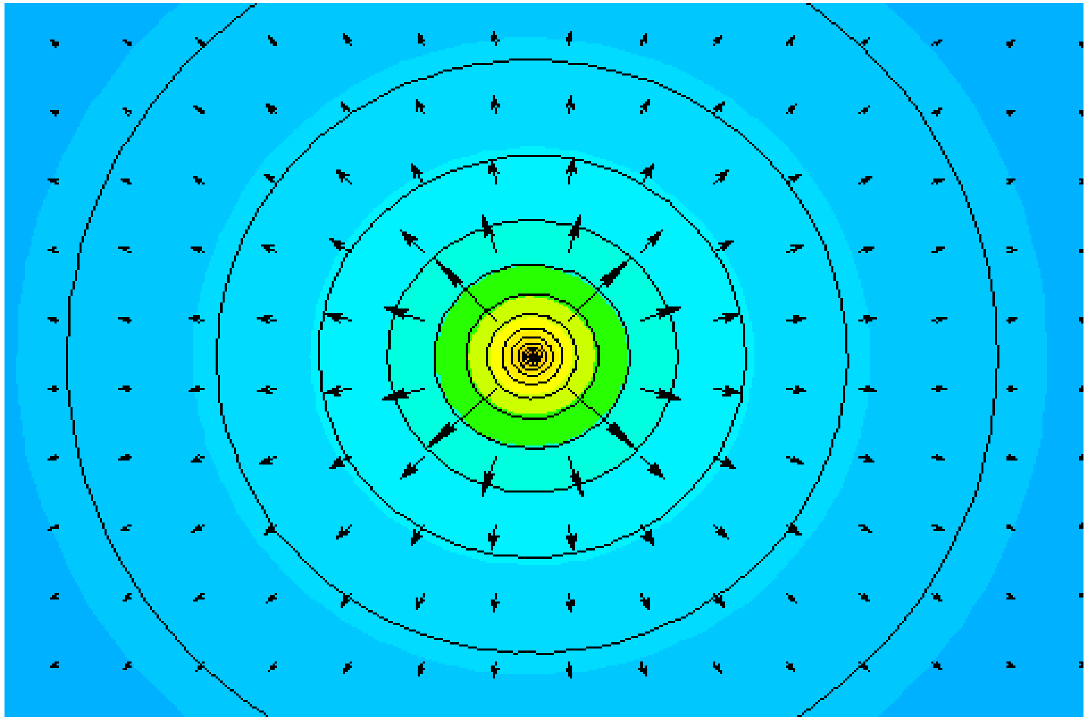
$$W_э = \int \frac{\varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}}{2} dV$$

Полная энергия электрического поля всегда положительна

Электрическое поле в простейших системах

Напряженность поля точечного заряда

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$



Картина поля точечного заряда

Векторная алгебра. Основные понятия.

1. Пространство:

   двухмерное, трехмерное.

   система координат – декартова, цилиндрическая.

2. Скалярные и векторные поля:

$$U(x, y, z) \qquad \vec{F}(x, y, z)$$

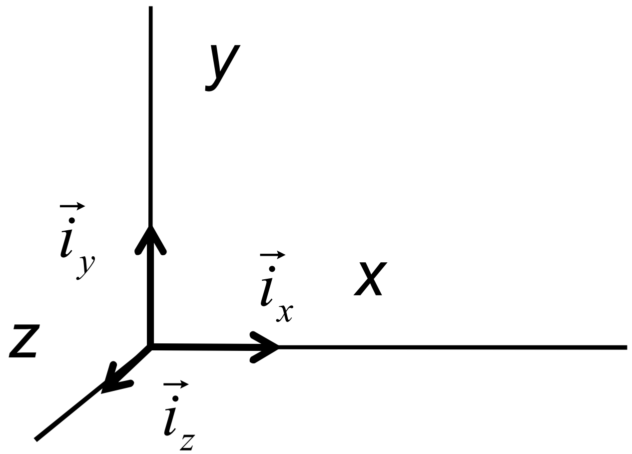
3. Определены простейшие алгебраические операции

(сложение): $\vec{F}_{12}(x, y, z) = \vec{F}_1(x, y, z) + \vec{F}_2(x, y, z)$

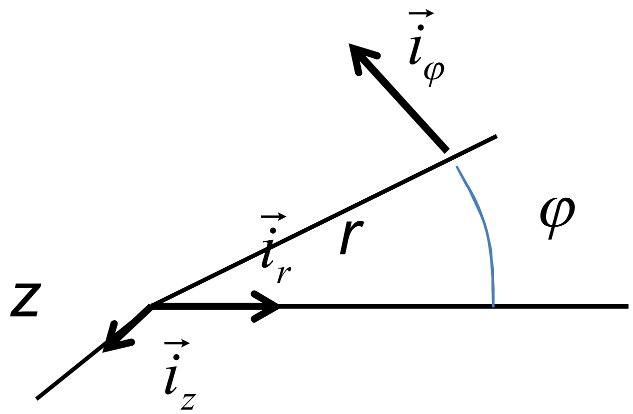
4. Определены операции дифференцирования

Системы координат (3D)

1. Декартова система.



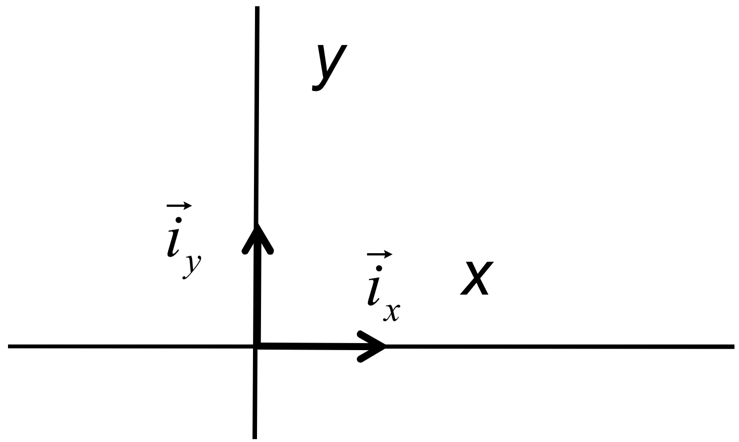
2. Цилиндрическая система.



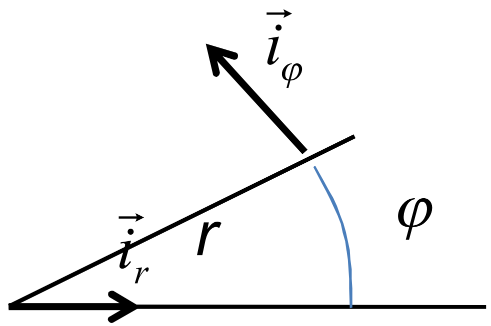
3,4... Сферическая система, эллиптическая система, …

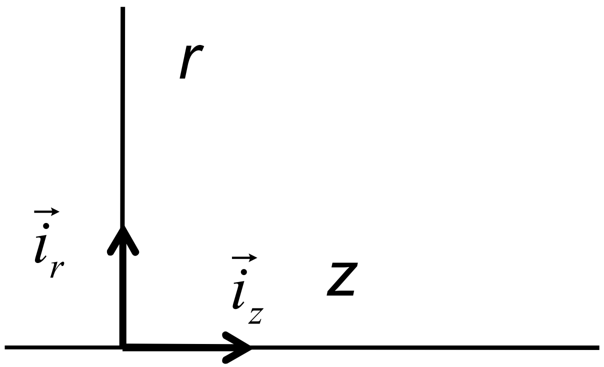
Системы координат (2D)

1. Декартова система.



2. Полярная система.





3. Цилиндрическая система

Операции дифференцирования. Градиент.

Объект операции – скалярное поле

Результат применения операции – векторное поле

Обозначение: *grad(U)*

Физический смысл – скорость изменения функции. Показывает направление, вдоль которого скорость изменения максимальна

В декартовой системе координат:

$$grad\,(U) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_z$$

В цилиндрической системе координат:

$$grad\,(U) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{i}_z$$

Дивергенция.

Объект операции – векторное поле

Результат применения операции – скалярное поле

Обозначение: $div(\vec{F})$

Дословный перевод - расходимость

В декартовой системе координат:

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

В цилиндрической системе координат:

$$div(\vec{F}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Ротор.

Объект операции – векторное поле
Результат применения операции – векторное поле

Обозначение: $rot(\vec{F})$, $curl(\vec{F})$

Дословный перевод - завихренность

В декартовой системе координат:

$$rot(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\cdot\vec{i}_x + \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\cdot\vec{i}_y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x}\right)\cdot\vec{i}_z$$

Некоторые свойства дифференциальных операторов.

Все дифференциальные операторы линейны, то есть:

$$grad\,(U+V) = grad\,(U) + grad\,(V)$$

$$div(\vec{F}+\vec{G}) = div(\vec{F}) + div(\vec{G})$$

$$rot\,(\vec{F}+\vec{G}) = rot\,(\vec{F}) + rot\,(\vec{G})$$

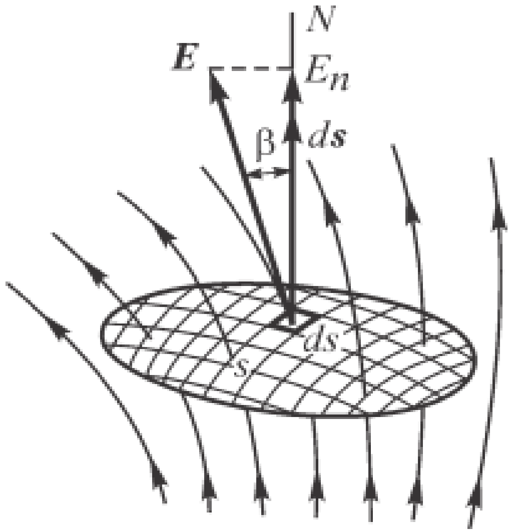
Последовательное применение дифференциальных операторов:

$$div\left(rot\,(\vec{F})\right) \equiv 0 \qquad rot\left(grad\,(U)\right) \equiv 0$$

Теорема Остроградского-Гаусса.

Поток– это поверхностный интеграл векторной величины по поверхности:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S E \cdot \cos(\beta) ds$$



Теорема о дивергенции (теорема Остроградского – Гаусса):

$$\int_V div(\vec{E}) dV = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Основные интегральные теоремы.

Теоремы, связывающие объемные и поверхностные интегралы являются следствием теоремы Остроградского - Гаусса

Теорема о градиенте:

$$\int_V grad\,(U)\,dV = \oint_S d\vec{S}\cdot U$$

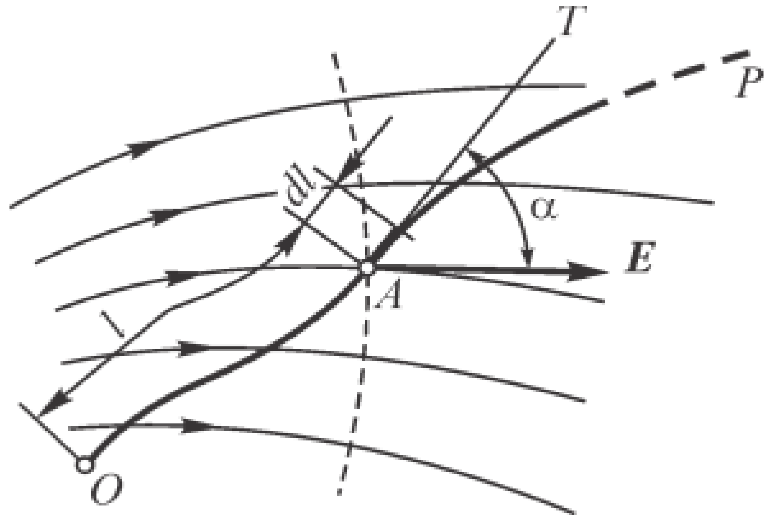
Теорема о роторе:

$$\int_V rot\,(\vec{E})\,dV = \oint_S d\vec{S}\times\vec{E}$$

Теорема Стокса.

Циркуляция - это линейный интеграл по некоторому замкнутому контуру

$$C = \oint_L d\vec{l} \cdot \vec{E} = \oint_L dl \cdot E \cdot \cos(\alpha)$$



Теорема Стокса для замкнутого контура:

$$\int_S rot(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \oint_L d\vec{l} \cdot \vec{E} = \oint_L dl \cdot E \cdot \cos(\alpha)$$

Дифференциальный векторный оператор $\vec{\nabla}$.

В векторной алгебре вводится формальный оператор дифференцирования векторных и скалярных функций $\vec{\nabla}$

$$grad\ (U) = \vec{\nabla} U \qquad div\ (\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \qquad rot\ (\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Оператор $\vec{\nabla}$ *в декартовой системе координат:*

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{i}_z$$

Причина использования оператора $\vec{\nabla}$ *- упрощение записи векторных выражений*