Применение теории подобия при моделировании объектов различного масштаба

[Методы масштабирования задач о диффузии в программе Elcut]

К.т.н. В.Т. Чемерис, асс. И.А. Бородий

Национальный авиационный университет Украины, г. Киев

Динамические процессы и их уравнения для неподвижных сред

1. **Уравнение переноса массы,**

обусловленного диффузией в результате неоднородной концентрации частиц (так назыв. само-диффузия),
в отсутствие термодиффузии и бародиффузии

.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - D_1 \nabla^2 u = 0}$$

Здесь $u \equiv \rho$ - плотность среды $\left[\frac{кг}{м^3}\right]$, D_1 - коэффициент диффузии $\left[\frac{м^2}{с}\right]$,

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$$ - оператор Гамильтона (набла),

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ - оператор Лапласа.

Для газообразной среды $D_1 = (1/3)\langle v\rangle\langle l\rangle$, где

$\langle v \rangle$ - средне-массовая скорость теплового движения частиц среды,

$\langle l \rangle$ - средняя длина свободного пробега частиц среды.

2. **Уравнение переноса тепла.**

$$c_p \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla u) = 0$$

Здесь $u \equiv T$ - температура среды;

λ – коэффициент теплопроводности, $\left[\frac{Дж}{м \cdot с \cdot {}^\circ K}\right]$;

c_P – изобарная теплоемкость, $\left[\frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ K}\right]$; ρ - плотность среды, $\left[\frac{кг}{м^3}\right]$.

3. **Уравнение диффузии магнитного поля.**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \nabla^2 u = 0$$

Здесь $u \equiv B$ - индукция магнитного поля, $Тл$;

μ - магнитная проницаемость среды $\left[\frac{Гн}{м}\right]$;

σ - коэффициент электропроводности среды $\left[\frac{1}{Ом \cdot м}\right]$.

Для однородной и изотропной среды все эти уравнения могут быть записаны в одинаковой форме уравнения диффузии с использованием соответствующих каждому случаю значений коэффициента диффузии.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} - D_K \nabla^2 u = 0}$$

1. Для **уравнения переноса массы** необходимо использовать коэффициент диффузии частиц:

$$D_K = D_1 = \frac{1}{3} < v > \cdot < l > \quad \left[\frac{м^2}{с}\right]$$

2. Для **уравнения переноса тепла** необходимо использовать коэффициент диффузии тепла, который также называют коэффициентом температуропроводности:

$$D_K = D_2 = \frac{\lambda}{c_P \cdot \rho} \quad \left[\frac{м^2}{с}\right]$$

3. Для **уравнения диффузии магнитного поля** необходимо использовать коэффициент диффузии магнитного поля:

$$D_K = D_3 = \frac{1}{\mu \cdot \sigma} \quad \left[\frac{м^2}{с}\right]$$

Почему для нас представляет интерес установление соответствия, вплоть до полного подобия, между решениями уравнения диффузии для различных объектов моделирования, характеризуемых значительным отличием размеров модели и длительностью процесса?

В практике моделирования разработчик может встретить необходимость моделирования процессов диффузии как в крупных системах гигантских размеров при очень большой длительности процесса, с одной стороны, так и в микроскопических системах с чрезвычайно малой длительностью процесса, с другой стороны.

Не всегда разумно выполнять моделирование процесса на компьютере в реальном масштабе размеров объекта и, что особенно существенно, в реальном масштабе времени. Принципы подобия решений, которые будут сформулированы далее, дают возможность преобразовать решение, полученное для некоторых фиксированных пространственно-временных характеристик объекта, в решение для геометрически подобной модели с пространственно-временными характеристиками, заданными в совершенно другом диапазоне значений.

Какие объекты могут встретиться разработчику при моделировании динамических процессов с помощью программы ELCUT?

Программа **ELCUT** имеет широкие интервалы допустимых значений размеров объекта и широкие границы допустимой длительности процесса в модели:

от 1 мкм вплоть до 1 км – по размерам;

от 10^{-32} вплоть до очень большой длительности процесса – по времени.

Особенностью и преимуществом программы ELCUT является возможность построения геометрии модели объекта в графическом редакторе путем простого рисования.

При этом пространственные координаты модели в компьютере должны быть выбраны в определенном соответствии с масштабом объекта, будь то объект суб-микронных размеров или же гигантских размеров.

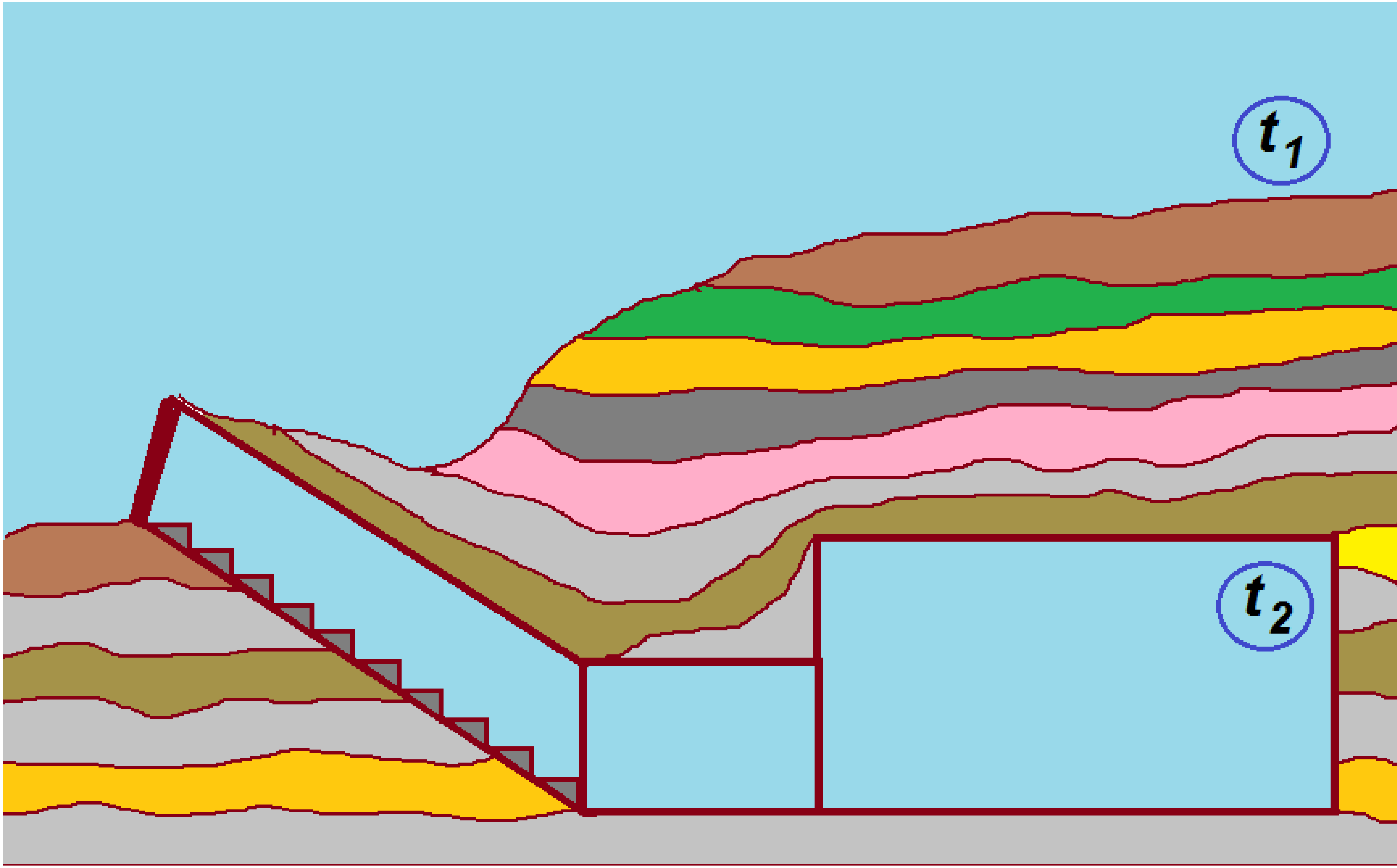
I. Предположим, мы имеем дело с процессом большой длительности в объекте достаточно больших размеров.

Например, процесс диффузии тепла сквозь многослойное защитное покрытие подземных овощехранилищ (или фруктохранилищ) может иметь длительность в реальном времени около ½ года (Рисунок на следующем слайде).

Это не означает, что мы должны сидеть возле компьютера на протяжении 6 месяцев и дожидаться решения задачи о моделировании диффузии тепла.

Мы должны использовать масштабные коэффициенты, чтобы обеспечить подобие между процессом в нашей компьютерной модели и реальным процессом при разумном времени решения задачи.

Проникновение тепла через многослойное покрытие – пример диффузии тепла в течение достаточно большого времени через объект больших размеров.



А КАК ОБСТОИТ ДЕЛО С МОДЕЛИРОВАНИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ОБЪЕКТАХ МИКРОСКОПИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ?

В этом случае мы должны быть уверены, что модель очень малого микро-объекта может быть успешно изображена на экране графического редактора программы. Только при этом условии мы сможем воспользоваться преимуществами создания модели с помощью графического редактора.

Это означает, что размеры реального объекта должны быть определенным образом преобразованы (т.е. увеличены), чтобы изображение модели соответствовало рабочему полю графического редактора.

==============================

Помимо вопроса о соотношении размеров реального объекта и его модели на экране компьютера, возникает вопрос о соотношении длительности процесса в реальном объекте и его длительности в компьютерной модели.

II. Пример моделирования объекта микроскопических размеров.

Необходимость моделирования микро-объектов возникает при изучении микромагнитных процессов либо при изучении процессов передачи тепла в микро-миниатюрных элементах вычислительной техники или приборов для научных исследований. Моделирование тепловых или электромагнитных процессов в элементах суб-микронных размеров может также с успехом применяться при разработке новых материалов и изделий в нано-технологиях.

В качестве примера необходимости расчета электрического поля в объекте микроскопических размеров (около 50 нм = $50 \cdot 10^{-9}$ м) рассмотрим расчет осциллирующего поля микромагнитного диполя, описанный в журнале *IEEE Transactions on Magnetics*.

==

[1] E.Martinez, L.Torres and L.Lopez-Diaz. Computing of solenoidal field in micromagnetic simulations, *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 40, no.5, Sept. 2004, pp. 3240 – 3243.

При исследовании микромагнитных процессов было рассчитано электрическое поле в объеме кубика со стороной размером 50 нм (опубликовано E.Martinez, L.Torres and L.Lopez-Diaz, 2004 **[1]**)

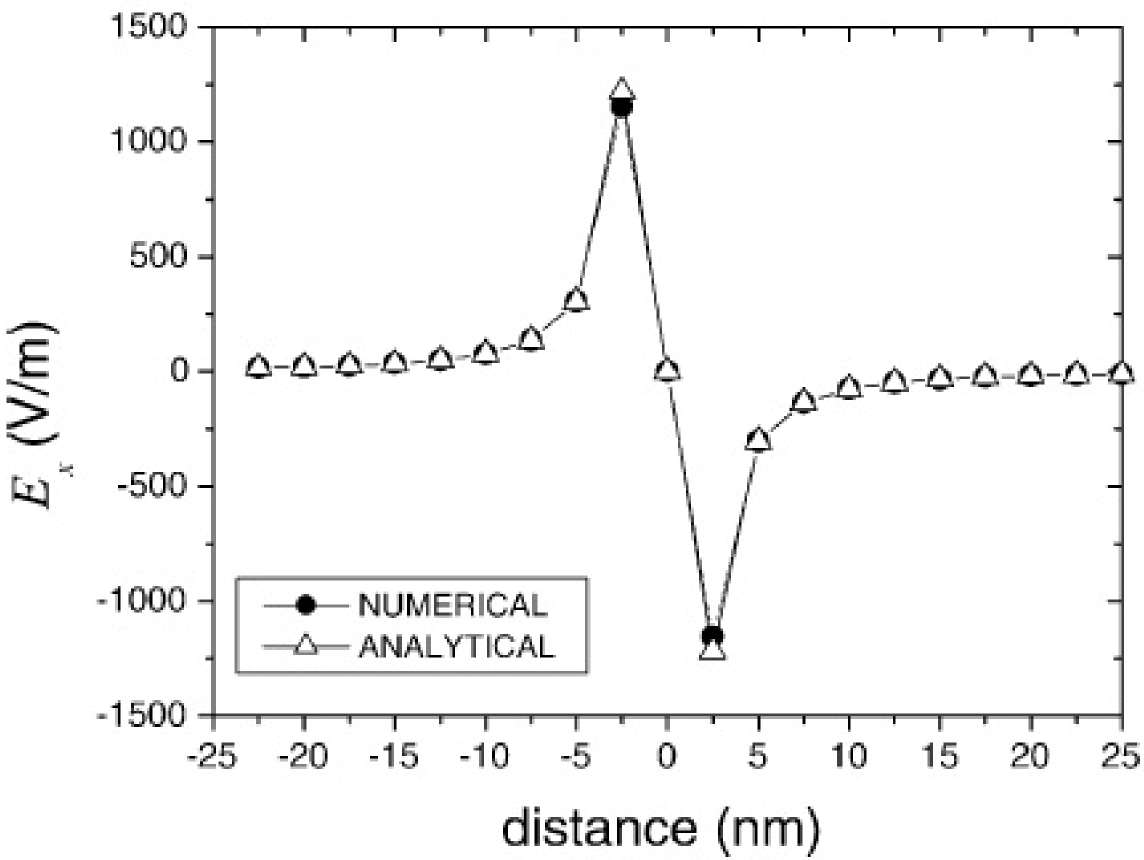


Figure 3 из **[1]**:

Электрическое поле E_x осциллирующего диполя как функция расстояния от диполя вдоль оси *y* для момента времени

$t = 1.32 \cdot 10^{-32}$ с.

.

Сравнение аналитического и численного решения.

Аналитическое решение задачи дано в книге: Дж.Джексон. Классическая электродинамика (пер.с англ., New York, Wiley). М., Мир. – 1970.

Наиболее подходящими процессами для обсуждения вопроса о масштабировании моделей при моделировании динамических процессов являются:

1) нестационарное проникновение тепла в среду с линейными свойствами, или ***Диффузия тепла***;

2) нестационарное проникновение электромагнитного поля в ферромагнитную среду, обладающую электрической проводимостью – процесс, известный под названием ***Диффузия электромагнитного поля.***

На этих процессах будет возможно показать взаимосвязь между временными и пространственными масштабами, ***с одной стороны***, и теплофизическими или электромагнитными параметрами среды [как температуропроводность в случае (1) или магнитная проницаемость и электропроводность среды в случае (2)], ***с другой стороны.***

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОДОБИЯ ПОЛЕЙ К ДВУМ МОДЕЛЯМ ФЕРРОМАГНИТНОЙ СРЕДЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РАЗМЕРАХ И РАЗЛИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ СВОЙСТВАХ (т.е. магнитной проницаемости μ и электропроводности σ).

Электромагнитный процесс в каждом из двух образцов сравниваемых сред может быть описан типовым уравнением нестационарной диффузии

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D \Delta \vec{B}; \qquad D = \frac{1}{\mu \sigma}$$

где B – локальное значение магнитной индукции,
D – локальное значение коэффициента диффузии поля.

Далее подразумевается, что величины μ_1, σ_1 относятся к 1-му образцу, а величины μ_2, σ_2 – ко 2-му образцу.

Условия подобия полей особенно легко могут быть установлены в случае, когда оба образца представляют собой однородные среды с линейными свойствами.

Условия подобия картин диффузии поля могут быть введены на основе одного из двух следующих подходов: :

- **1.** Когда коэффициент диффузии имеет одинаковое значение для обоих образцов: $D_1 = D_2$.
- **2.** Когда отношение между длительностями электромагнитных процессов в образцах (T_1 / T_2) задано заранее без взаимосвязи с отношением характеристических размеров (X_1 / X_2) первого и второго образца.
- **3.** В общем случае равенства безразмерных коэффициентов диффузии: $D_1^* = D_2^*$. Эти нормированные величины будут введены на следующем слайде..

ПОДХОД 1. Прежде чем установить условия подобия полей, необходимо задать характеристический размер и характеристическое время для каждого образца и принять их в качестве базовых параметров для каждого из процессов:

$$T_1 = T_{1bas}, \quad X_1 = X_{1bas}, \quad B_1 = B_{1bas}$$

для 1-го образца;

==

$$T_2 = T_{2bas}, \quad X_2 = X_{2bas}, \quad B_2 = B_{2bas}$$

для 2-го образца.

==

Уравнение диффузии поля теперь может быть переписано в нормированных переменных

$$t^* = t/T_{bas}; \quad B^* = B/B_{bas};$$

$$x^* = x/X_{bas}; \quad y^* = y/X_{bas}; \quad z^* = z/X_{bas}.$$

(каждому образцу далее соответствуют индексы 1 или 2)

Уравнение диффузии поля теперь принимает вид:

(пусть индекс 1 принадлежит реальному объекту, а индекс 2 принадлежит компьютерной модели). :

$$\partial B_1^* / \partial t_1^* = D_1 \frac{T_{1bas}}{X_{1bas}^2} \Delta_1^* B_1^*; \quad (1) \qquad \partial B_2^* / \partial t_2^* = D_2 \frac{T_{2bas}}{X_{2bas}^2} \Delta_2^* B_2^*. \quad (2)$$

Здесь Δ_1^*, Δ_2^*- это операторы Лапласа в безразмерных переменных,

$$B_1^* = f_1(x_1^*, y_1^*, z_1^*, t_1^*); \qquad B_2^* = f_2(x_2^*, y_2^*, z_2^*, t_2^*)$$

- это нормированные функции поля, зависящие от безразмерных переменных.

B_1^*, B_2^* могут быть представлены в любом подходящем масштабе по желанию разработчика, т.к. они входят одновременно в левую и правую часть каждого уравнения.

Для нас важно рассмотреть распределение полей в момент времени $t_{comp} = T_{2bas}$, где время t_{comp} решения задачи на компьютере может достигать полного времени диффузии поля T_{2bas} в образце, который мы моделируем.

При условии равенства нормированных значений коэффициента диффузии

$$D_1^* = D_2^*, \quad \text{или} \quad D_1 \frac{T_{1bas}}{X_{1bas}^2} = D_2 \frac{T_{2bas}}{X_{2bas}^2} \qquad (3)$$

уравнение (1) идентично уравнению (2).

Это означает, что безразмерное решение уравнения (2) совпадает с безразмерным решением уравнения (1), т.е.

$$f_1(x_1^*, y_1^*, z_1^*, t_1^*) = f_2(x_2^*, y_2^*, z_2^*, t_2^*)$$

Таким образом, нормированные значения коэффициента диффузии (3) образуют **общий критерий подобия** для уравнений (1) и (2) :

$$D_1^* = D_1 \frac{T_{1bas}}{X_{1bas}^2}; \quad D_2^* = D_2 \frac{T_{2bas}}{X_{2bas}^2}.$$

Когда мы используем 1-й подход для установления подобия полей, т.е. считаем, что $D_1 = D_2$, в качестве условия для подобия полей в конечный момент времени мы должны принять условие

$$\boxed{T_{1bas} / T_{2bas} = (X_{1bas} / X_{2bas})^2}.$$

ПОДХОД 2. Второй подход основан на том, что ***a priori*** принимается равенство скоростей диффузии поля в массив материала каждого образца:

$$V_{1diff} = V_{2diff}.$$

Скорость диффузии поля может быть определена через коэффициент диффузии $\boldsymbol{D}$ и глубину скин-слоя $\boldsymbol{\delta}$ для проникновения поля:

$$V_{diff} = D/\delta = 1/(\mu \cdot \sigma \cdot \delta).$$

Отсюда имеем определение для глубины скин-слоя $\delta = D/V_{diff}$, которое дает возможность вычислить мгновенное значение глубины проникновения как функцию времени (в предположении, что среда обладает линейными свойствами):

$\delta(t) = V_{diff} \cdot t.$ Соответственно, $V_{diff}(t) = 1/(\mu \cdot \sigma \cdot \delta(\tau))$

На этом общем определении скорости диффузии поля основано общеизвестное выражение для глубины скин-слоя:

$$\delta^2(t) = D \cdot t; \quad \delta(t) = \sqrt{\frac{t}{\mu\sigma}}.$$

Исходя из принятого ***a priori*** равенства скорости диффузии поля в образце 1 и образце 2, если учесть, что соотношение (3)для нормированных значений коэффициента диффузии является необходимым условием идентичности уравнений (1) и (2), приходим к выводу, что для подобия решений в конечный момент времени (t_{1max} or t_{2max}) необходимо соблюсти условие:

$$\frac{\delta_1(t_{\max})}{\delta_2(t_{\max})} = \frac{T_{2bas}}{T_{1bas}} \cdot \left(\frac{X_{1bas}}{X_{2bas}}\right)^2 . \qquad (4)$$

Кроме того, мы можем учесть, что в конце процесса диффузии полная глубина проникновения поля приближается к характерному размеру образца, т.е.

$$\left.\frac{\delta_1(t)}{\delta_2(t)}\right|_{t\to t_{\max}} \Rightarrow \frac{X_{1bas}}{X_{2bas}} . \qquad (5)$$

Используя (5) , вместо (4) получаем новое условие:

$$\boxed{\frac{T_{1bas}}{T_{2bas}} = \frac{X_{1bas}}{X_{2bas}}} .$$

Когда соотношение длительностей электро-магнитного процесса в образцах (T_{1bas} / T_{2bas}) задано заранее, можно определить требуемое для подобия соотношение размеров.

В соответствии с **ПОДХОДОМ 2** подобие конечной картины распределения поля в конечный момент времени будет обеспечено при условии, что отношение характеристических размеров модели и реального объекта будет выбрано равным отношению ожидаемых времен полной диффузии поля в модель и в реальный объект моделирования:

$$\frac{X_{1bas}}{X_{2bas}} = \frac{T_{1bas}}{T_{2bas}}.$$

Это условие означает, что будет соблюдено равенство скоростей диффузии поля в один и другой образец.

Результаты проведенного рассмотрения показывают, что согласно **ПОДХОДУ 1** обеспечивается строгая формальная идентичность уравнений поля (и их решений) для компьютерной модели и реального объекта. Некоторое отклонение в подобии конечных распределений поля может быть вызвано только нелинейностью свойств материала в сравниваемых образцах (разумеется, если она учитывается при постановке задачи).

В общем случае ПОДХОД 1 применим при любых значениях $D_1 \neq D_2$, поскольку выражение (3) является общим условием идентичности уравнений (1) и (2), т. е. является критерием подобия решений при любых комбинациях параметров D, T_{bas}, X_{bas}.

В то же время **ПОДХОД 2,** помимо формального условия идентичности уравнений диффузии поля в реальный объект и его компьютерную модель, использует дополнительное физическое предположение о равенстве скоростей диффузии поля в каждый объект. Это ведет к пропорциональности между характеристическими временами образцов и полным временем диффузии поля в каждый образец. Такой применим лишь в случае, если равенство скоростей диффузии поля задано как дополнительное условие задачи.

Заметим, что при учете нелинейных свойств материалов данный подход, как и 1-й, не гарантирует точного соблюдения подобия в распределении полей.

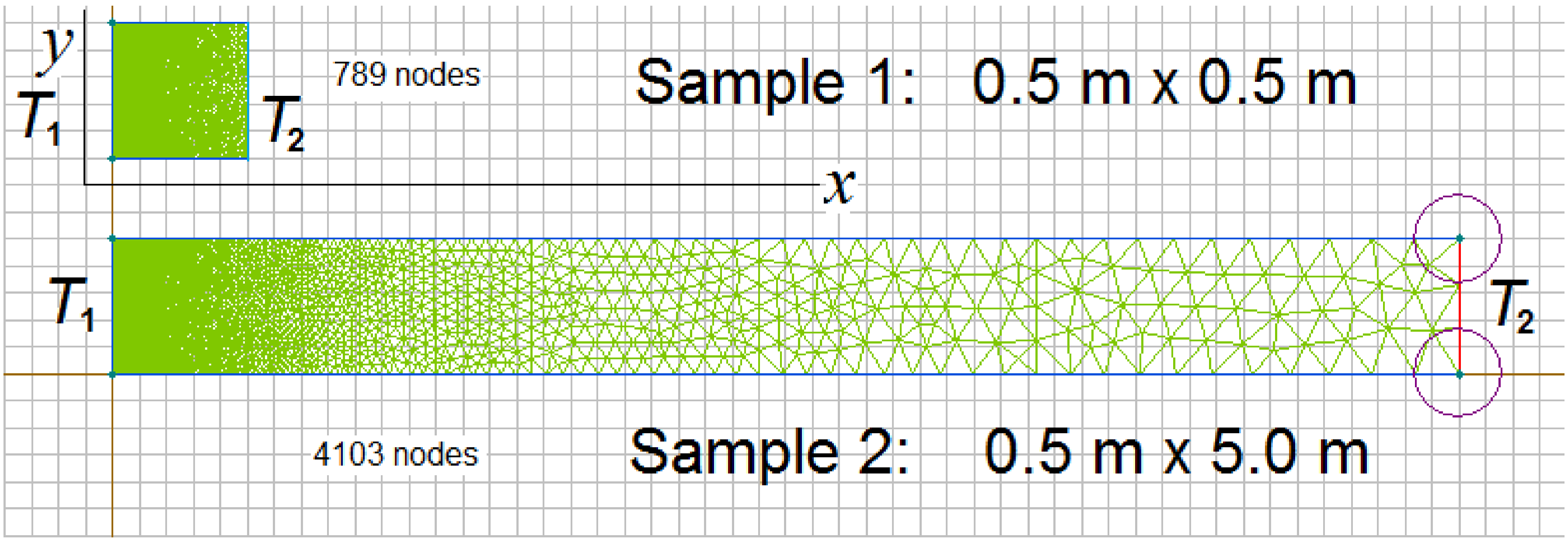
Как правило, магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от уровня индукции магнитного поля. В программе ELCUT предусмотрена возможность ввода кривой намагничивания материала в процесс моделирования. Это означает, что условия подобия картины магнитного поля могут быть достигнуты при обеспечении одинакового уровня магнитных полей в расчетной модели и в реальном объекте.

Это можно обеспечить надлежащим выбором граничных условий, от которых зависит магнитный поток (и соответственно магнитная индукция) в поперечном сечении расчетной модели.

Применение принципа подобия

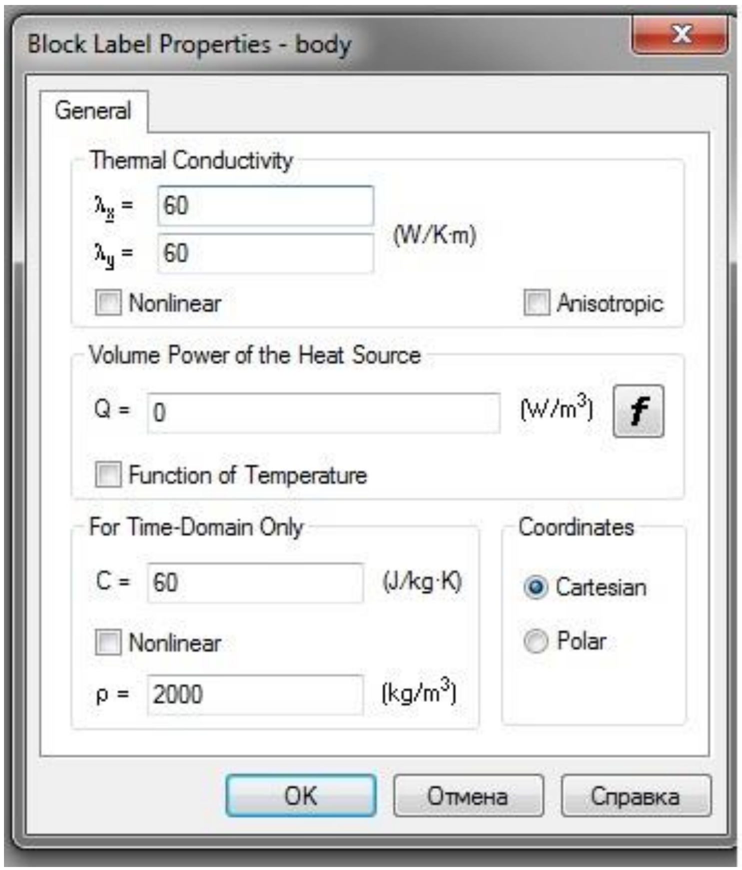
к решениям уравнения **диффузии тепла** может быть продемонстрировано в квази-одномерном рассмотрении с использованием моделей в форме полосы из однородного материала, которую можно считать вырезанной из области со значительно большей шириной вдоль оси y.

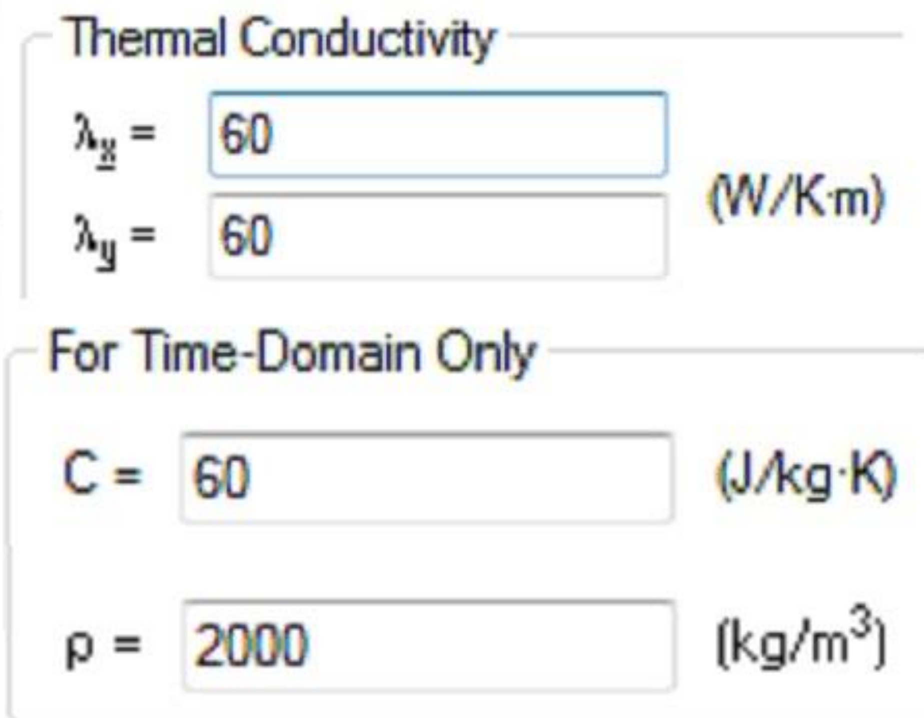
Температура материала $T = f(x, t)$.



Решение уравнения диффузии тепла получено далее при заданных параметрах среды и стандартных граничных условиях.

Свойства метки блока в **ELCUT**.
Задача: **Теплопередача нестационарная**.
Однородное изотропное тело.
Коэффициент диффузии **$D = \lambda /(C \cdot \rho)$** [$м^2/с$]





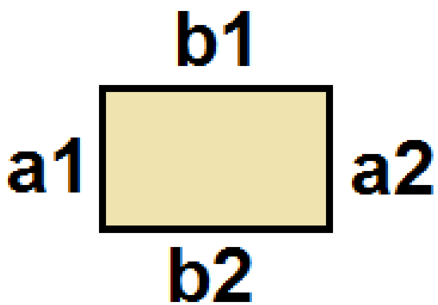
D = **60**(Вт/К·м) / [**60**(Дж/кг·К)x**2000**(кг/$м^3$)] =

= **0.0005 ($м^2$/с)**

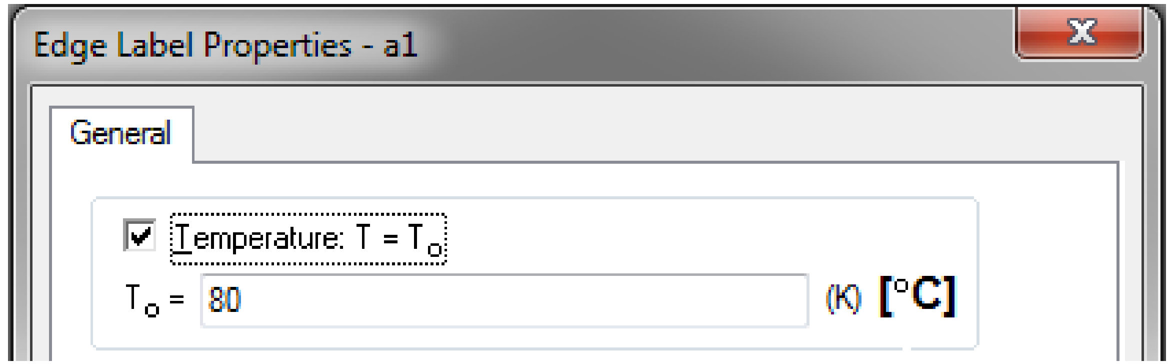
Граничные условия вдоль границ.

Свойства метки ребра.

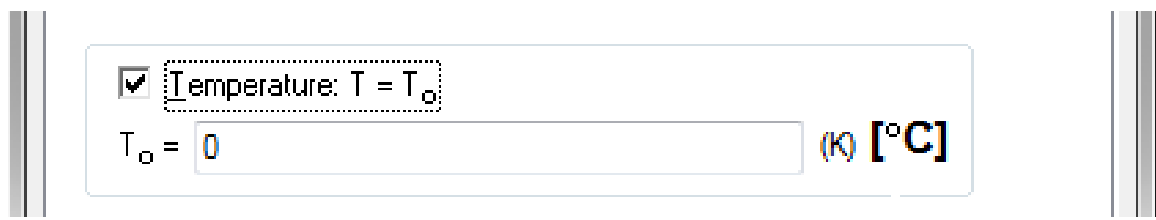
Задача: **Теплопередача нестационарная**



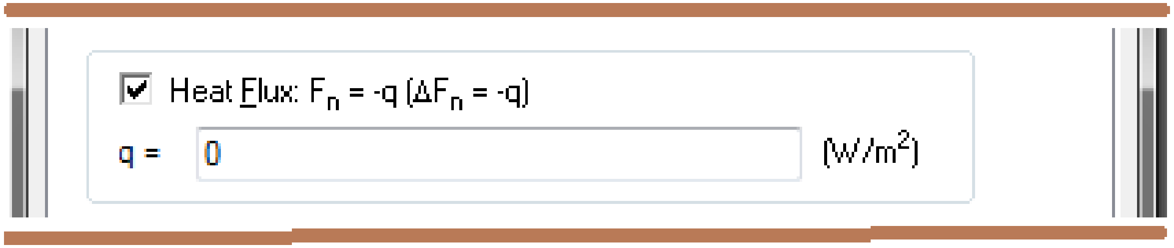
Вдоль стороны **a1**



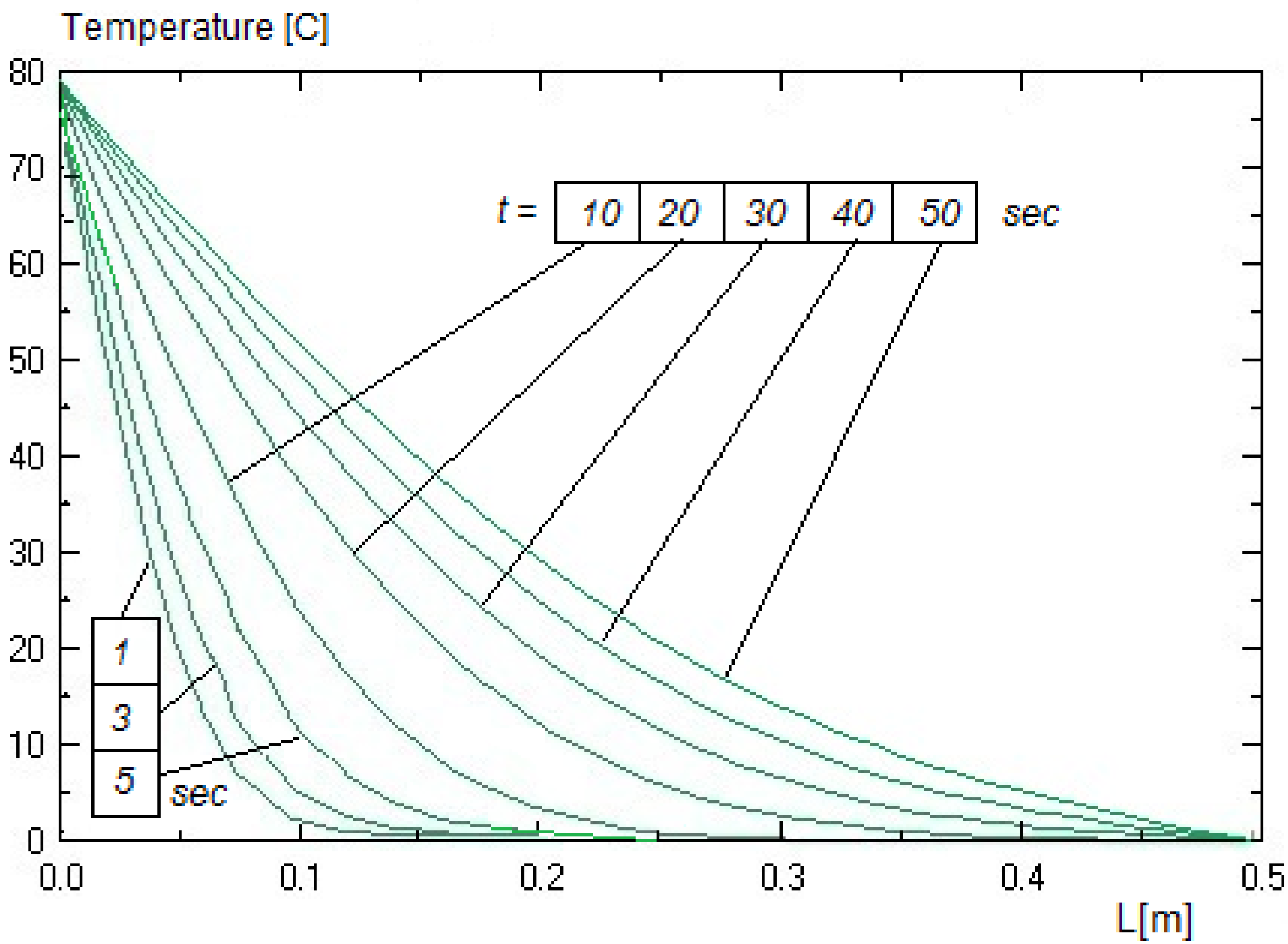
Вдоль стороны **a2**



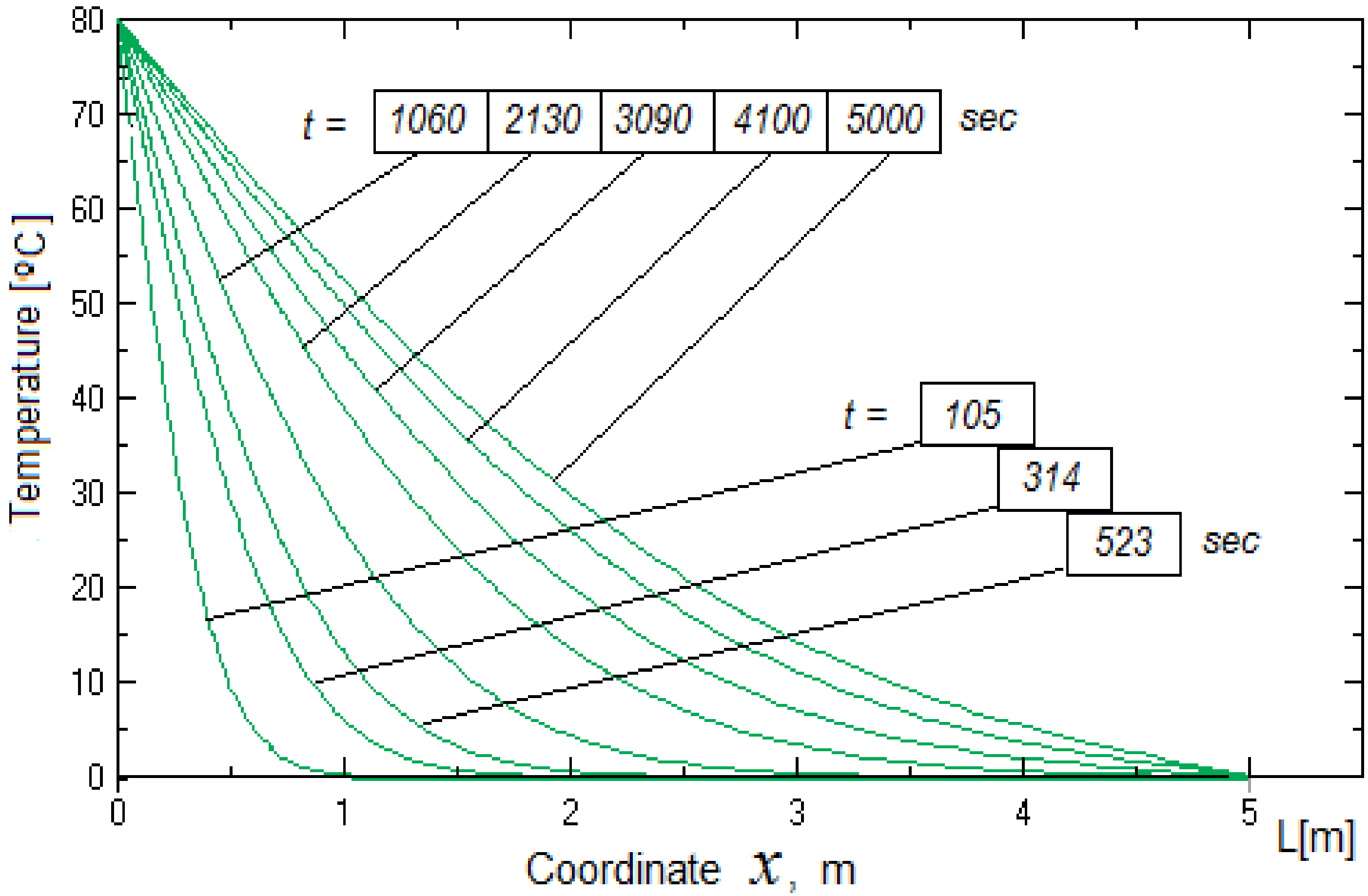
Вдоль сторон **b1, b2**



Распределение температуры в пространстве и времени при D = 0.0005 м²/с, T_1 = 80°C, T_2 = 0°C, t_{MAX} = 50 с. Длина образца L = 0.5 м.



Подобное распределение температуры получено при изменении масштабов образца: L = 5.0 м, t_{2MAX} = 5000 с, t_{2MAX} / t_{1MAX} = 100, $X_2 / X_1 = 10$, $D_1 = D_2$ = 0.0005 м²/с, при сохранении прежних граничных условий.



Условие достижения стационарного состояния

==============================

Really, above at $D_1 = D_2$ $t_{1MAX} / t_{2MAX} = (X_1 / X_2)^2 = 100.$

Однако, вид графических зависимостей температуры $T = f(x, t)$ не всегда дает возможность быть уверенными в подобии картин распределении поля температуры.

Для большей уверенности полезно продолжить оба решения до стационарного состояния. В качестве фактора, подтверждающего достижение стационарного состояния, может быть использован градиент температуры.

Тепловой поток равен $\boxed{q = -\lambda \, grad \, T}$

Если градиент температуры остается постоянным вдоль координаты X с достаточно высокой точностью, это означает, что распределение температуры достигло установившегося значения.

Это дает возможность однозначно определить время достижения стационарного состояния t_{MAX}.

Идентичность граничных условий как необходимое условие для подобия решений

При изменении размера образца в соответствии с изменением длительности процесса идентичность граничных условий представляет собой необходимое условие для точного подобия решений.

Это значит, что одновременно с трансформацией размера модели и длительности процесса необходимо трансформировать величину теплового потока в направлении, вдоль которого происходит диффузия тепла:

$$\boxed{q = -\lambda \, grad \, T}$$

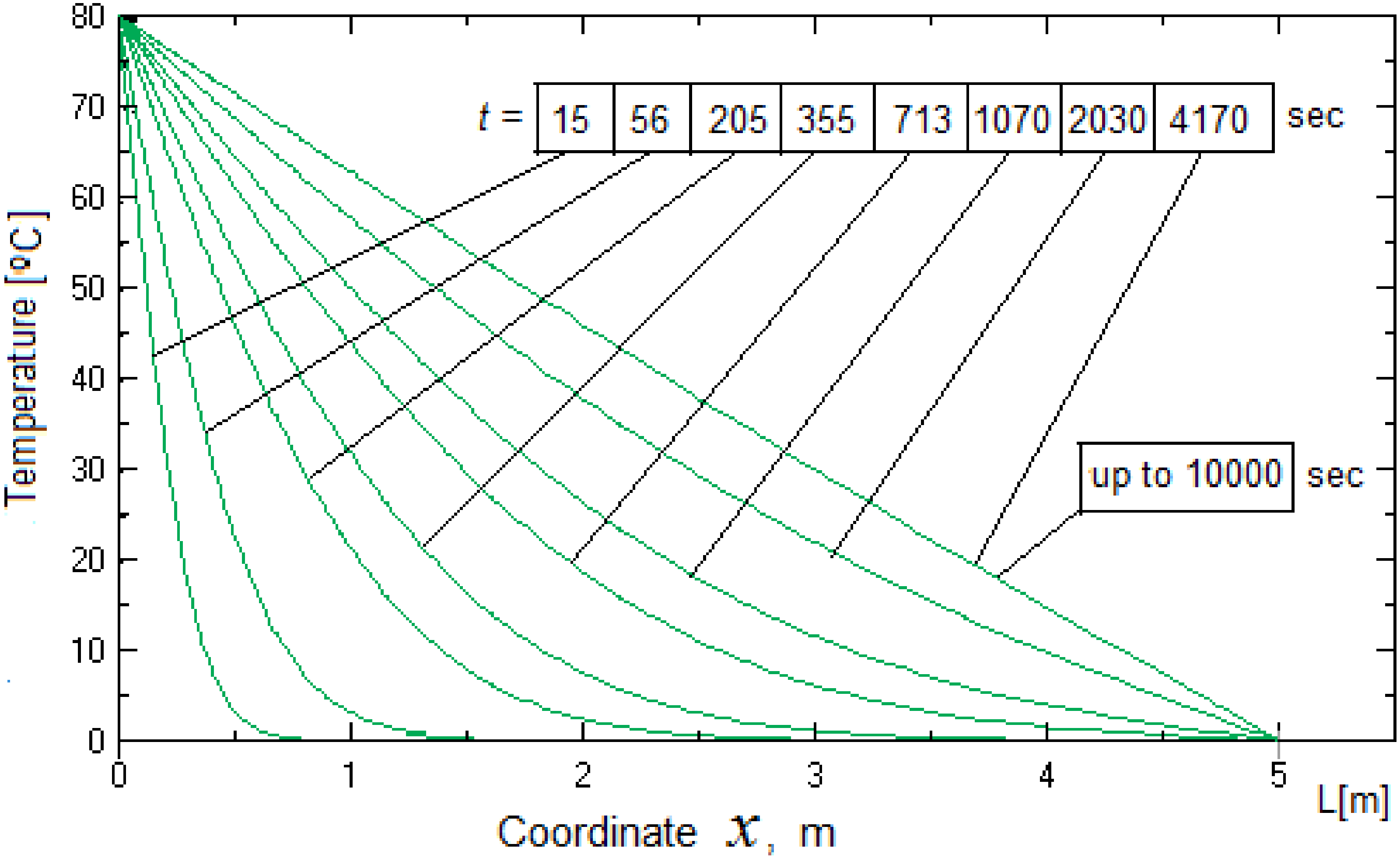
При одномерном анализе $q = -\lambda \, \Delta T/\Delta x = -\lambda \, (T_1 - T_2)/\mathrm{L}.$

==

Особый случай задачи о нестационарном распространении тепла - это задача при заданном тепловом потоке на одной (или двух) границах расчетной модели.

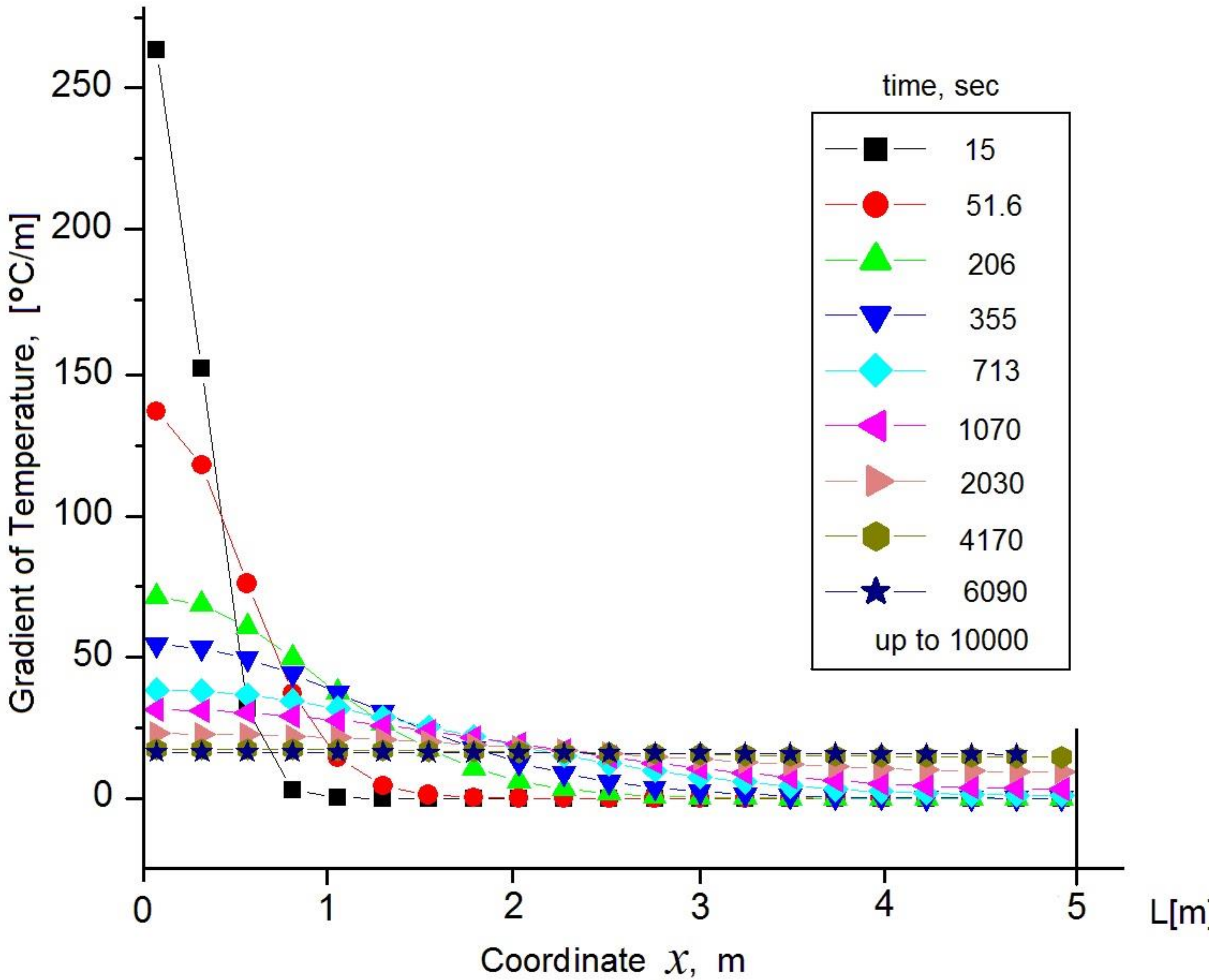
При такой постановке задачи задание граничного условия по величине q также входит в число необходимых условий, обеспечивающих подобие решений для модельных образцов с измененными параметрами размера модели и времени процесса.

Распределение температуры при
D = 0.002 м^2/с, T_1 = 80° C, T_2 = 0° C, t_{MAX} = 10000 с.
Длина образца L = 5.0 м.



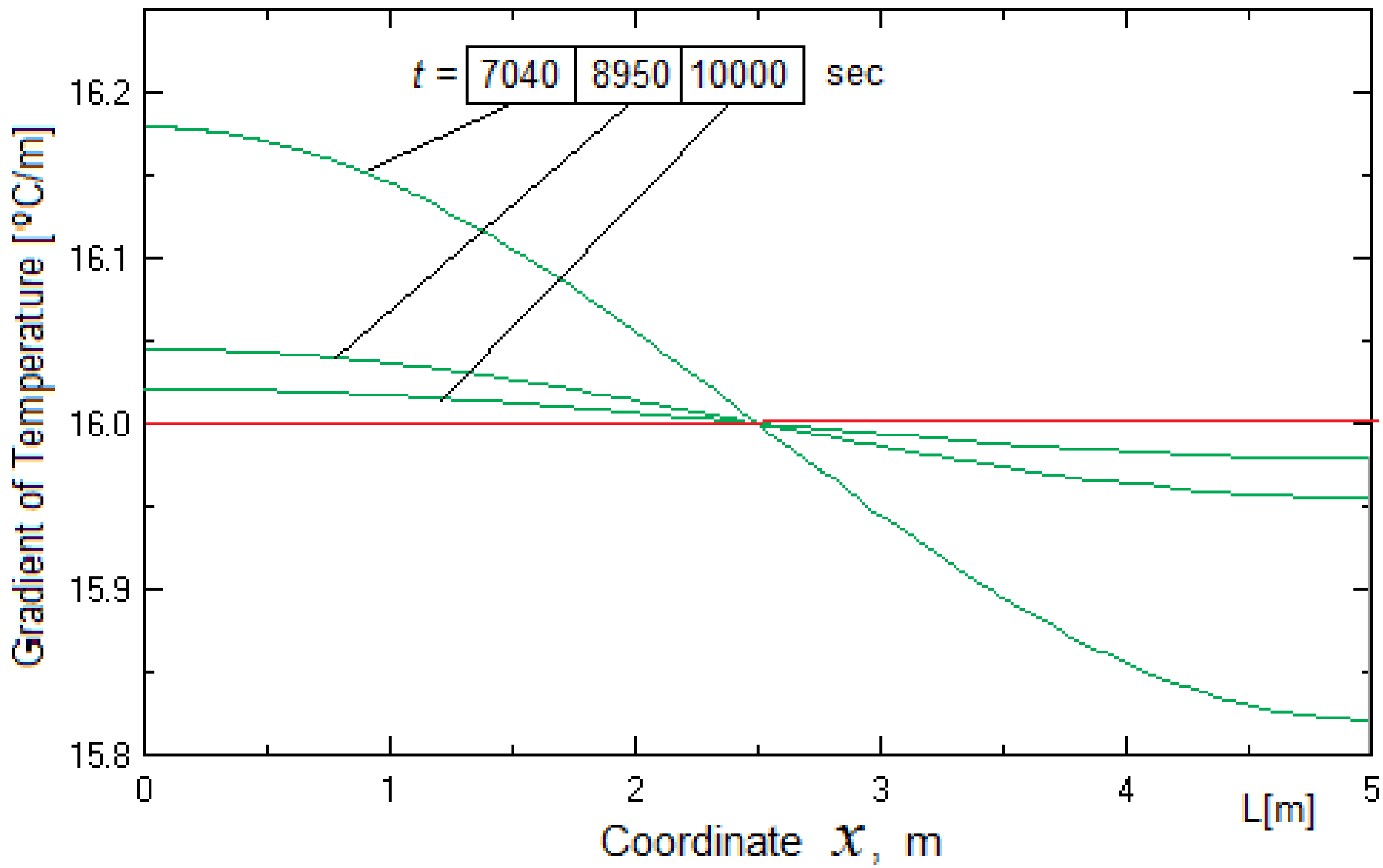
Градиент температуры по длине образца (L = 5 м).

D = 0.002 м^2/с, T_1 = 80°C, T_2 = 0°C, t_{MAX} = 10000 с.



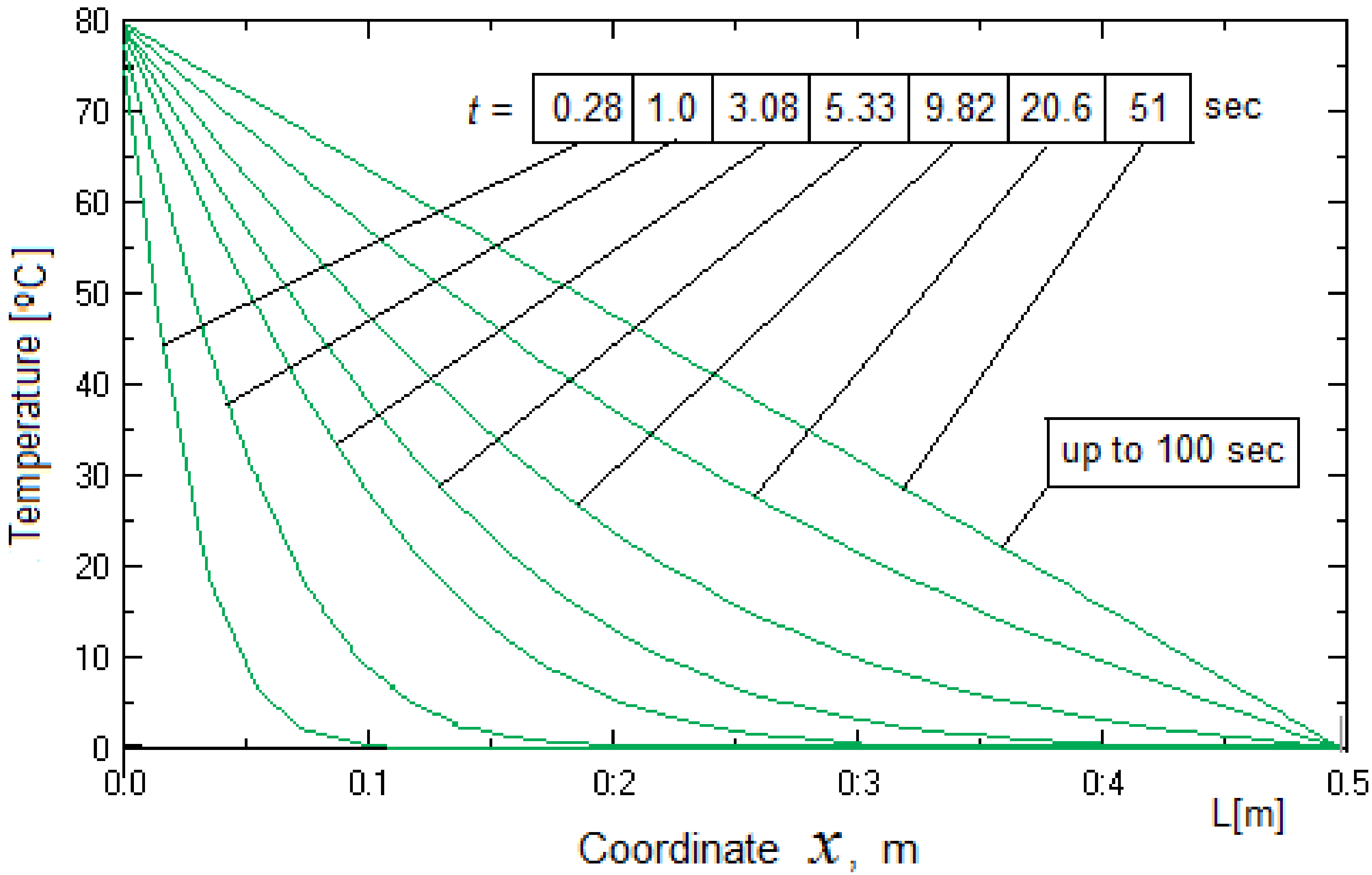
Градиент температуры в конечные моменты времени для образца с L = 5 м.

D = 0.002 м²/с, T_1 = 80°C, T_2 = 0°C, t_{MAX} = 10000 с. Величина ***grad T*** отличается от однородного распределения не более, чем на 0.1%.



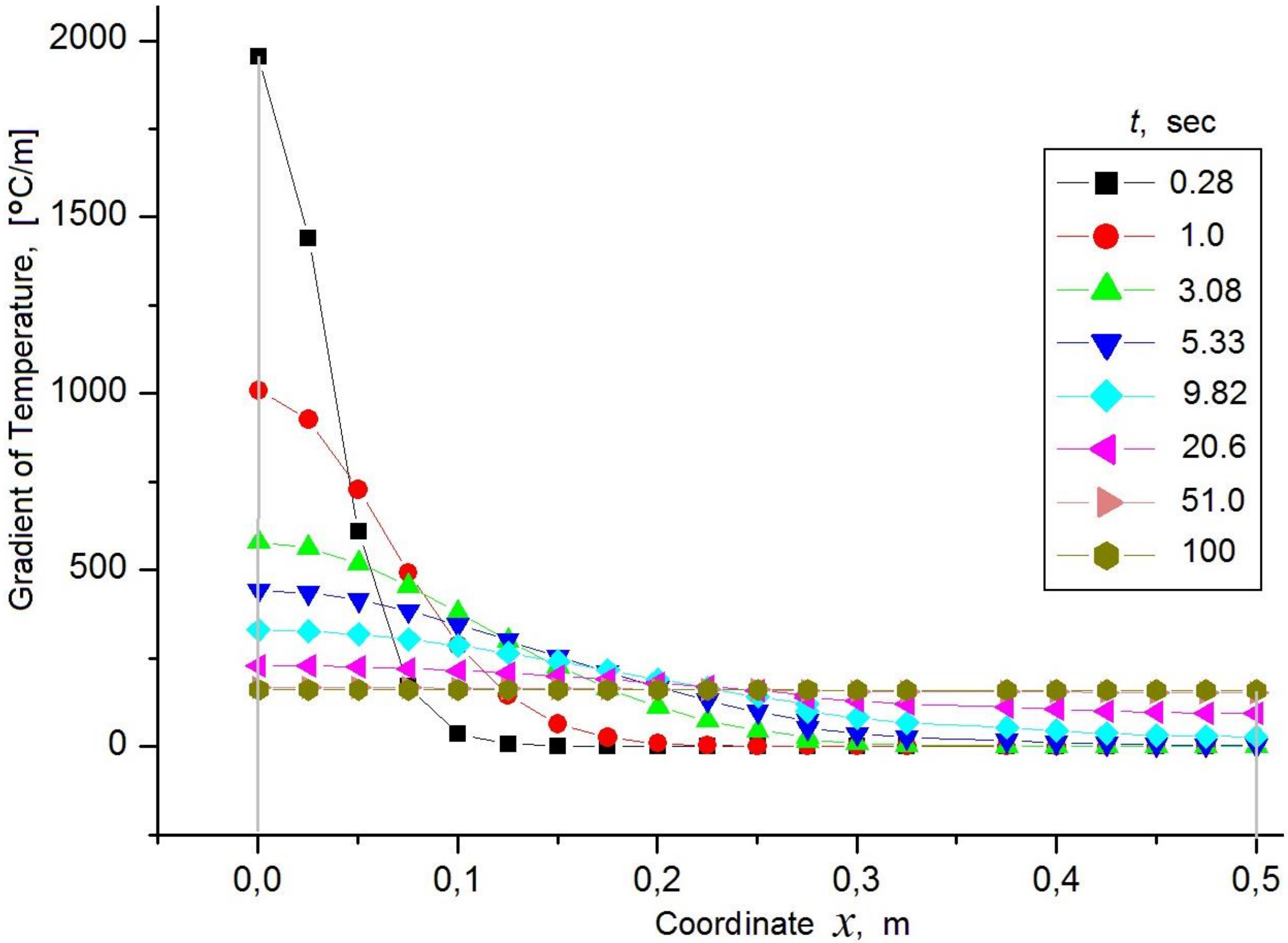
Распределение температуры для уменьшенной модели.
L = 0.5 m. D = 0.002 м²/с. T_1 = 80°C, T_2 = 0°C, t_{MAX} = 100 с.

Размер по *X* уменьшился в <u>10 раз</u>; t_{MAX} уменьшилось в <u>100 раз</u>.

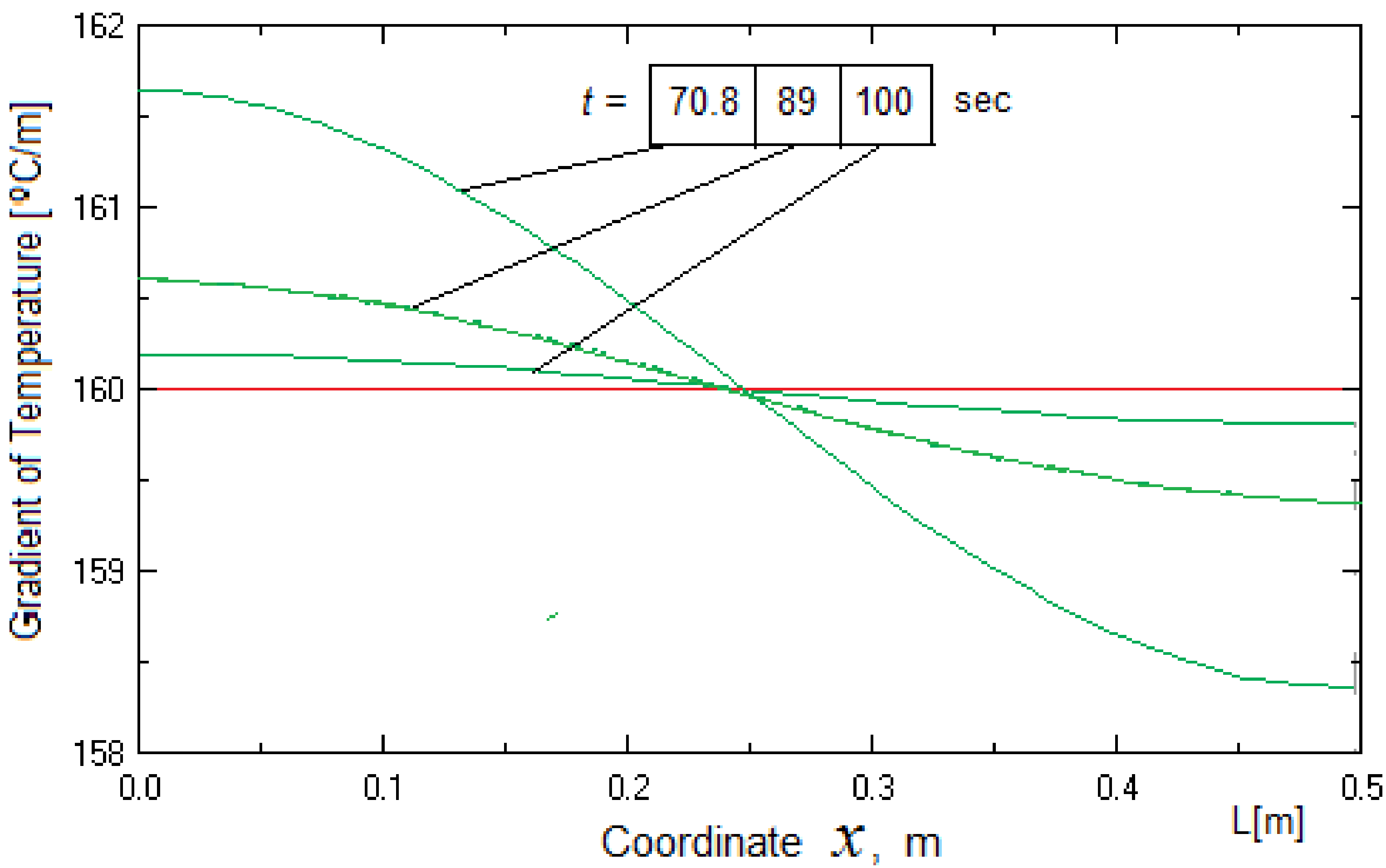


Градиент температуры для уменьшенной модели (L = 0.5 м). $D = 0.002$ м^2/с. $T_1 = 80°C$, $T_2 = 0°C$, $t_{MAX} = 100$ с.

Видно, что с уменьшением длины образца до 0.5 m тепловой поток автоматически уменьшен в 10 раз, в соответствии с общим условием подобия решений.



Градиент температуры в конечные моменты времени.
L = 0.5 м. D = 0.002 м^2/с, T_1 = 80°C, T_2 = 0°C, t_{MAX} = 10000 с.
Отклонение величины ***grad T*** от однородного распределения менее 0.1%.



ВЫВОД № 1. Для достижения подобия решений при изменении масштабов модели в задаче о нестационарном распространении тепла необходимо:

1) Выполнить равенство значений общего критерия подобия

$$D_1 \frac{t_{1bas}}{X_{1bas}^2} = D_2 \frac{t_{2bas}}{X_{2bas}^2}$$

(здесь t_{1bas} и t_{2bas} - это базисные значения времени , или же времена достижения стационарного состояния для обеих моделей);

2) Обеспечить пропорциональное изменение теплового потока в направлении диффузии тепла соответственно изменению характеристического размера модели:

$$q_1 = \frac{\Delta T_1}{L_1}; \quad q_2 = \frac{\Delta T_2}{L_2}.$$

Из граничных условий $(\Delta T_1 = \Delta T_2)$ следует соотношение между тепловыми потоками:

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{L_2}{L_1}$$

Это соотношение служит условием идентичности решений для распределения температуры (***T***) по абсолютным значениям.

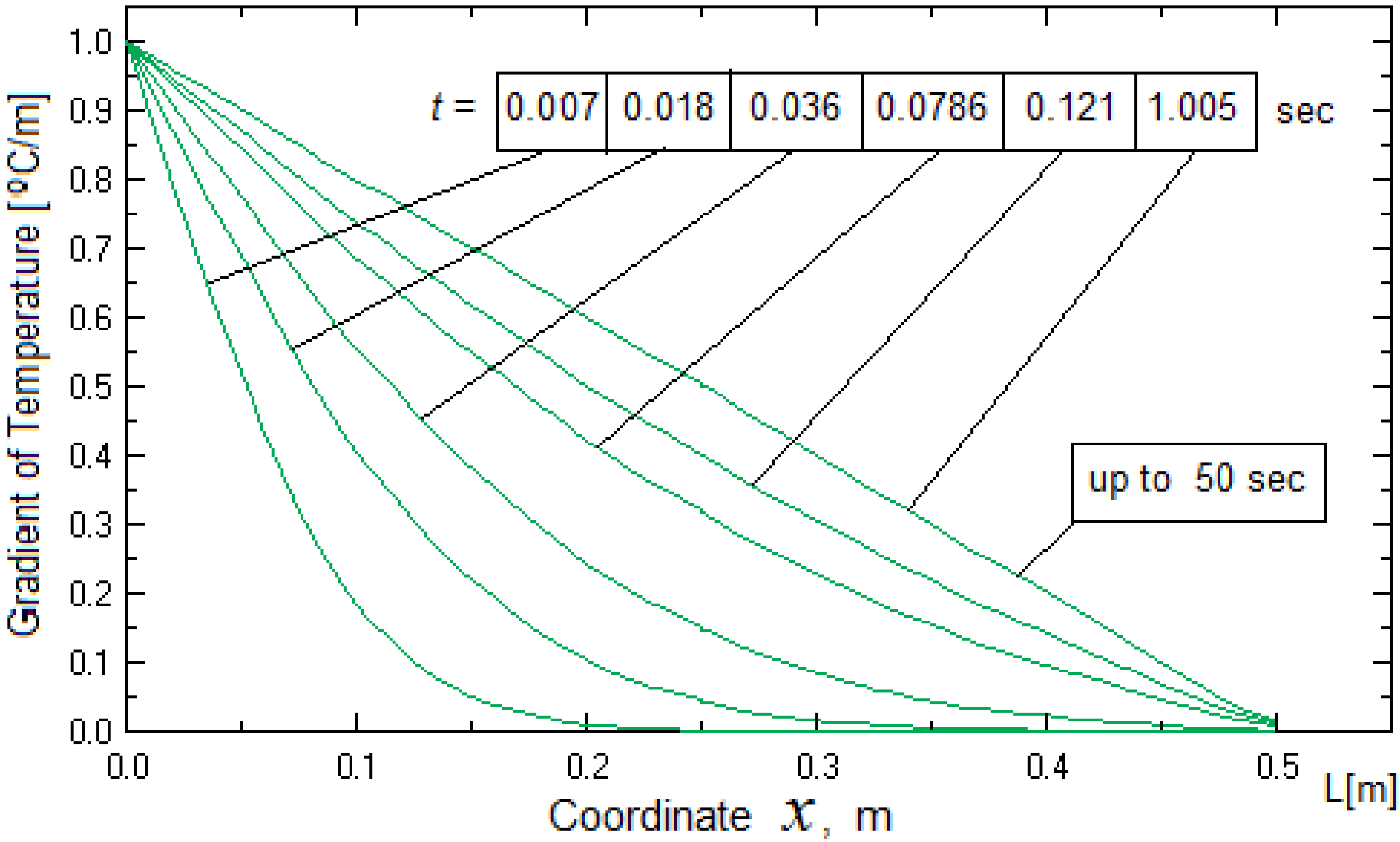
Это будет видно на следующем примере.

Формирование градиента температуры

в начальной стадии диффузии, когда тепловой поток задан постоянным на левой границе модели.

L = 0.5 м, D = 0.417 (м^2/с), q_0 = 10000 (Вт/м), T_2 is free, t_{MAX} = 50 с.

Температура на левой границе T_1 зависит от интенсивности теплового потока и времени.

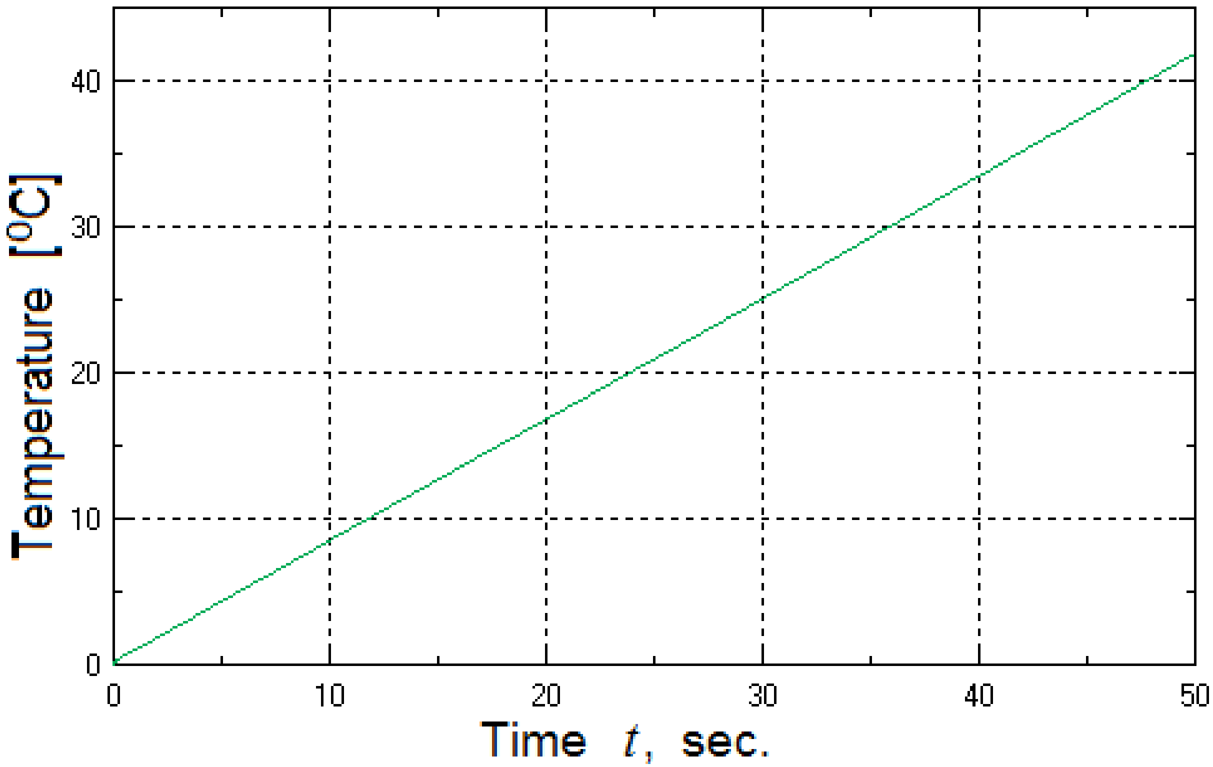


Температура на левой границе модели как функция времени.

$L = 0.5$ м, $D = 0.417$ (м^2/с), $q_0 = 10000$ (Вт/м), $t_{MAX} = 50$ с.

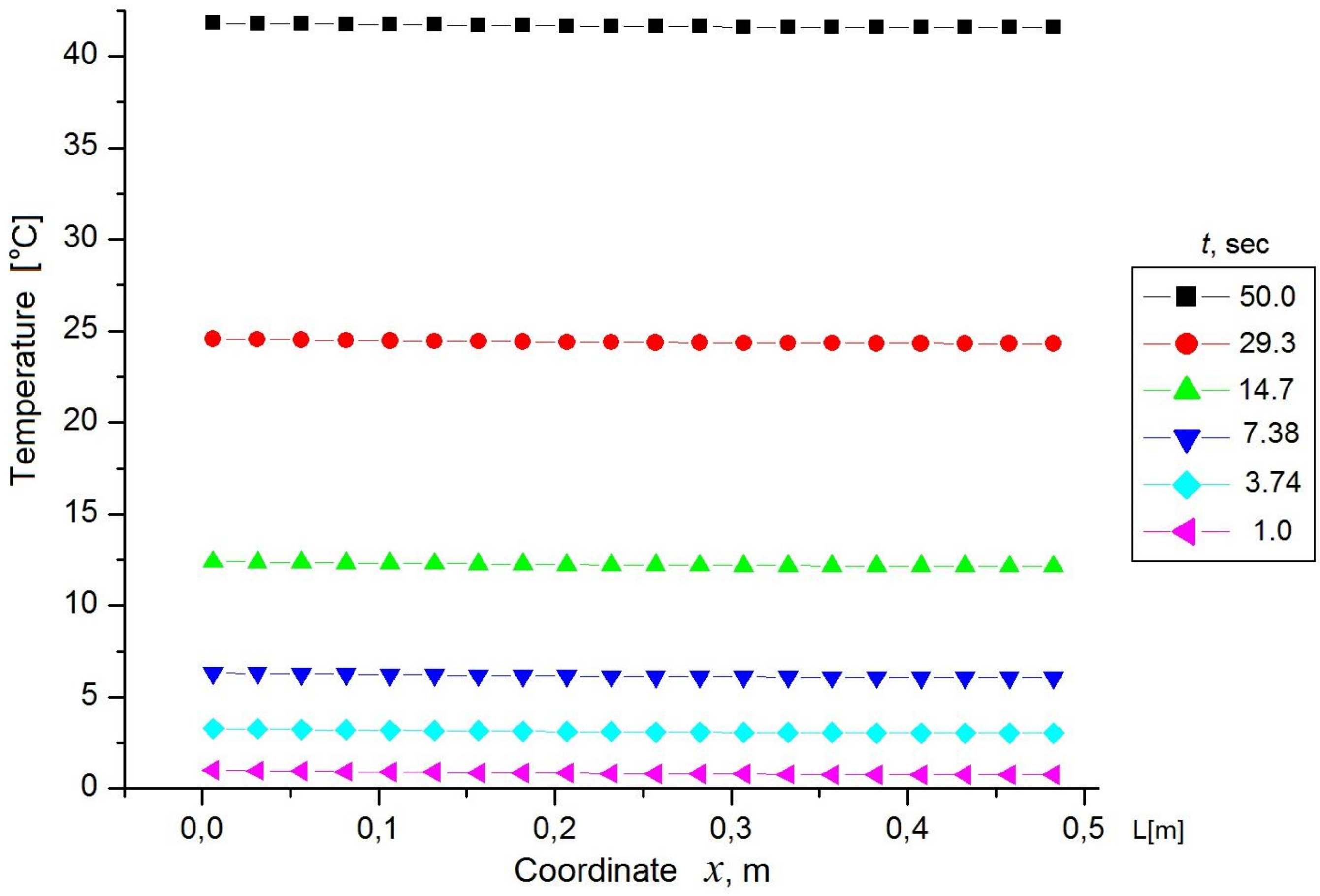
{Подобный график температуры получен для увеличенной модели:

$L = 5.0$ м, $D = 0.417$ (м^2/с), $q_0 = 1000$ (Вт/м), $t_{MAX} = 5000$ с.}

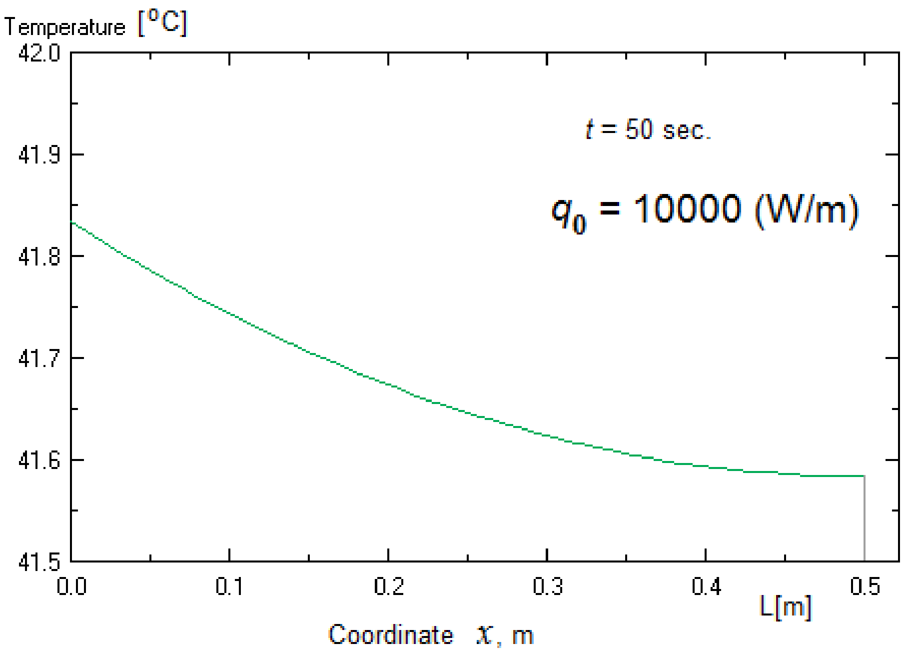


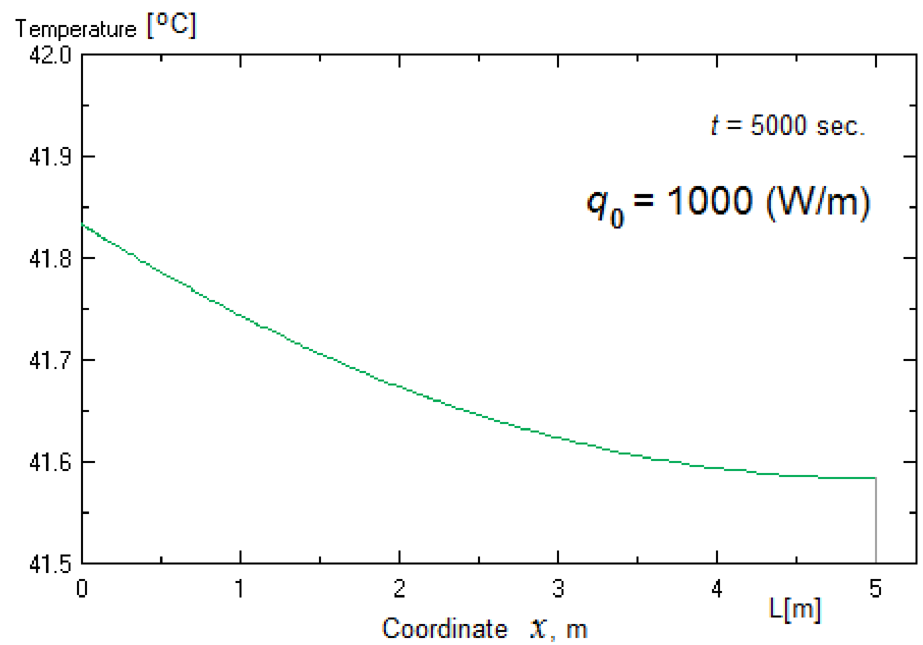
Распределение температуры по длине образца с L = 0.5 м по мере её возрастания на левой границе модели.

Подобное распределение температуры получено для увеличенной модели с L = 5 м при увеличении длительности процесса (до t_{MAX} = 5000 с) и уменьшении величины теплового потока (до 1000 Вт/м вместо 10000 Вт/м).



Сравнение распределения температуры вдоль оси x в конечный момент времени подтверждает подобие решений.





Если возможно достичь **подобия процессов** на основе критерия подобия при равенстве градиентов температуры **в конечный момент времени при достижении стационарного состояния state**, аналогичным образом можно достичь подобия процессов иной длительности, если соблюдены условия подобия пространственных и временных параметров моделей совместно с граничными условиями.

Подобие решений уравнения диффузии магнитного поля

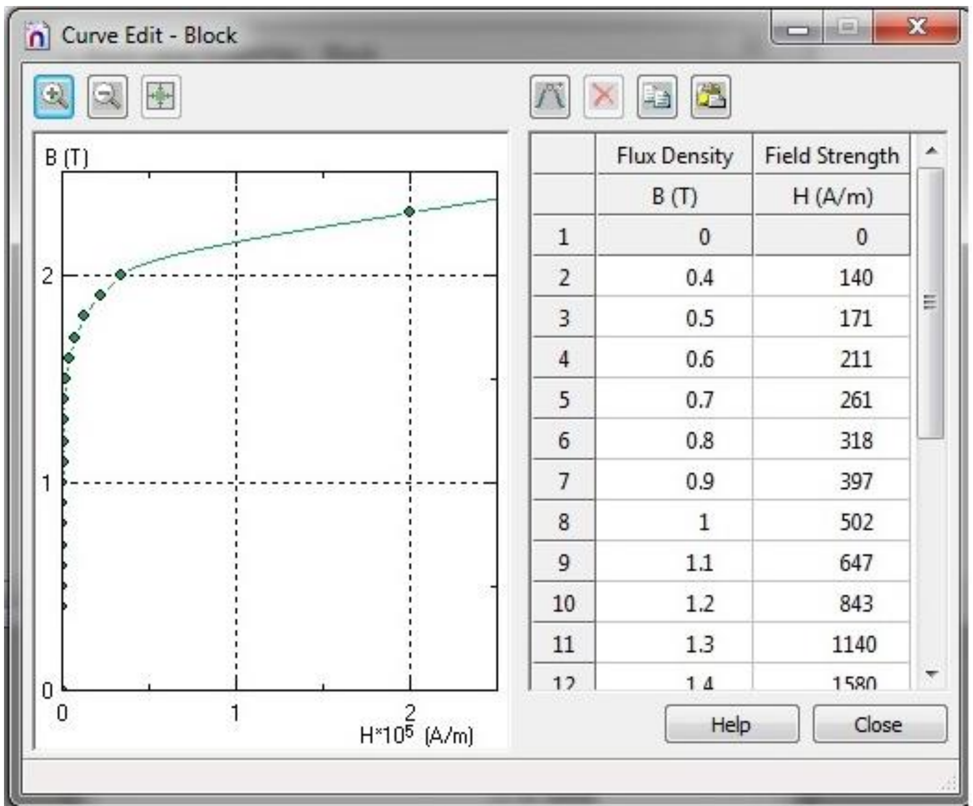
В линейной среде, которая отличается постоянной электропроводностью и постоянной магнитной проницаемостью, решение уравнения нестационарной диффузии магнитного поля имеет такой же характер, как и решение уравнения диффузии тепла. Некоторые отличия имеются лишь в формулировке граничных условий.

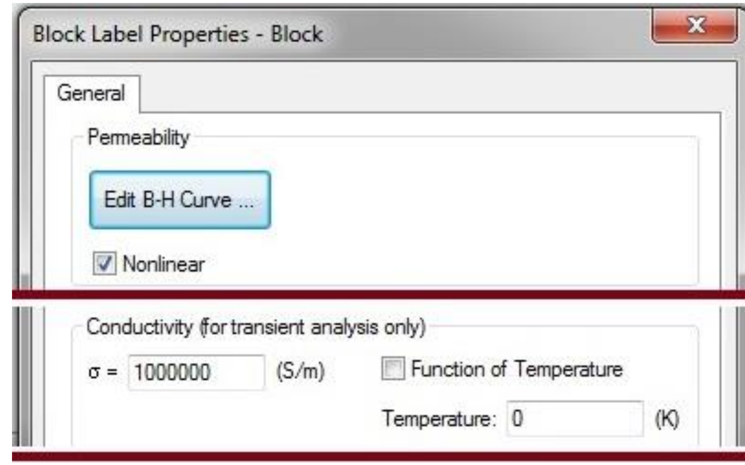
В задаче о магнитном поле y-компонента векторного магнитного потенциала A_y играет ту же роль в граничных условиях, что и температура T в задаче о распространении тепла.

В то же время, магнитная индукция поля, которая в одномерном случае равна $B_z = \partial A_y / \partial x$, играет в решении ту же самую роль, что тепловой поток q в задаче о переносе тепла ($q_x = -\lambda\, \partial T / \partial x$).

Свойства метки блока в Elcut.

Для исследования подобия процессов диффузии магнитного поля в моделях различного масштаба в качестве материала моделей была выбрана слабо магнитная сталь (типа низкокачественной электротехнической стали) при той же самой геометрии моделей, что и для процессов диффузии тепла.



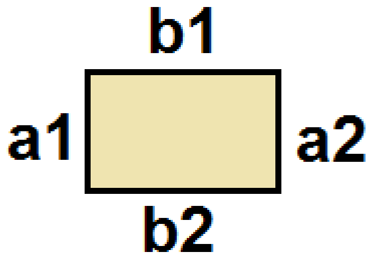


Образцы имеют такую же длину: 0,5 м или 5 м.

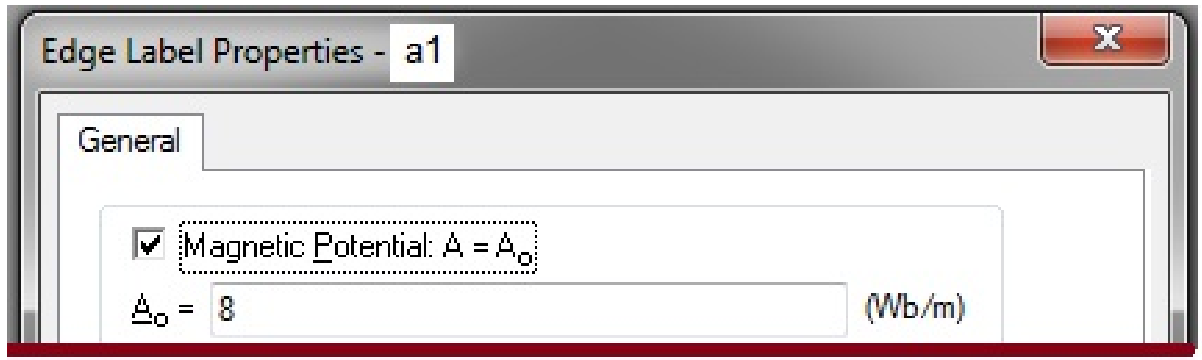
Когда в расчетную модель вводится одна и та же кривая намагничивания материала, это служит гарантией того, что будет достигнуто полное подобие решений при трансформации пространственных и временных характеристик процесса диффузии поля в нелинейный ферромагнетик даже при наличии в нем потерь энергии.

Граничные условия вдоль ребер.
Образец 1 (L = 5 м).

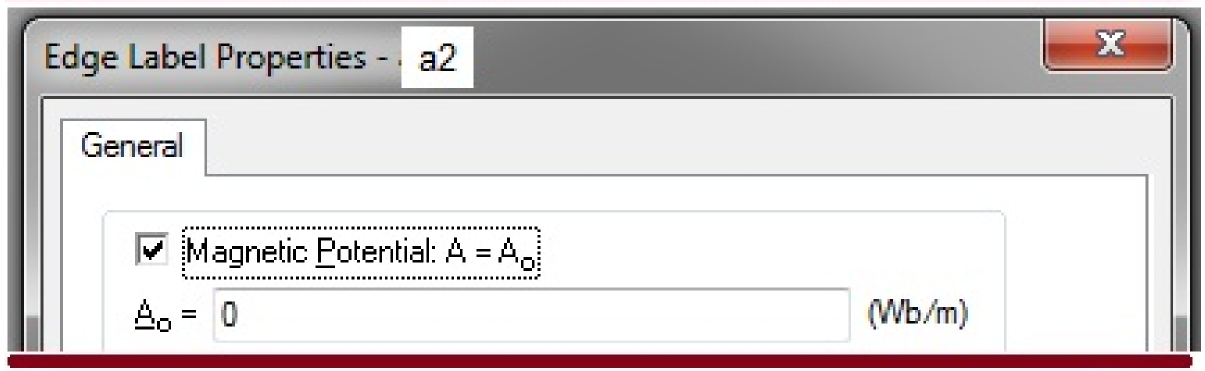
Свойства метки ребра. Задача: **Теплопередача нестационарная.**



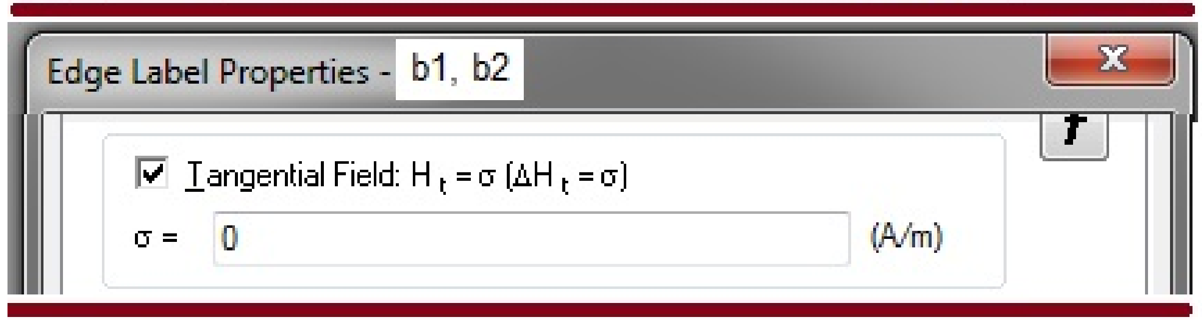
Вдоль ребра **a1**



Вдоль ребра **a2**

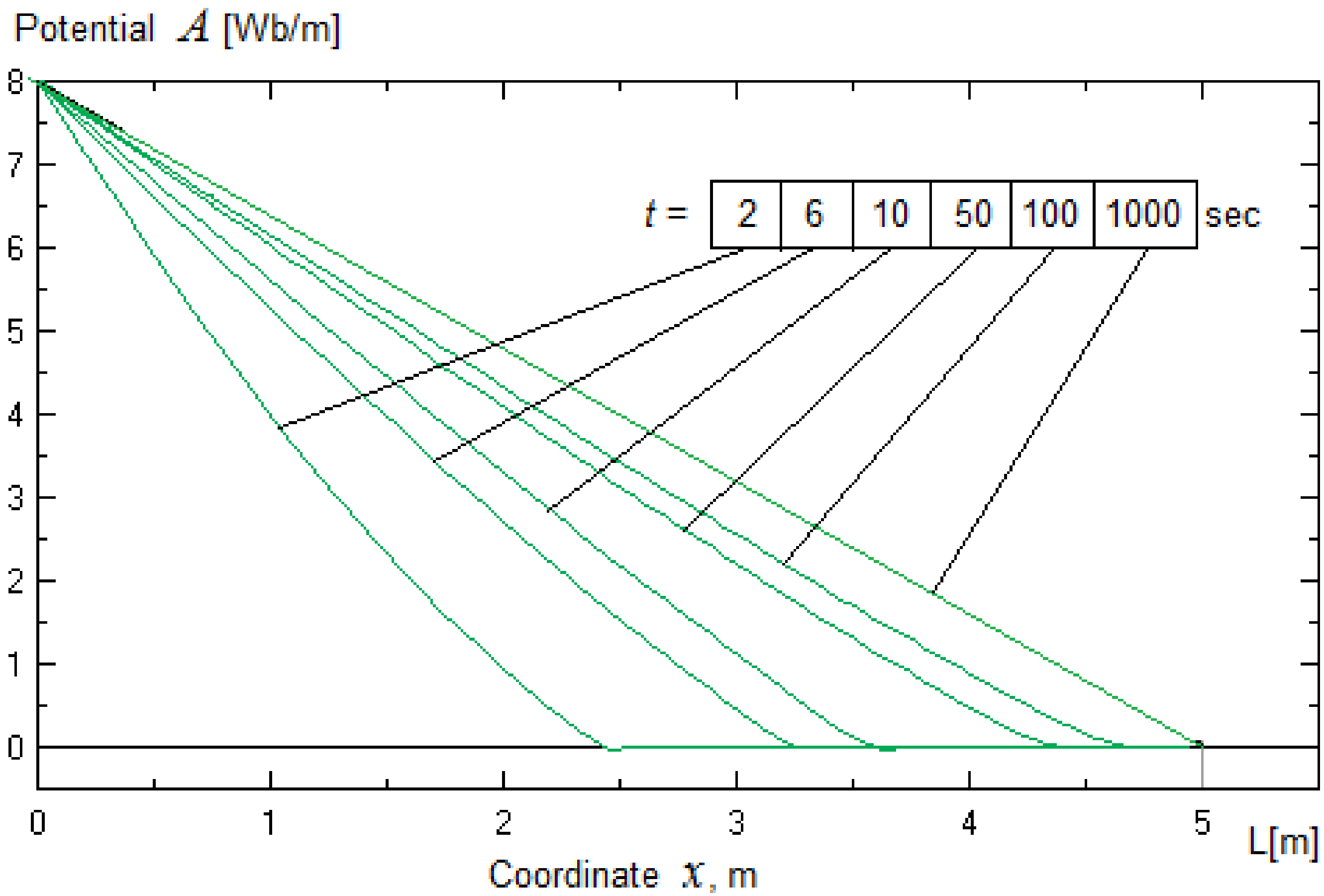


Вдоль ребер **b1, b2**



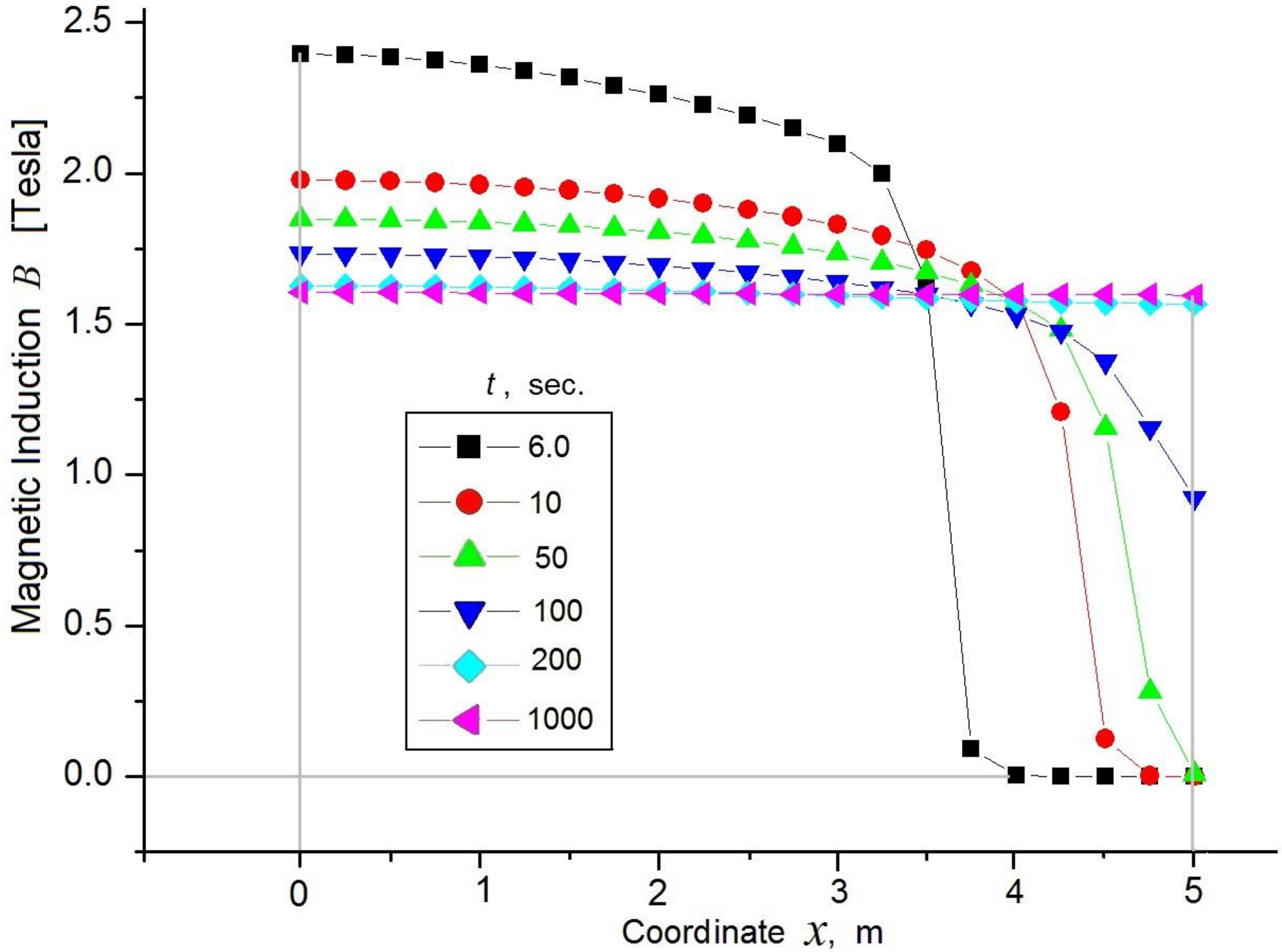
$$A_1 - A_2 = 8.0\ [\mathrm{Wb/m}]$$

График показывает формирование распределения магнитного потенциала на ранних этапах диффузии поля в образец 1 (L = 5.0 m).
На более поздних этапах диффузии (время от 300 до 1000 с) распределение потенциала остается неизменным.
Такая же картина получена для уменьшенного образца 2 с длиной L = 0.5 m в интервале значений координаты x от 0 до 0.5 м при уменьшении длительности процесса в 100 раз (0…10 с).

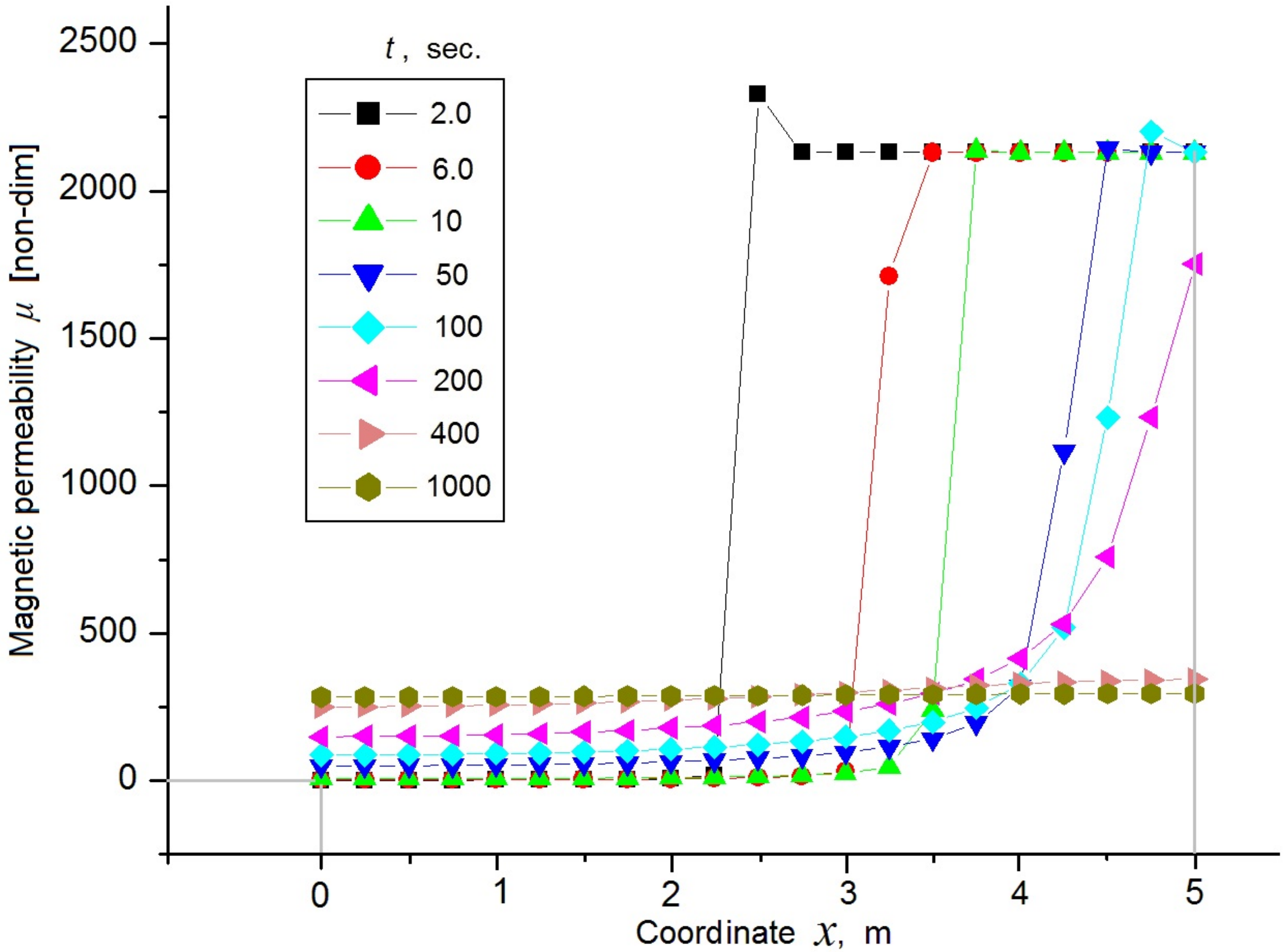


Распределение магнитной индукции по длине образца 1 (L = 5.0 м).
Можно видеть зону насыщения с подвижной границей.

Процесс приближается к стационарному при $t \to 1000$ с.



Видно, что на начальных этапах процесса сталь имеет зону насыщения с низкой проницаемостью (её граница подвижна), в то время как в остальной части образца сталь не насыщена.



Распределение поля при трансформации модели по условиям подобия

При изменении размерности и длительности процесса в рассмотренных образцах для соблюдения критериев подобия между изменением размеров и изменением времени процесса должно быть следующее соотношение:

$$[t_{1MAX}/t_{2MAX} = (X_1 / X_2)^2 = 100].$$

Распределение поля в модели с измененным масштабом несмотря на нелинейность магнитных свойств среды остается подобным распределению поля в первой модели благодаря равенству уровней магнитной индукции в обеих моделях.

Это достигается благодаря тому, что граничные условия обеспечивают равные значения магнитного потока через поперечное сечение модели в установившемся режиме: :

$$\mathbf{B_z = \Phi/S = (A_1 - A_2) / L} \ [\text{Вб/м}^2],$$

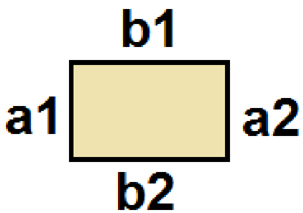
где **L** – размер модели в направлении диффузии поля (т.е. вдоль оси x) .

Равенство магнитных потоков, которое ожидается в обеих моделях при достижении стационарного режима, может рассматриваться как дополнительное условие подобия полей, с помощью которого обеспечивается равенство уровней индукции и подобие влияния нелинейности магнитного материала на величину полу в обеих моделях.

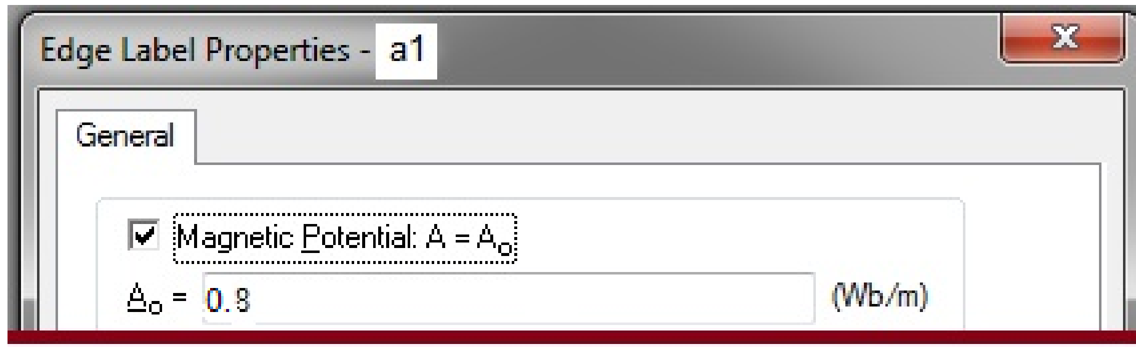
Образец 2 (L = 0.5 m).
Граничные условия вдоль ребер.

Свойства метки ребра.

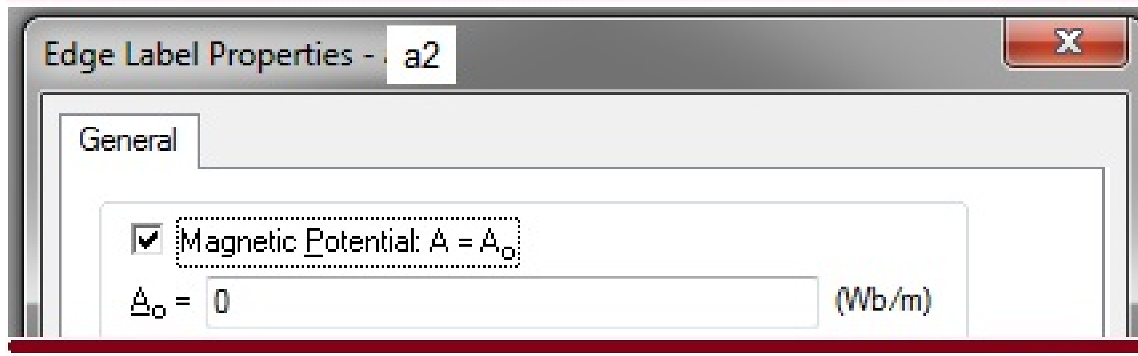
Задача: **Магнитное нестационарное поле**.



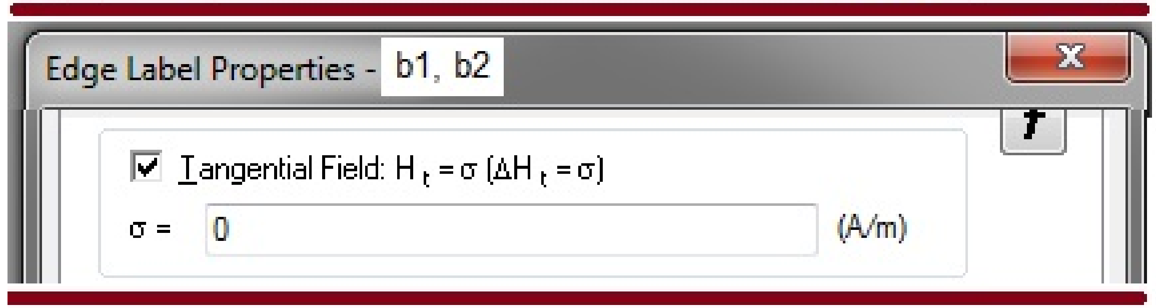
Вдоль метки **a1**



Вдоль метки **a2**

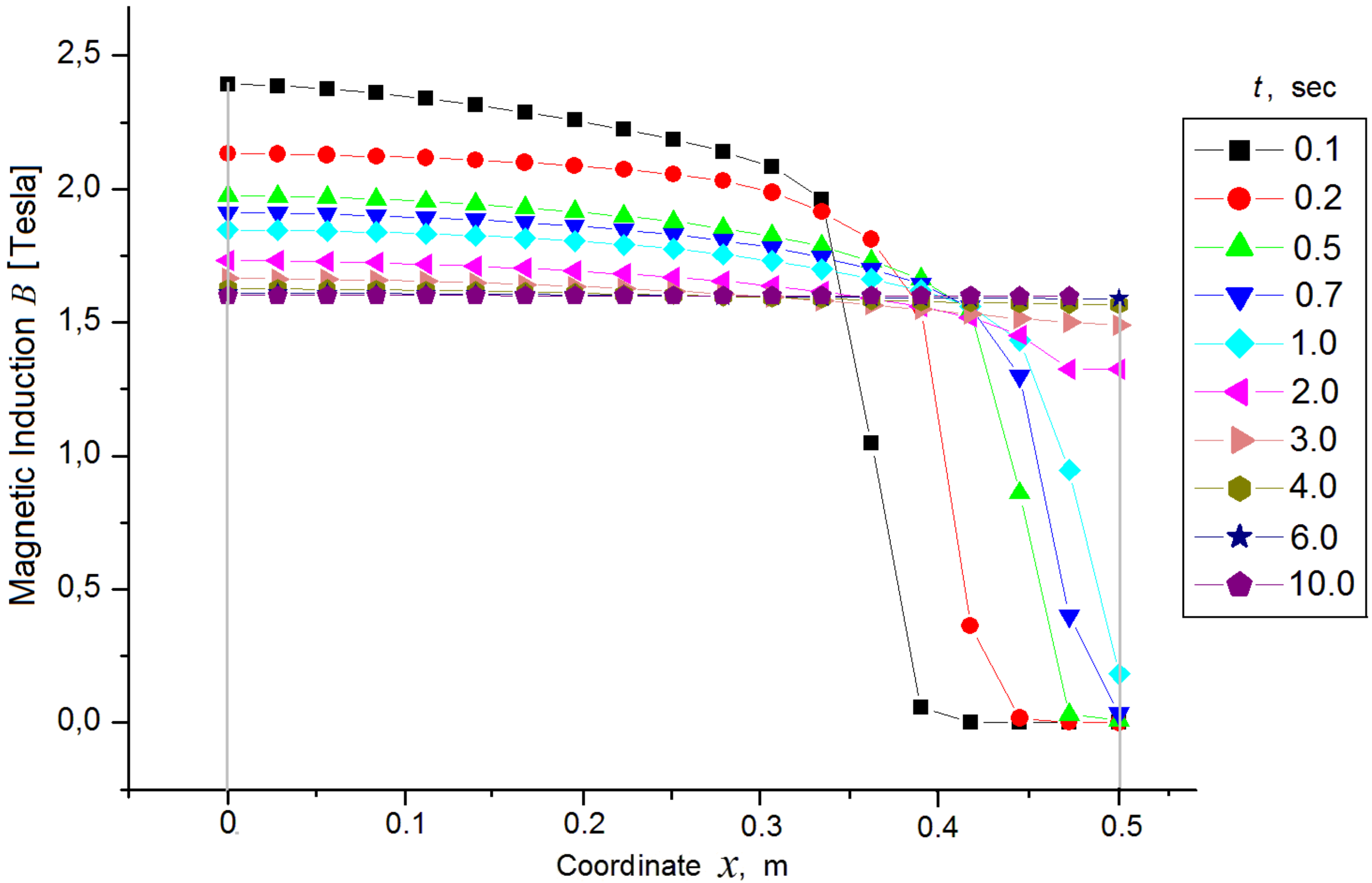


Вдоль меток **b1, b2**

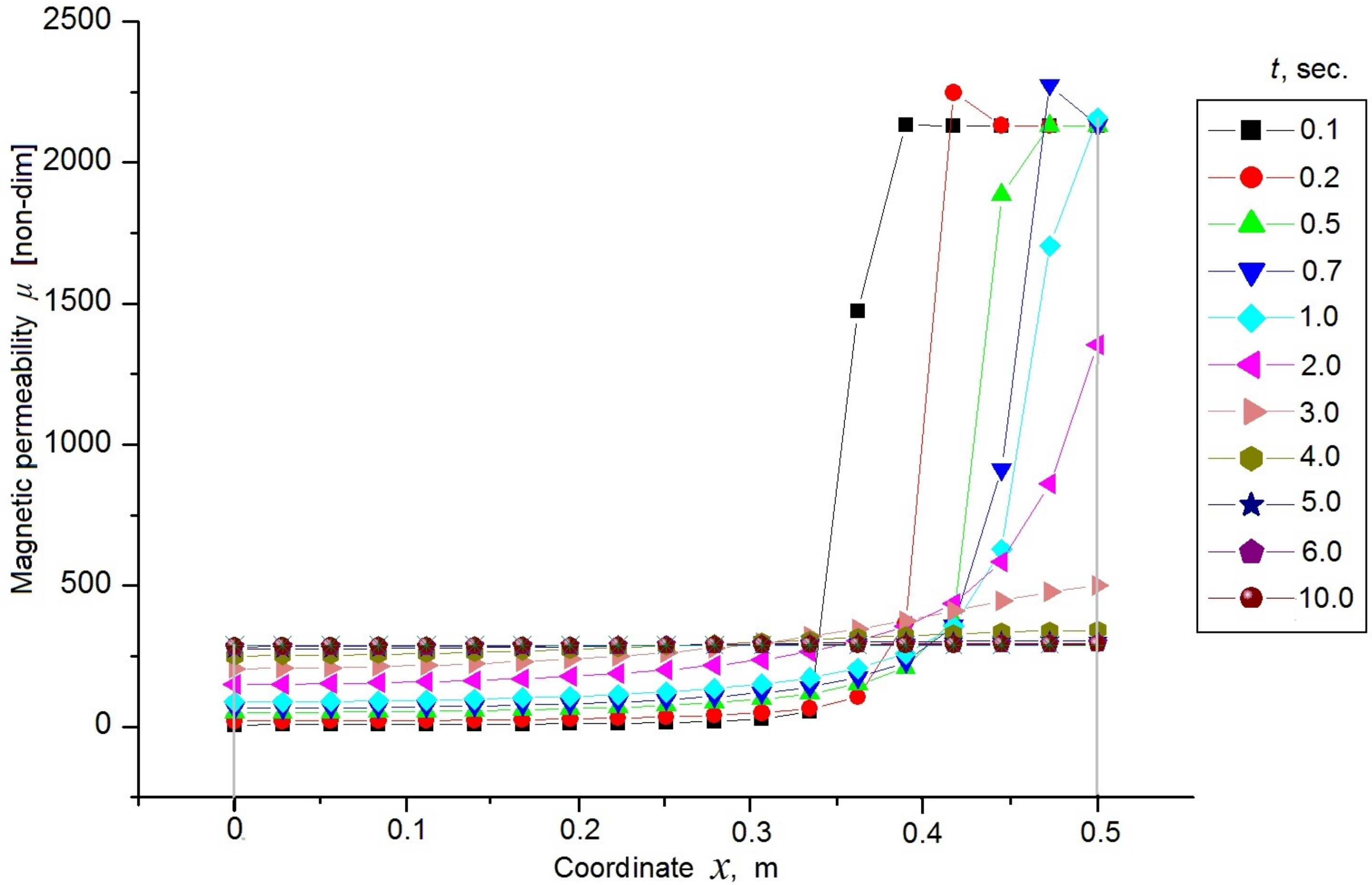


$$A_1 - A_2 = 0.8\ [\text{Вб/м}]$$

Распределение индукции поля в образце 2 (L = 0.5 м) не отличается от распределения поля в образце 1 (L = 5 м) при согласованном изменении масштабов времени и расстояния.



Распределение магнитной проницаемости по длине образца 2 (L = 0.5 м) принципиально такое же, как в образце 1 (L = 5.0 м) при согласованном изменении масштабов времени и расстояния.



Можно ли сравнить коэффициенты диффузии поля в рассматриваемых моделях?

Для сравнения коэффициентов диффузии поля в нелинейный ферромагнетик могут быть использованы значения коэффициентов диффузии, которые достигаются при достижении стационарного режима в обеих моделях (т.е. при завершении процесса диффузии).

В обоих случаях (образец 1, образец 2) установившееся значение магнитной проницаемости при одинаковых значениях магнитной индукции B_z = 1.6 Тл равно $\boldsymbol{\mu}$ = 289,4 $\boldsymbol{\mu_0}$.

Электропроводность материала $\boldsymbol{\sigma}$ =1e06 См/м.

Таким образом, в обоих случаях можно считать, что конечное значение коэффициента диффузии составляет

$$\boldsymbol{D = 1/[\,\mu \cdot \sigma\,]} =$$

$$= 1/[289{,}4 \cdot 1{,}26E\text{-}6 \cdot 1E6] = 0.0274\ [\text{м}^2/\text{с}].$$

ВЫВОД 2. Моделирование диффузии магнитного поля в линейной среде принципиально не отличается от моделирования нестационарной теплопередачи.

Между величинами поля существует следующая аналогия:

температура T → магнитный потенциал A ;

тепловой поток q → плотность магнитного потока B.

Моделирование диффузии магнитного поля в нелинейном ферромагнетике при наличии электрической проводимости может приводить к подобным результатам для двух геометрически подобных моделей при выполнении следующих условий подобия:

1) **подобие пространственных и временных масштабов сравниваемых моделей** (характерный размер X_{bas} , длительность процесса T_{bas});

2) **равенство размерных D или безразмерных D^* коэффициентов диффузии,** определяемых для установившегося процесса, когда диффузия завершена (это условие связано с предыдущим);

3) **равенство значений плотности магнитного потока B** , определяемых для установившегося состояния, когда диффузия завершена (это необходимо для корректного учета нелинейных свойств среды в каждом образце).

Общее условие подобия моделей сохраняет свою форму и для нелинейных сред:

$$\boxed{D_1 \frac{T_{1bas}}{X_{1bas}^2} = D_2 \frac{T_{2bas}}{X_{2bas}^2}}$$

================== окончание ======================