Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

# Расчет электрических и магнитных полей методом конечных элементов с применением комплекса программ ELCUT

**Учебное пособие**

Омск
Издательство ОмГТУ
2010

Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Омский государственный технический университет»

# Расчет электрических и магнитных полей методом конечных элементов с применением комплекса программ ELCUT

**Учебное пособие**

Омск
Издательство ОмГТУ
2010

**УДК 621.3**
**ББК 22.313**
**П58**

Рецензенты:
А. А. Кузнецов, д-р техн. наук, профессор кафедры «Теоретическая электротехника» Омский государственный университет путей сообщения (ОмГУПС)
А. В. Гидлевский, профессор кафедры «Автотракторное электрооборудование» Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ)

**Расчет электрических и магнитных полей методом конечных элементов с применением комплекса программ ELCUT.** Учебное пособие / Татевосян, А.С., Андреева, Е.Г., Чугулев, А.О. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2010 г. 84 с.

Учебное пособие содержит краткое изложение теоретического материала для решения основных типов задач электромагнитного поля методом конечных элементов с применением комплекса программ Elcut. Целью учебного пособия является оказание помощи студентам и магистрантам при самостоятельной подготовке и выполнении расчетно-графических работ по электротехническим дисциплинам в соответствии с учебными программами «Теоретические основы электротехники» раздел «Электромагнитное поле», «Электричество и магнетизм» и «Компьютерные технологии в науке и производстве»

В пособии приведены примеры решения задач, домашние задания и список литературы. При выполнении расчетов электромагнитного поля используются студенческая и профессиональная версии Elcut.

*Печатается по решению редакционно-издательского совета Омского государственного технического университета.*

**УДК 621.3**
**ББК 22.313**

## ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные явления и эффекты являются основой для понимания принципа действия электротехнических устройств. Математическое описание электромагнитных явлений и эффектов в расчетах позволяет оценить эффективность электротехнического устройства, определить его параметры и рабочие характеристики. Практически все виды расчетов электротехнических устройств, основаны на анализе соответствующего физического (электрического и/или магнитного) поля. Однако, в большинстве случаев непосредственное моделирование поля не выполняется, так как между моделированием картины поля в электротехническом устройстве и расчетчиком, как правило, стоит так называемая инженерная методика. Отталкиваясь от априорного представления о характере распределения поля в стандартизованной геометрической конфигурации, она сводит задачу к некоторой упрощенной модели, удобной для манипулирования в задачах анализа и синтеза. Чаще всего такой моделью является электрическая цепь, математический аппарат для анализа которой являются хорошо изученным. При этом совершенствование инженерной методики обычно означает добавление новых элементов эквивалентной электрической цепи и уточнение методов подбора их параметров. Усложнение модели электрической цепи неизбежно сопровождается уменьшением надежности ее параметров, приводит к менее обозримым и надежным результатам.

Взамен бесконечному уточнению эквивалентных электрических схем замещения и других упрощающих инженерных методик существует более эффективный путь расчета электротехнических устройств, основанный на применении программ прямого моделирования физических полей. Из методов моделирования метод конечных элементов (МКЭ) является более популярным и хорошо изученным. Рынок соответствующих программных средств уже сформирован. Однако широкое применение полевого моделирования в расчетах электротехнических устройств является скорее приятным исключением, чем хорошей привычкой и повседневной необходимостью. Причина заключается не только в заметной цене доступных на рынке коммерческих программ, но и в высокой сложности их использования. Освоение приемов работы с большой многофункциональной конечно-элементной системой требует значительного времени. Это обстоятельство создает ложное впечатление, что полевое моделирование полезно только при поверочном анализе уже спроектированного электротехнического устройства и не может быть применено для быстрых многовариантных расчетов, характерных для фазы синтеза.

Сделать полевое моделирование повседневным конструкторским инструментом - такую задачу поставили разработчики *ELCUT*: российского инженерного пакета моделирования двумерных физических полей. За *11* лет коммерческого существования пакета десятки российских и сотни зарубежных фирм и университетов по достоинству оценили две главные особенности *ELCUT:* предельную дружественность интуитивно понятного интерфейса пользователя, а также беспрецедентно высокую скорость расчета.

В данном учебном пособии изложены следующие вопросы:

- *в первой главе* даны краткие теоретические сведения об электромагнитном поле и уравнениях Максвелла для его исследования; приведены уравнения метода конечных элементов для решения основных типов задач электромагнитного поля;
- *во второй главе* рассмотрено назначение и основные принципы работы пакета *ELCUT*;
- *в третьей главе* представлены примеры решения задач в пакете *ELCUT*.
- *в четвертой главе* указаны варианты домашних заданий по расчетам электрического и/или магнитного поля с применением пакета *ELCUT*.

# 1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ, СПОСОБЫ ИХ ОПИСАНИЯ

## 1.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

К основным понятиям теории электромагнитного поля относятся: электрическое поле, магнитное поле и электромагнитное поле.

Электрическое поле является составной частью электромагнитного поля. Оно создается совокупностью электрических зарядов. Электрическое поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него электрический заряд механической силой, прямо пропорциональной величине этого заряда. Если заряды, создавшие электрическое поле, неподвижны, то поле называется электростатическим.

Магнитное поле является составной частью электромагнитного поля. Оно создается совокупностью движущихся зарядов. Магнитное поле обладает способностью воздействовать на помещенный в него проводник с током механической силой, прямо пропорциональной силе тока.

Электромагнитное поле есть совокупность электрического и магнитного полей в их взаимной связи. Изменение во времени одного из полей (электрического или магнитного) влечет за собой изменение другого поля. При угасании одного поля, исчезает и другое. Если существует взаимная связь между электрическим и магнитным полями, то существует и электромагнитное поле.

При рассмотрении электромагнитного поля используются следующие его характеристики:

$\overline{\boldsymbol{E}}$ - вектор напряженности электрического поля;

$\overline{\boldsymbol{D}}$ - вектор электрического смещения;

$\overline{\boldsymbol{H}}$ - вектор напряженности магнитного поля.

$\overline{\boldsymbol{B}}$ - вектор индукции магнитного поля;

Причем векторы $\overline{\boldsymbol{D}}$ и $\overline{\boldsymbol{H}}$ не зависят от физической природы материальной среды и ее свойств, что существенно облегчает задачу расчета электромагнитного поля  Векторы $\overline{\boldsymbol{E}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$, наоборот, зависят от свойств материальной среды, и являются силовыми характеристиками поля.

Задача расчета электромагнитного поля заключается в определении характеристик поля в каждой точке рассматриваемой части пространства, где поле существует.

Для исследования электромагнитного поля применяются законы электротехники, которые могут быть представлены в двух формах записи:

интегральной и дифференциальной. Интегральная форма записи законов электротехники применяется для конечных контуров, площадей, объемов проводящих сред и диэлектриков.

В интегральной форме записи эти законы имеют вид:

- Закон Ома $$i = \frac{u}{R}.$$
- Закон Джоуля-Ленца $$Q = \int i^2 R\,dt.$$
- Первый закон Кирхгофа $$\sum i_k = 0.$$
- Второй закон Кирхгофа $$\sum u_k = 0.$$
- Закон электромагнитной индукции $$\oint_l \overline{E} \cdot d\overline{l} = -\oint_S \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} \cdot d\overline{S}$$
- Закон полного тока $$\oint_l \overline{H} \cdot d\overline{l} = \oint_S \overline{J} \cdot d\overline{S}.$$
- Теорема Гаусса $$\oint_S \overline{D} \cdot d\overline{S} = \sum q.$$

Дифференциальная форма записи законов электротехники применяется для определения характеристик электромагнитного поля:

- Закон Ома $$\overline{J}_{np} = \gamma \overline{E}.$$
- Закон Джоуля - Ленца $$\frac{dp}{dv} = \gamma E^2.$$
- Первый закон Кирхгофа $$div\,\overline{J} = 0.$$
- Второй закон Кирхгофа $$rot\,\overline{E} = 0.$$
- Закон полного тока $$rot\,\overline{H} = \overline{J}.$$
- Закон электромагнитной индукции $$rot\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}.$$
- Теорема Гаусса $$div\,\overline{D} = \rho.$$

Приведенные уравнения законов электротехники являются инвариантными по отношению к любой выбранной (прямоугольной, цилиндрической или сферической) системе координат.

На основе законов электротехники составляется полная система уравнений Максвелла, с помощью которой в общем случае описываются все электромагнитные поля.

Полную систему уравнений Максвелла записывают в дифференциальной и интегральной форме.

Дифференциальная форма — Интегральная форма

$$rot\,\overline{H} = \overline{J}\,; \qquad \oint\limits_{l} \overline{H}\cdot d\overline{l} = \oint\limits_{S} \overline{J}\cdot d\overline{S}$$

$$rot\,\overline{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}\,; \qquad \oint\limits_{l} \overline{E}\cdot d\overline{l} = -\oint\limits_{S} \frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\cdot d\overline{S}$$

$$div\,\overline{D} = \rho\,; \qquad \oint\limits_{S} \overline{D}\cdot d\overline{S} = \sum q$$

$$div\,\overline{B} = 0\;; \qquad \oint\limits_{S} \overline{B}d\overline{S} = 0,$$

$$div\,\overline{J} = 0\;; \qquad \oint\limits_{S} \overline{J}d\overline{S} = 0,$$

$$\overline{B} = \mu\overline{H}\;; \quad \overline{D} = \varepsilon\overline{E}\;; \quad \overline{J} = \gamma\overline{E} + \frac{\partial\overline{D}}{\partial t} + \rho\cdot\overline{\upsilon}\;,$$

где $\overline{J} = \overline{J}_{пр} + \overline{J}_{см} + \overline{J}_{пер}$ - вектор плотности полного тока, имеющая три составляющих: $\overline{J}_{пр} = \gamma\,\overline{E}$ - вектор плотности тока проводимости; $\overline{J}_{см} = d\overline{D}/dt$ - вектор плотности тока смещения; $\overline{J}_{пер} = p\vartheta$ - вектор плотности тока переноса; $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'$ - абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ $(Ф/м)$ – электрическая постоянная вакуума (воздуха), $\varepsilon'$ - относительная диэлектрическая проницаемость среды; $\mu = \mu_0 \cdot \mu'$ - абсолютная магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\cdot\pi\cdot 10^{-7}$ $(Гн/м)$ - магнитная постоянная вакуума (воздуха).

Эти уравнения являются исходными при изучении теории электромагнитного поля.

Если свойства среды, определяемые коэффициентами $\varepsilon, \mu, \gamma$, неизменны, то все записанные уравнения будут линейными. Этому условию соответствует принцип суперпозиции, согласно которому поле, образованное несколькими источниками, представляет собой сумму полей каждого из источников, существующих в тех же условиях отдельно.

При изучении электромагнитных полей различных типов стараются ввести понятие потенциальной функции $\varphi$ (потенциала) поля, которая является скалярной характеристикой векторного поля, например, под потенциалом электростатического поля понимается скалярная энергетическая характеристика, характеризующая потенциальную энергию поля, которой обладает единичный заряд, помещённый в данную точку поля.

Для потенциала также выполняется принцип суперпозиции (наложения): результирующий потенциал системы источников поля складывается из потенциалов отдельных источников.

Электромагнитные поля разбиваются на классы. Простейшими являются неизменные во времени поля – статические (электростатические и магнитостатические), а также стационарные переменные поля, изменяющиеся во времени по синусоидальному закону.

*Для электростатических полей,* обусловленных действием неподвижных электрических зарядов, справедливы уравнения:

$$rot\,\overline{E} = 0,$$

$$div\,\overline{D} = 0,$$

$$\overline{D} = \varepsilon\,\overline{E}\ .$$

Потенциальная функция $\varphi$ связана с напряженностью поля $\overline{E}$ соотношением:

$$\overline{E} = -\,grad\,\varphi\,.$$

В декартовой системе координат

$$grad\,\varphi = \bar{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ .$$

В цилиндрической системе координат

$$grad\,\varphi = \bar{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \bar{j}\,\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \bar{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

В однородной среде $(\varepsilon' = const)$ для потенциала справедливо *уравнение Пуассона*

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon'}$$

и в частности, где отсутствуют свободные заряды $(\rho = 0)$, *уравнение Лапласа*

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Уравнение Пуассона в декартовой системе координат:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon'} .$$

Уравнение Пуассона в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon'}.$$

Для нахождения потенциала $\varphi$ в уравнениях Лапласа и Пуассона следует задаться граничными условиями.

Граничные условия определяют поведение векторов поля (нормальных и тангенциальных составляющих) на границе раздела двух сред, параметры которых меняются скачком.

Для всех электрических полей имеют место основные граничные условия, которые являются прямым следствием системы уравнений Максвелла.

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2};$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma,$$

где $\tau$ означает тангенциальную составляющую проекции вектора к границе раздела двух сред, а $n$ - нормальную составляющую. При этом предполагается, что нормаль к поверхности раздела двух сред $\overline{n}$ направлена из первой среды во вторую. Символом $\sigma$ обозначают поверхностную плотность свободных зарядов, имеющую размерность $\left(Кл / м^2\right)$, такую же, что у вектора плотности электрического смещения $\overline{D}$.

Если на границе раздела двух диэлектриков плотность свободного поверхностного заряда $\sigma = 0$, то выполняется условие

$$D_{n1} = D_{n2} \quad \text{или} \quad \varepsilon_1 \cdot E_{n1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n2}.$$

В диэлектрике кроме векторов $\overline{D}$ и $\overline{E}$ рассматривают вектор поляризации вещества $\overline{P}$, который связан с основными векторами поля выражением

$$\overline{P} = \overline{D} - \varepsilon_0 \cdot \overline{E} \text{ или } \overline{P} = \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon' - 1) \cdot \overline{E} = \varepsilon_0 \cdot k \cdot \overline{E},$$

где $k$ - диэлектрическая восприимчивость вещества.

На границе раздела двух диэлектриков возникает связанный электрический заряд. Поверхностная плотность $\sigma_{связ}$ связанного заряда определяется выражением

$$\overline{P}_{n1} - \overline{P}_{n2} = \sigma_{связ}.$$

На поверхности проводящего тела вектор электрического смещения $\overline{D}$ изменяется скачком на величину поверхностной плотности свободного заряда в данной точке, а направление вектора совпадает с направлением внешней нормали к поверхности проводника $\overline{n}$.

Поле внутри проводника равно нулю $(\overline{D} = 0,\ \overline{E} = 0)$.

На поверхности проводника выполняются граничные условия

$$E_{\tau 2} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{D} = \overline{D}_{n1} = \sigma.$$

*Граничным условием Неймана* называется условие

$$\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1' \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \sigma.$$

Поверхность проводника $S$ является эквипотенциальной поверхностью. На поверхности проводника выполняется *граничное условие Дирихле*

$$\varphi_S = const.$$

Энергия системы заряженных тел определяется выражением

$$W_Э = \frac{1}{2}\int_v \overline{E} \cdot \overline{D}\, d\, v.$$

Емкость системы заряженных тел с зарядами $\pm q$ и напряжением между ними $U$ есть

$$C = 2W_Э \big/ U^2.$$

Силу, действующую на заряженное тело, можно найти, пользуясь одним из выражений

$$F_Э = -\left(dW_Э / dg\right)\big|_{q=const}, \qquad F_Э = \left(dW_Э / dg\right)\big|_{U=const},$$

где $g$ - обобщенная координата, по которой может перемещаться тело под действием силы.

*Электрическое поле постоянных токов в проводящей* среде описывается системой уравнений:

$$rot\,\overline{E} = 0,$$

$$div\,\overline{J}_{np} = 0\ ,$$

$$\overline{J}_{np} = \gamma\,\overline{E}.$$

Электрическое поле постоянного тока является потенциальным и может быть определено потенциальной функцией

$$\overline{E} = -\,grad\,\varphi\,.$$

В однородной проводящей среде электропроводностью $\gamma = const$ $div\,\overline{J}_{np} = div\left(\gamma \cdot \overline{E}\right) = 0$, отсюда $div\,\overline{E} = 0$, следовательно, потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа.

На границе раздела двух проводящих сред выполняются условия

$$J_{n1} = J_{n2}$$

или для напряженности электрического поля

$$\gamma_1 \cdot E_{n1} = \gamma_2 \cdot E_{n2},$$

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}.$$

*Магнитное поле постоянных токов* удовлетворят системе уравнений

$$rot\,\overline{H} = \overline{J}_{np} = \overline{J},$$

$$\overline{B} = \mu\overline{H},$$

$$div\overline{B} = 0.$$

В части пространства, где нет тока $(\,rot\,\overline{H} = 0\,)$, можно использовать скалярный магнитный потенциал

$$\overline{H} = -\,grad\,\varphi_M\,.$$

Использование векторного магнитного потенциала $\overline{A} = \overline{i} \cdot A_x + \overline{j} \cdot A_y + \overline{k} \cdot A_z$ соотношением $\overline{B} = rot\,\overline{A}$ приводит к уравнению $rot\,(\,rot\,\overline{A}\,) = \mu \cdot \overline{J}$, которое в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu$ в прямоугольной системе координат удовлетворяет *уравнению Пуассона*:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu J,$$

где $A = A_x, A_y, A_z,\ J = J_x, J_y, J_z$.

Магнитный поток связан с векторным магнитным потенциалом соотношением

$$\varPhi = \int_l \bar{A}\, d\bar{l}\,.$$

Выражение

$$W_M = \frac{1}{2}\int_v \bar{J}\,\bar{A}\,dv$$

позволяет найти энергию магнитного поля токов плотностью $\bar{J}$, протекающих в объеме $v$. При этом индуктивность проводников с током i определяется выражением

$$L = 2W_M \big/ i^2\,.$$

Электромагнитная сила определяется по одному из выражений

$$F_{ЭМ} = -\left.\frac{dW_M}{dg}\right|_{\psi=const}, \quad F_{ЭМ} = \left.\frac{dW_M}{dg}\right|_{i=const}.$$

Электромагнитная сила, действующая на уединенный контур с током $i$, определяется выражением

$$F_{ЭМ} = \frac{i^2}{2}\left(\frac{dL}{dg}\right).$$

На границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями $\mu_1$ и $\mu_2$ выполняется условие:

$$B_{n1} = B_{n2}$$

или для напряженности магнитного поля

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2}, \quad H_{\tau 1} = H\tau_2,$$

где $H_{\tau 1}$ и $H_{\tau 2}$ - касательные составляющие вектора $\bar{H}$; $B_{n1}$ и $B_{n2}$– нормальные составляющие вектора магнитной индукции $\bar{B}$ в точках, примыкающих к границе в одном месте, но с разных сторон.

*Задача расчета магнитного поля* переменных синусоидальных токов состоит в расчете магнитного и электрического поля в линейной и нелинейной (ферромагнитной) среде с учетом вихревых токов (поверхностный эффект) и формулируется как дифференциальное уравнение в частных производных относительно комплексной амплитуды векторного магнитного потенциала:

$$\frac{1}{\mu}\cdot\nabla^2\dot{\bar{A}}_m - j\cdot\omega\cdot\gamma\cdot\dot{\bar{A}}_m = -\dot{\bar{J}}_{m\,стор},$$

где $\dot{\bar{J}}_{m\,вихр} = j\omega\gamma\dot{\bar{A}}_m$ - плотность вихревого тока, индуцированного переменным магнитным полем в проводящей среде, имеющей электропроводность $\gamma$; $\omega = 2\cdot\pi\cdot f$ - угловая частота; $f$ - частота синусоидального тока; $\dot{\bar{J}}_{m\,стор}$ - комплексная амплитуда плотности стороннего тока, вызванного приложенным извне напряжением.

## 1.2. ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Расчеты электрического и магнитного полей представляют собой разновидности решения краевой задачи, которая формулируется как уравнение Лапласа и Пуассона в исследуемом пространстве, состоящем из кусочно-однородных областей, характеризующихся постоянными параметрами среды $(\varepsilon, \mu, \gamma = const)$. Уравнение Лапласа и Пуассона в этих кусочно-однородных областях является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка.

В общем случае уравнение Лапласа и Пуассона может иметь бесчисленное множество решений.

*Теорема единственности решения краевой задачи* показывает, что единственное решение уравнения Лапласа и Пуассона получается, если на границе области, в которой рассматривается это уравнение, заданы граничные условия:

- первого рода (*задача Дирихле*), когда на границе области считается известной искомая функция;
- второго рода (*задача Неймана*), когда на границе области считается известной нормальная производная искомой функции;
- третьего рода – смешанные граничные условия, когда на границе расчетной области считается известной искомая функция, а на других границах ее нормальная производная.

Современная математика располагает многими аналитическими и численными методами решения краевых задач, а современное математическое обеспечение персональных компьютеров содержит в своем составе «решатели» краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона.

## 1.3 ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Метод конечных элементов* основан на аппроксимации искомой непрерывной функции (электрического потенциала, векторного магнитного потенциала и др.) дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых конечными элементами (КЭ). В качестве функции конечного элемента используют полином.

*Основные положения метода конечных элементов* удобно рассмотреть на решении двумерных краевых задач, которые делятся на плоскопараллельные и осесимметричные.

*Плоскопараллельные краевые задачи* используют декартову систему координат $xyz$, причем предполагается, что геометрия расчетных областей, свойства сред и параметры, характеризующие источники поля неизменны в направлении оси $z$. Вследствие этого описание геометрии электротехнического устройства, задание свойств, граничных условий и источников поля можно проводить плоскости $xy$, называемой плоскостью модели.

*Осесимметричные задачи* решаются в цилиндрической системе координат $zr\theta$. Порядок следования осей выбирается для общности с плоскопараллельными задачами. Физические свойства и источники поля предполагаются не зависящими от угловой координаты. Работа с моделью проводится в плоскости $zr$.

Применение метода конечных элементов начинается с разбиения области моделирования $S$ на конечные элементы, причем их число, размеры и расположение произвольны. Конечные элементы могут представлять собой треугольники. Стороны треугольников должны совпадать с границами раздела сред с различными свойствами.

Если воспользоваться примером плоскопараллельной задачи расчета магнитного поля постоянного тока методом конечных элементов, то внутри каждого элемента векторный магнитный потенциал $\overline{A} = \overline{k}A_z(x.y)$ можно представить в виде интерполяционного полинома первой степени

$$A = A_z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y.$$

Конечный элемент, внутри которого функция $A$ представлена интерполяционным полиномом первой степени, называется двумерный симплекс-элемент (рис. 1.1). Это треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами, по одному в каждой вершине. В треугольнике, как правило, используется последовательная нумерация узлов против часовой стрелки, начиная от некоторого узла с номером $i$, который выбирается произвольно. Узловые значения искомой величины $A$ обозначаются через $A_i, A_j$ и $A_k$, а координаты трех узлов соответственно есть $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j), (X_k, Y_k)$.

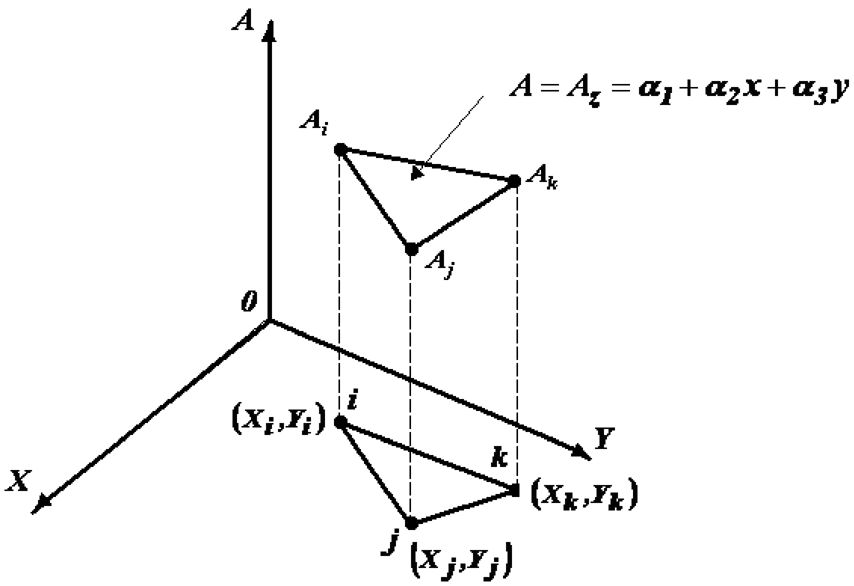



Рис. 1.1. Двумерный симплекс - элемент

В узлах конечного элемента выполняются следующие условия:

$$A = A_i \quad \text{при } x = X_i, \; y = Y_i,$$

$$A = A_j \quad \text{при } x = X_j, \; y = Y_j,$$

$$A = A_k \quad \text{при } x = X_k, \; y = Y_k.$$

Подстановка этих условий в интерполяционный полином приводит к системе уравнений

$$A_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i + \alpha_3 Y_i,$$

$$A_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j + \alpha_3 Y_j,$$

$$A_k = \alpha_1 + \alpha_2 X_k + \alpha_3 Y_k.$$

В результате решения системы уравнений можно определить коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{1}{2S_\alpha} \cdot \left[\left(X_j Y_k - X_k Y_j\right) A_i + \left(X_k Y_i - X_i Y_k\right) A_j + \left(X_i Y_j - X_j Y_i\right) A_k\right],$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2S_\alpha} \cdot \left[\left(Y_j - Y_k\right) A_i + \left(Y_k - Y_i\right) A_j + \left(Y_i - Y_j\right) A_k\right],$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2S_\alpha} \cdot \left[\left(X_k - X_j\right) A_i + \left(X_i - X_k\right) A_j + \left(X_j - X_i\right) A_k\right].$$

Определитель системы связан с площадью треугольника $S_\alpha$ соотношением

$$\begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = 2S_\alpha .$$

Подставляя значения $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$ в интерполяционный полином, можно записать выражение для функции $A$ через три функции формы, по одной для каждого узла

$$A = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k .$$

В матричном виде

$$A = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{Bmatrix} = \left[N_\beta\right] \cdot \left\{A_\beta\right\}$$

где $\beta = i.j,k$ – номера узлов (вершин) треугольника.

Для каждого узла функция формы (пробная функция) выглядит следующим образом:

$$N_i = \frac{1}{2S_\alpha}\left(a_i + b_i x + c_i y\right), \quad \begin{Bmatrix} a_i = X_j Y_k - X_k Y_j, \\ b_i = Y_j - Y_k, \\ c_i = X_k - X_j; \end{Bmatrix}$$

$$N_j = \frac{1}{2S_\alpha}\left(a_j + b_j x + c_j y\right), \quad \begin{Bmatrix} a_j = X_k Y_i - Y_k X_i, \\ b_j = Y_k - Y_i, \\ c_j = X_j - X_i; \end{Bmatrix}$$

$$N_k = \frac{1}{2S_\alpha}\left(a_k + b_k x + c_k y\right), \quad \begin{Bmatrix} a_k = X_i Y_j - X_j Y_i, \\ b_k = Y_i - Y_j, \\ c_k = X_j - X_i. \end{Bmatrix}$$

Значение функции формы $N_i$ в узле с номером $i$:

$$N_i = \frac{1}{2S_\alpha}\left(a_i + b_i x + c_i y\right) = \frac{1}{2S_\Delta}\left(X_j Y_k - X_k Y_j + Y_j X_i - Y_k X_i + X_k Y_i - X_j Y_i\right)$$

Выражение в скобках представляет собой величину определителя системы уравнений относительно $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $\alpha_3$, поэтому в узле с номером $i$

$$N_i = \frac{1}{2S_\alpha}\left(2S_\alpha\right) = 1.$$

Можно доказать, что $N_i$ равно нулю в узлах с номерами $j$ и $k$, так же как и во всех точках прямой, проведенной через эти узлы.

Величина $A$ определяется внутри конечного элемента функциями формы, линейными по $x$ и $y$, поэтому градиенты этой величины в направлениях $x$ и $y$ будут постоянны. Например, градиент в направлении $x$ определяется соотношением

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} A_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} A_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} A_k.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial N_\beta}{\partial x} = b_\beta, \qquad \beta = i, j, k,$$

можно записать

$$\frac{\partial A}{\partial x} = b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k.$$

В этом выражении коэффициенты $b_i$, $b_j$, $b_k$ являются постоянными (они фиксированы, если заданы узловые координаты). Узловые значения искомой функции $A = A_i, A_j, A_k$ также не зависят от пространственных координат, поэтому частная производная на конечном элементе имеет постоянное значение.

Постоянство градиента внутри каждого элемента означает, что необходимо использовать очень малые по величине конечные элементы, чтобы аппроксимировать быстро меняющуюся функцию $A$.

Решение краевых задач теории поля методом конечных элементов производится на основе вариационного исчисления. С вариационной точки зрения решение дифференциального уравнения в частных производных с заданными граничными условиями эквивалентно нахождению минимума функционала, составленному из энергетических соотношений поля.

Для плоскопараллельного магнитного поля постоянного задача решение уравнения Пуассона относительно векторного магнитного потенциала $A$ в методе конечных элементов можно заменить задачей определения функции $A$, доставляющей минимум функционалу вида:

$$F = \int\limits_S \left( \int\limits_0^{B_x} \frac{1}{\mu} B_x dB_x + \int\limits_0^{B_y} \frac{1}{\mu} B_y dB_y \right) \cdot dS - \int\limits_S AJdS,$$

где $B_x = \dfrac{\partial A}{\partial y}, B_y = -\dfrac{\partial A}{\partial x}$ - составляющие вектора магнитной индукции поля, распределенного в области $S$ по осям $x$ и $y$.

Записав условие минимума функционала, являющегося функцией значений $A_i, A_j, A_k$ на каждом конечном элементе, получим систему алгебраических уравнений для определения значений $A$ в вершинах (узлах) треугольников, которыми покрывается расчетная область $S$:

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \partial \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{F^{(\alpha)}}{\partial A_p} = 0, \quad p = 1,2,...,\vartheta,$$

где $F^{(\alpha)}$ - вклад треугольника $\alpha$ в общий функционал, $N$ - число треугольников (конечных элементов), $\vartheta$ - число неизвестных (вершин треугольников).

Для каждого треугольника можно получить выражения:

$$\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial A_i} = \int\limits_{S_\alpha} \left[ \frac{1}{\mu} \left( B_x \frac{\partial B_x}{\partial A_i} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial A_i} \right) - J \frac{\partial A}{\partial A_i} \right] \cdot dS_\alpha =$$

$$= \int\limits_{S_\alpha} \left\{ \frac{1}{\mu} \left[ \frac{c_i A_i + c_j A_j + c_k A_k}{2S_\alpha} \cdot \left( \frac{c_i}{2S_\alpha} \right) - \frac{b_i A_i + b_j A_j + b_k A_k}{2S_\alpha} \left( -\frac{b_i}{2S_\alpha} \right) \right] \right\} dS_\alpha -$$

$$- \int\limits_{S_\alpha} J \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2S_\alpha} dS_\alpha =$$

$$= \frac{1}{4\mu S_\alpha} \left[ \left( c_i^2 + b_i^2 \right) A_i + \left( c_i c_j + b_i b_j \right) A_j + \left( c_i c_k + b_i b_k \right) A_k \right] - J \frac{S_\alpha}{3} = 0.$$

Аналогичным образом определятся

$$\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial A_j}=\frac{1}{4\mu S_\alpha}\left[\left(c_ic_j+b_ib_j\right)A_i+\left(c_j^2+b_j^2\right)A_j+\left(c_jc_k+b_jb_k\right)A_k\right]-J\frac{S_\alpha}{3}=0,$$

$$\frac{\partial F^{(\alpha)}}{\partial A_k}=\frac{1}{4\mu S_\alpha}\left[\left(c_ic_k+b_ib_k\right)A_i+\left(c_jc_k+b_jb_k\right)A_j+\left(c_k^2+b_k^2\right)A_k\right]-J\frac{S_\alpha}{3}=0.$$

На основе полученных уравнений для каждого конечного элемента (треугольника) образуется система алгебраических уравнений, решение которой дает значения векторного магнитного потенциала $A$ в вершинах треугольников. Система алгебраических уравнений будет линейной, если в кусочно-однородных подобластях магнитная проницаемость среды принимается постоянной величиной, то есть задается $\mu = const$, в противном случае – система алгебраических уравнений является нелинейной.

Классическим методом решения системы линейных алгебраических уравнений является *метод Гаусса*. Это метод последовательного исключения неизвестных, когда с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к системе треугольного вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) неизвестных находятся все остальные.

Наиболее известным методом решения системы нелинейных алгебраических уравнений является *метод Ньютона*. Этот метод основан на принципах простой итерации. При этом решение системы нелинейных алгебраических уравнений заменяется последовательным решением системы линейных алгебраических уравнений на каждой итерации методом Гаусса.

В методе конечных элементов для решения краевой задачи расчета поля применяются также другие способы. Преимуществом этих способов является то, что отправной точкой для них служит непосредственно само дифференциальное уравнение, и кроме того они исключают необходимость вариационной формулировки физической задачи поиска функционала из энергетических соотношений. Среди способов наиболее известным является метод Галеркина. Этот метод предусматривает приближенное решение дифференциального уравнения, описывающее поле, распределенного области $S$. При этом должно выполняться следующее условие: разность между приближенным и точным решениями должна быть ортогональна функциям формы, используемым при аппроксимации.

Применение метода Галеркина в сочетании с методом конечных элементов, например, для расчета плоскопараллельного магнитного поля переменных синусоидальных токов приводит к уравнениям вида

$$\int\limits_{S_\alpha} \left[N_\beta\right]^T \cdot L\left(\dot{A}_m\right) dS_\alpha = 0, \quad \beta = i, j, k\,,$$

где $\left[N_\beta\right]^T = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}$ - транспонированная матрица функций формы;

$\dot{A}_m$ - искомая величина (комплексная амплитуда векторного магнитного потенциала, имеющая в плоскопараллельной задаче одну составляющую в направлении оси $z$), которая представлена соотношением

$$\dot{A}_m = N_i \dot{A}_i + N_j \dot{A}_j + N_k \dot{A}_k\ .$$

В подынтегральном выражении уравнение

$$L\left(\dot{A}_m\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \nabla^2 \dot{A}_m - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \dot{A}_m + \dot{J}_m стор = 0$$

является дифференциальным уравнением, определяющим значения искомой величины $\dot{A}_m$ в вершинах треугольника с номерами $i, j, k$.

Для плоскопараллельной задачи расчета магнитного поля переменных синусоидальных токов

$$L\left(\dot{A}_m\right) = \frac{1}{\mu} \cdot \left( \frac{\partial^2 \dot{A}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{A}_m}{\partial y^2} \right) - j \cdot \omega \cdot \gamma \cdot \dot{A}_m + \dot{J}_{m\,стор} = 0\,,$$

где $\dot{J}_{m\,стор}$ - комплексная амплитуда плотности сторонних токов, ориентированных в направлении оси $z$; $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

В результате интегрирования уравнений вида

$$\int\limits_{S_\alpha} \left[N_\beta\right]^T \cdot L\left(\dot{A}_m\right) dS_\alpha = 0, \quad \beta = i, j, k$$

на каждом конечном элементе $p = 1, 2, ..., \vartheta$ можно получить систему алгебраических уравнений для определения комплексных значений векторного магнитного потенциала во всех узлах (вершинах) $\vartheta$ треугольников, покрывающих расчетную область $S$.

Применение метода конечных элементов для задач электростатики и электрического поля постоянных токов в проводящей среде осуществляется аналогичным образом, но при этом искомой функцией является электрический потенциал $\varphi$, значения которого в вершинах треугольников подлежат определению решением системы алгебраических уравнений.

# 2. КОМПЛЕКС ПРОГРАММ *ELCUT* ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

## 2.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ РАБОТЫ В КОМПЛЕКСЕ ПРОГРАММ *ELCUT*

Пакет ELCUT - это мощный современный комплекс программ для инженерного моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач методом конечных элементов, позволяющий решать плоские (плоскопараллельные) и осесимметричные классы двумерных задач.

В комплексе использован принцип визуального программирования, в соответствии с которым пользователю не требуется записывать системы уравнений и программировать методы их решения, а достаточно лишь создать в графическом редакторе геометрическую модель рассматриваемого устройства, а также задать свойства и параметры решаемой задачи. В результате в десятки раз сокращаются временные затраты на решение полевых задач, а получаемые результаты являются достаточно точными и наглядными.

В плоскопараллельной постановке задачи используют обычно декартовую систему координат $xyz$, причем предполагается, что геометрия расчетных областей, свойства сред и параметры, характеризующие источники поля, неизменны в направлении оси $z$. Вследствие этого описание геометрии, задание свойств, граничных условий и источников, а также обработку результатов можно проводить в плоскости $xy$, называемой *плоскостью модели*. Принято, что ось $x$ направлена слева направо, а ось $y$ - снизу вверх. Вместо декартовой системы координат может быть использована и полярная система координат.

Осесимметричные задачи решаются в цилиндрической системе координат $zr\theta$, порядок следования осей выбран по аналогии с плоскопараллельными задачами. Физические свойства и источники поля предполагаются не зависящими от угловой координаты. Работа с моделью проводится в плоскости $zr$ (точнее в полуплоскости $r \geq 0$). Ось вращения $z$ направлена слева направо, ось $r$ - снизу вверх.

Для применения пакета *ELCUT* его нужно установить на персональный компьютер. Пакет *ELCUT* в студенческом варианте распространяется бесплатно. Его можно скачать на сайте производителя: *http://www.tor.ru/elcut/* .

После запуска программы *ELCUT* появляется окно (рис.2.1), в верхней части которого расположены главное меню и кнопки, позволяющие ускорить работу. В правой части окна находится справочная панель (панель с подсказками), которая сопровождает пользователя в течение всего времени работы с системой, автоматически вводя нужный раздел справки. При желании справочную панель можно закрыть, щелкнув по крестику расположенному в правом верхнем углу, однако на начальном этапе изучения пакета *ELCUT* этого не стоит делать: в подсказках всегда можно найти много полезной информации. Если справка выключена, то вернуть ее обратно можно с помощью клавиш ***Ctrl + F1***, или нажатием кнопки  на панели инструментов.

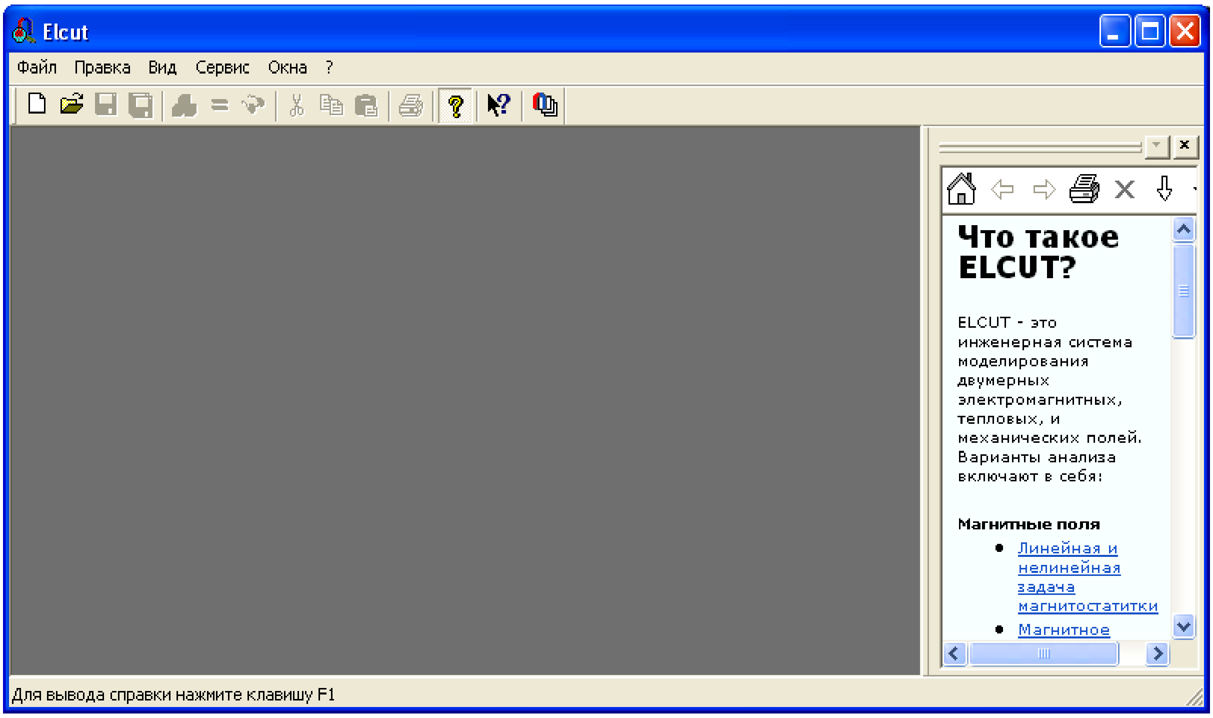



Рис. 2.1. Главное меню и кнопки программы ELCUT

С помощью меню пользователь может открывать и изменять содержимое различных документов, относящиеся к каждой конкретной задаче. Главное меню содержит подменю: **«Файл», «Правка», «Вид», «Сервис», «Окна», «Справка», «?»**. Каждое подменю имеет соответствующие пункты. Выбор пункта меню осуществляется с помощью мыши или «горячих» клавиш. Сочетание «горячих» клавиш и их назначение приводится в виде подсказки в меню.

Комплекс программ *ELCUT* позволяет решать двумерные краевые задачи по следующим темам:

- электростатическое поле (электростатика);
- электрическое поле переменных токов в неидеальном диэлектрике;
- растекание токов в проводящей среде;
- линейная и нелинейная магнитостатика;

- магнитное поле переменных токов (квазистатическая задача для фиксированной частоты источника поля);
- нестационарное магнитное поле.

*Обобщенная методика решения полевой задачи* сводится к нескольким последовательным шагам:

1) Выбор типа решаемой задачи (электростатика, магнитостатика и т.п.);
2) Выбор класса задачи (плоская или осесимметричная). Осесимметричная задача выбирается, если моделируемый объект является телом вращения (цилиндрическая заготовка, труба, соленоид и т.п.). При этом, решая задачу в двумерной постановке, решение фактически находится для трехмерной задачи;
3) Создание геометрической модели (своего рода чертежа объекта);
4) Задание свойств материалов (электропроводность, относительные диэлектрические и магнитные проницаемости и т.д.);
5) Задание нагрузок (значений или законов изменения во времени токов, намагничивающих сил, плотностей токов и.т.п.);
6) Задание граничных условий (значений потенциалов поля на границах расчетной области, тангенциальных (касательных) составляющих векторов напряженностей магнитного и электрического полей;
7) Построение сетки конечных элементов;
8) Решение задачи;
9) Обработка результатов решения (построение цветовых карт, графиков изменения переменной по какому-либо контуру, расчет интегральных характеристик поля и т.п.).

*Главное окно программы* (рис. 2.2) на этапе создания модели содержит заголовок с названием программы и именем файла модели, меню со списком команд для управления работой программы, панель инструментов (кнопки, соответствующие наиболее часто используемым командам меню). Ниже панели инструментов расположены два окна. В левом окне отображается структура задачи, а в правом геометрия решаемой задачи (после решения задачи в правом окне выводятся результаты расчета). В нижней части основного окна находится строка состояния, в которой отображаются сообщения программы.

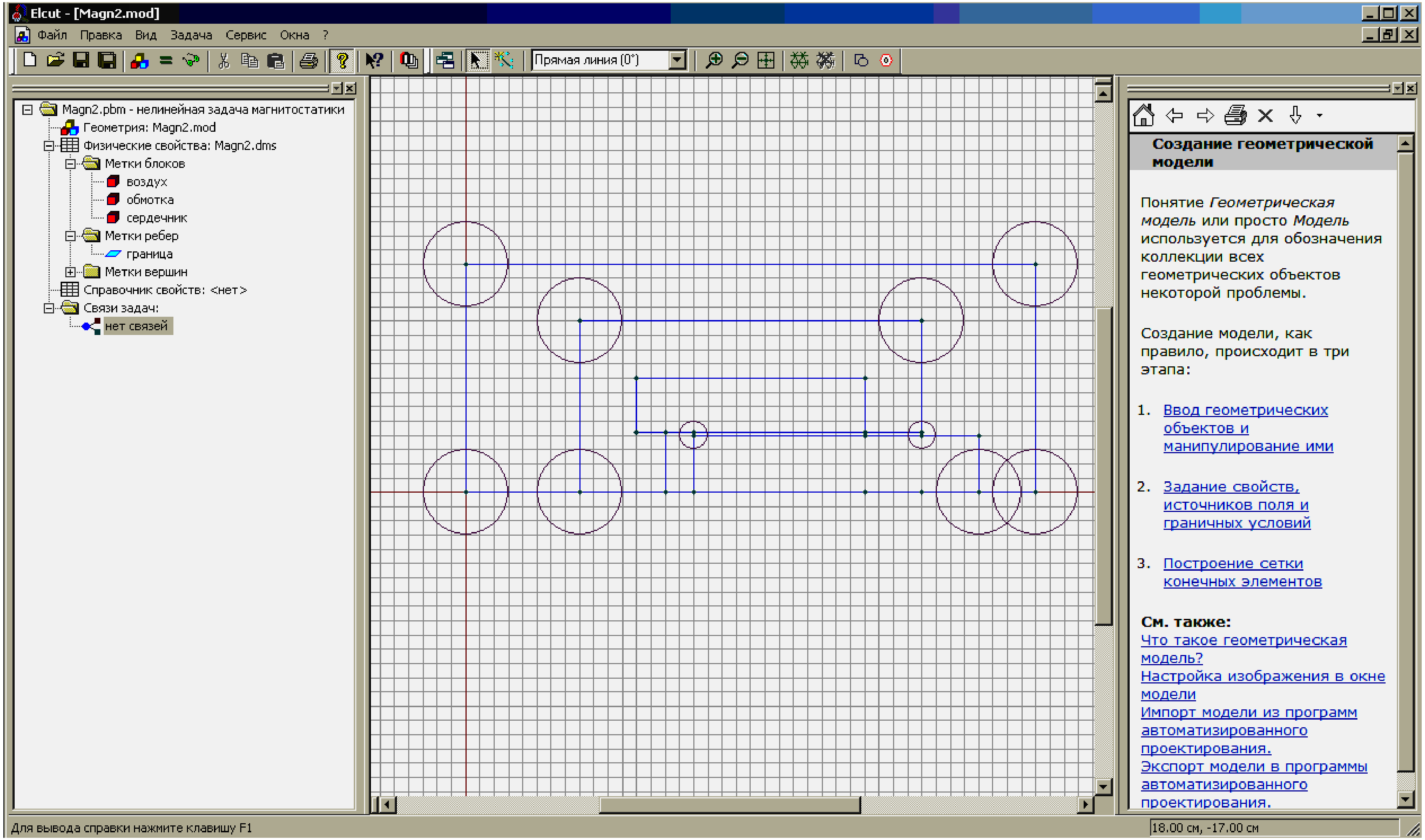



Рис. 2.2. Главное окно программы *ELCUT* на этапе создания модели

*Основные этапы для решения полевой задачи в ELCUT:*

1. Создание новой задачи «**Файл/Создать/Задача *ELCUT*»**;
2. Ввод параметров задачи «**Правка/Свойства»**;
3. Задание геометрии, меток объектов и построение сетки «**Правка/Геометрическая модель»;**
4. Ввод данных о материалах, нагрузках и граничных условиях «**Правка/Физические свойства»;**
5. Решение задачи «**Правка/Решение задачи»;**
6. Просмотр результатов и вычисление интегральных величин «**Правка/Анализ результатов».**

## 2.2. ПОШАГОВАЯ ИНСТРУКЦИЯ ОПИСАНИЯ НОВОЙ ЗАДАЧИ В КОМПЛЕКСЕ ПРОГРАММ *ELCUT* НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ МАГНИТОСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Для того чтобы решить задачу в пакете *ELCUT* ее следует описать в терминах понятных программе. Рассмотрим этот процесс на примере расчета магнитного поля электромагнита постоянного тока с втяжным якорем. Магнитная система электромагнита имеет осевую симметрию. Основными частями магнитной системы являются катушка, содержащая $w$ витков, обтекаемых током, неподвижный магнитопровод и якорь, втягивающийся внутрь катушки, и передающий электромагнитное усилие деталям рабочего механизма.

Геометрическая модель рассматриваемой задачи приведена на рис. 2.3.

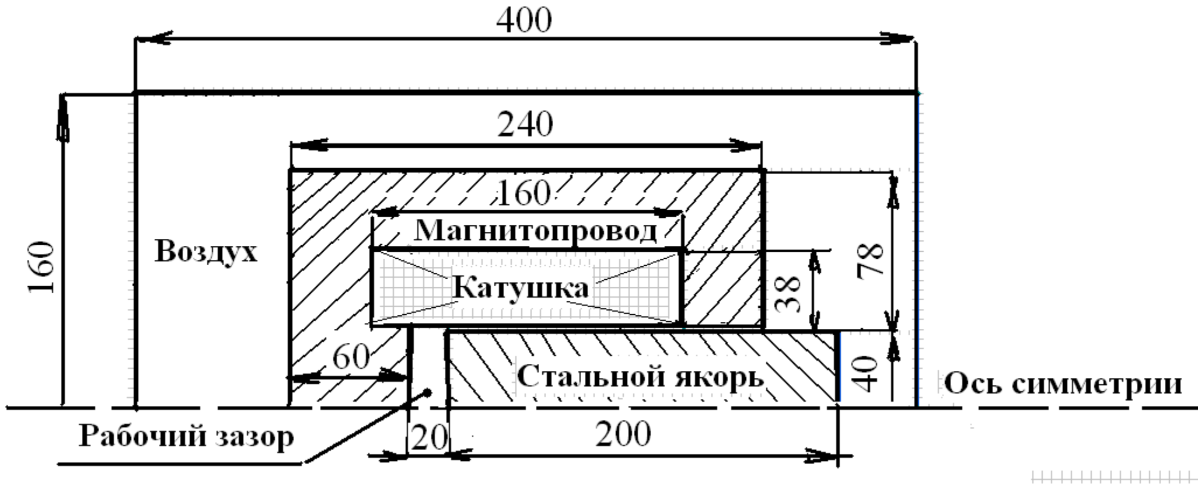



Рис. 2.3. Расчетная задача (все размеры электромагнита с втяжным якорем указаны в миллиметрах)

*Создание новой задачи* в пакете *ELCUT* сводится к следующим шагам:

1) Выберите команду «**Создать»** из меню файл. Появится окно для выбора типа документа *ELCUT*, который необходимо создать (рис. 2.4);

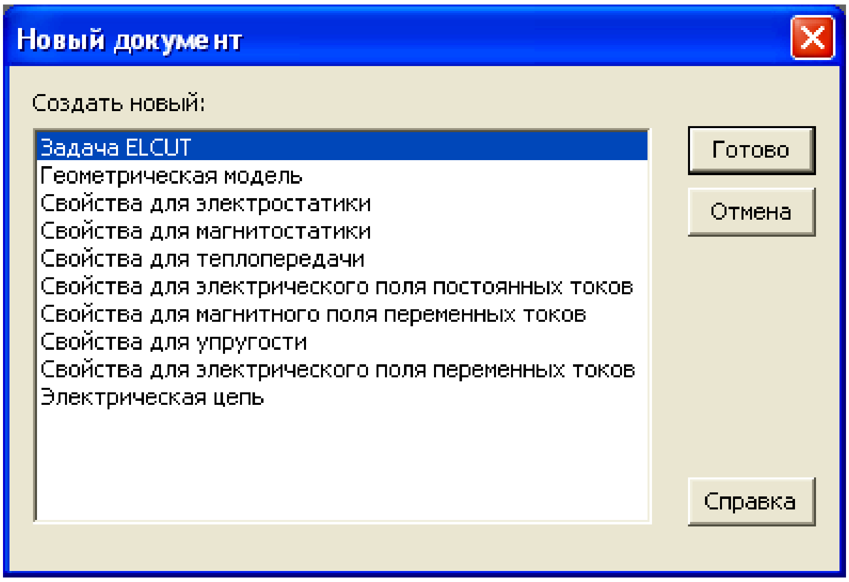



Рис. 2.4. Окно выбора документа *ELCUT*

2) Щелкните мышью строку «**задача *ELCUT*»** и затем нажмите **OK.** Появится новое окно, приглашающее ввести имя и расположение задачи (рис. 2.5). При необходимости можно перейти в нужную папку в поле «**Создать»** в папке или использовать кнопку «**Обзор…**»;

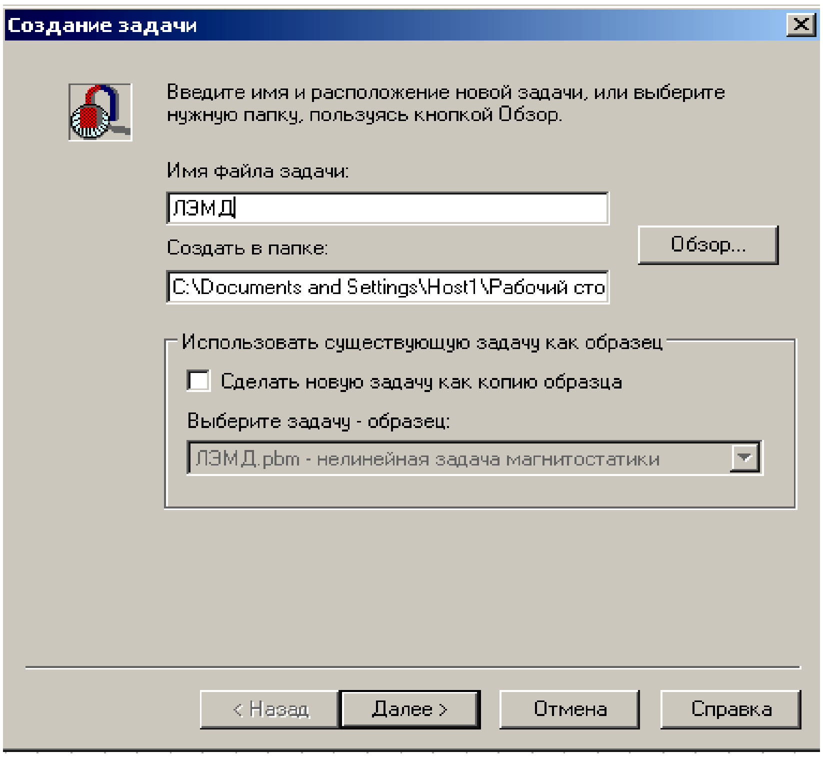


Рис. 2.5. Окно выбора расположения задачи

*3)* В поле «**Имя файла»** задачи введите имя файла (например, ЛЭМД);

*4)* После того, как место хранения новой задачи определено, щелкните указателем мыши по кнопке «**Далее».** Рекомендуется запомнить место расположения задачи.

*Выбор типа задачи и класса модели*

5) В новом окне «**Свойства задачи»** (рис.2.6), которое появится после создания задачи, в строке тип задачи выберите «**Магнитостатическое поле»**, класс модели – «**Осесимметричная**», расчет – «**Обычный».** Система *ELCUT* создаст имена файлов модели «**ЛЭМД.mod»** и физических свойств «**ЛЭМД.dms»**. Без необходимости не стоит менять предложенные системой имена файлов. Для продолжения диалога щелкните указателем мыши по кнопке **«Далее».**

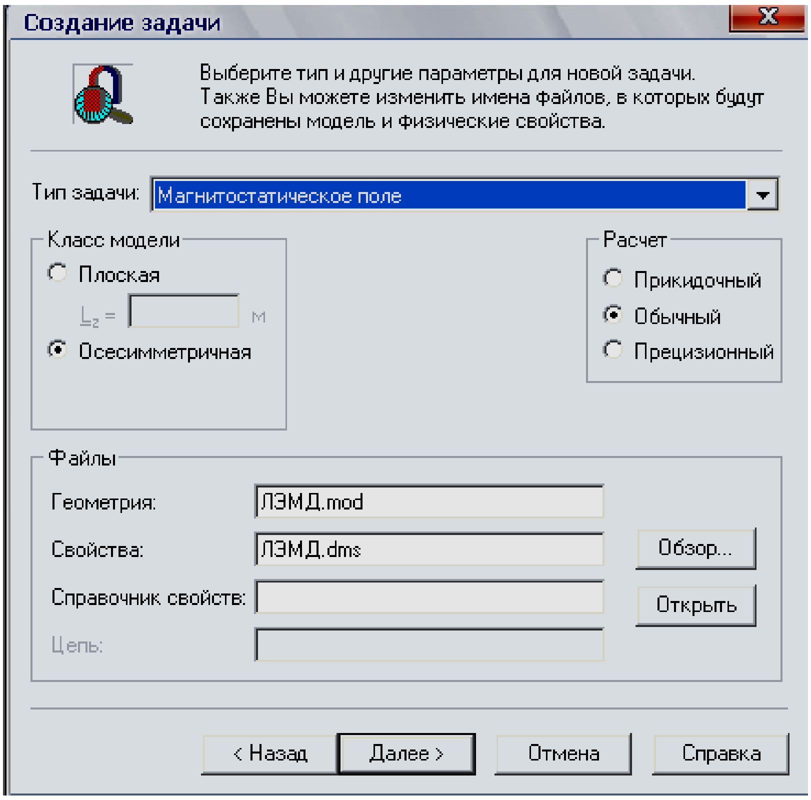



Рис.2.6. Окно описания задачи *ELCUT*

*Выбор единиц длины измерения и системы координат*

6) Окно **Координаты** содержит две группы кнопок: «**Единицы длины»** и «**Система координат»**. Пусть это будут «**Миллиметры»** и «**Декартовы координаты»** (рис. 2.7).

7) Щелчок по кнопке «**ОК»** означает завершение диалога;

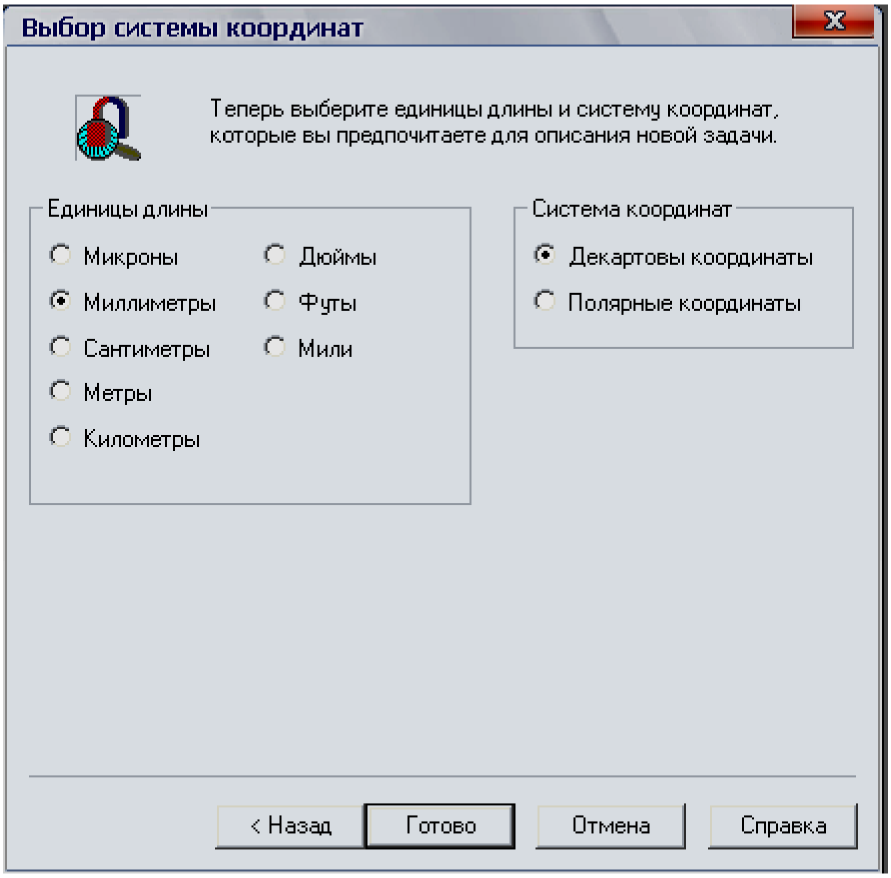



Рис. 2.7. Окно выбора единиц длины измерения и системы координат задачи *ELCUT*

*Начало работы с моделью*

8) Появляется окно с «деревом» задачи. По умолчанию оно располагается в левой части главного окна *ELCUT* (рис. 2.8). Рекомендуется сразу сохранить созданное описание новой задачи. Для этого нужно пройти меню **«Файл/Сохранить все файлы задачи»**. *ELCUT* запишет файл с расширением **pbm** в выбранное ранее место на диске или другом носителе.

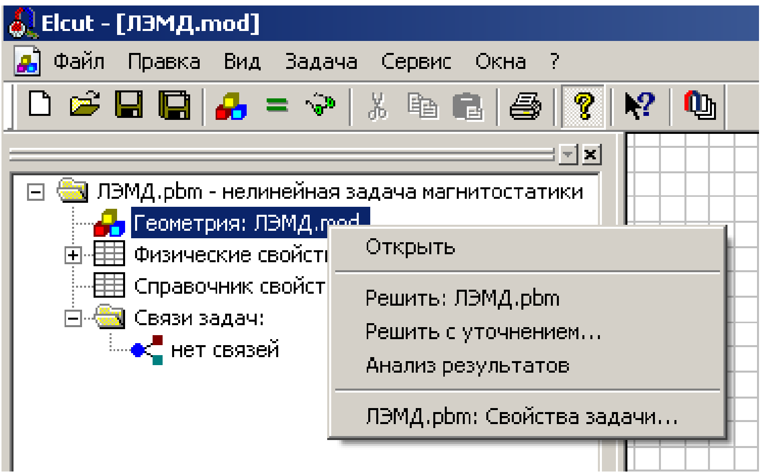



Рис. 2.8. Описание геометрии модели

9) Создание модели происходит в три этапа:

- ввод геометрических объектов и манипулирование ими;
- задание свойств, источников поля  и граничных условий;
- построение сетки конечных элементов.

*Ввод геометрических объектов модели электромагнита*

10) Для описания геометрии электромагнита необходимо правой кнопкой мыши щелкнуть по полю «**Геометрия**» в «дереве» задачи и в раскрывшемся меню выбрать «**Открыть».** Поскольку файла **«ЛЭМД.mod»** еще нет, то появится окно с соответствующим сообщением (рис.2.9). В данном случае следует щелкнуть по кнопке **ОК**. После чего откроется окно работы с моделью (рис. 2.10). Для удобства работы окно с моделью следует развернуть на весь экран.

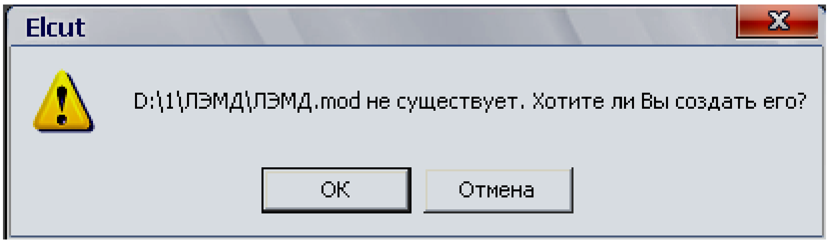



Рис. 2.9. Окно диалога

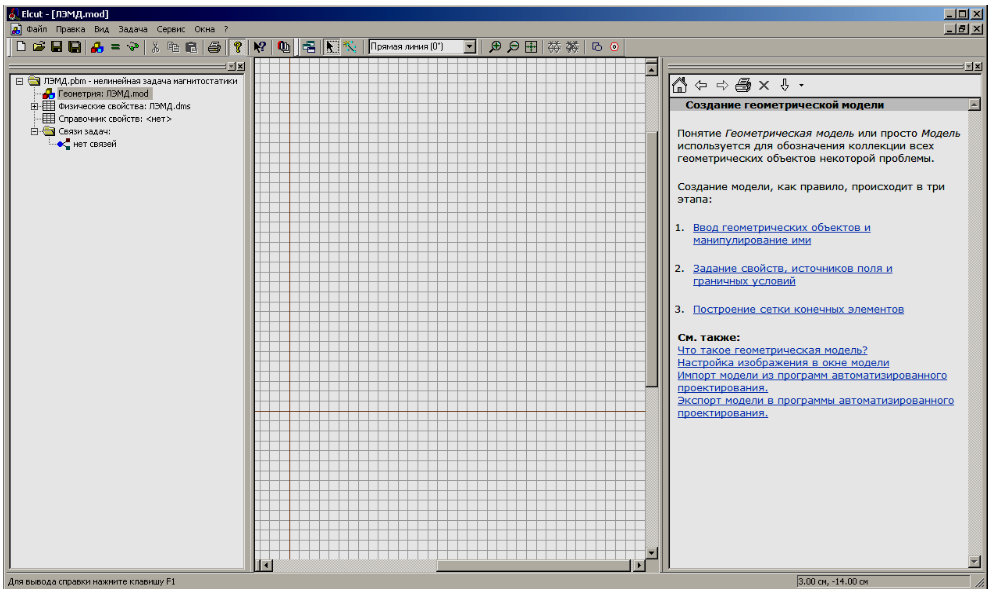
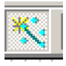
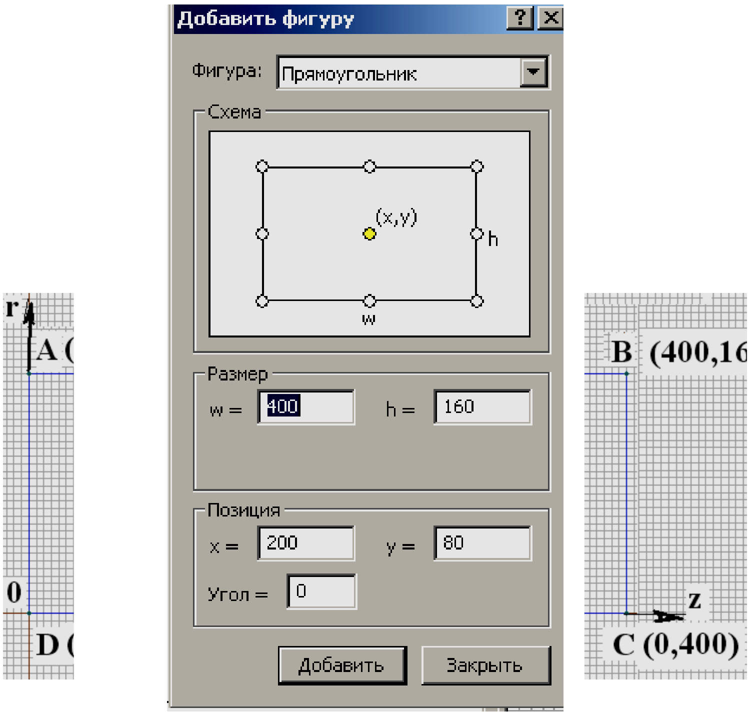



Рис.2.10. Меню и окно работы с моделью

11) Поскольку данная задача физически не ограничена, то магнитную систему электромагнита следует окружить слоем воздуха достаточной протяженности, чтобы исключить влияние границ. Ограничим расчетную область прямоугольником (рис. 2.3) ***ABCB*** с размерами $160 \times 400$ ***мм***, $0 \le r \le 160$ ***мм***, $0 \le z \le 400$ ***мм.***

12) Основными типами геометрических объектов модели в пакете *ELCUT* являются *вершина, ребро и блок*. *Вершиной* называется точка на плоскости, координаты которой могут быть введены пользователем вручную или вычислены как координаты пересечения пары рёбер. Р*ебро* представляет собой отрезок прямой или дугу окружности, соединяющие две вершины. *Блок* представляет собой связную подобласть плоскости модели, внешняя граница которой образована последовательностью рёбер.
13) Для создания ребер, образующих границы модели, необходимо выполнить следующие операции:
   - нажать на клавишу **INS (**или выполнить команду «**Режим вставки»** в меню «**Правка»** или команду **«Вставка вершин/ребер»** в контекстном меню, или нажать кнопку  на панели инструментов), чтобы перевести окно модели в режим вставки;
   - щелкнуть мышью в точке $(0,160)$ и перетащить ее в точку $(400,160)$, чтобы создать ребро $AB$ прямоугольника $ABCB$; Ребро $AB$ появится на экране сразу, как только отпустить кнопку мыши. То же самое можно проделать при построении других ребер $BC, CD, DA$ прямоугольника, окружающих модель.
14) Указанный в пункте 12 способ построения вершин хотя и прост, но требует кропотливого труда. Возможно, что проще будет другой способ. Построить прямоугольник (круг, или эллипс) можно воспользовавшись меню «**Правка/Добавить вершины»,** или нажать на кнопку . Появится окно (рис. 2.11 а), в котором следует выбрать вид фигуры, а потом указать ее координаты. Напомним, что единицы измерения были выбраны ранее указать В рассматриваемой задаче фигурой является прямоугольник, его размеры длина $w = 400\ мм$ и высота $h = 400\ мм$, координаты центра тяжести $x = 200мм, y = 80мм.$ После нажатия на клавишу **Добавить** в главном окне появляется прямоугольник с границами модели (рис. 2.11 б). Нажатием на клавишу **Закрыть** завершается операция добавления фигуры.
15) Аналогично пунктам 12 и 13 в главном окне производится описание всей геометрии электромагнита (рис. 2.2). При создании объектов модели в главном окне можно использовать **Сетку привязки**. Для этого щелкните правой кнопкой мыши по окну модели. В появившемся контекстном меню выберите пункт **Сетка привязки.** Сетка привязки

позволяет расположить элементы модели с необходимой точностью. Однако не следует стремиться сделать её излишне высокой. В рассматриваемой задаче приемлемая точность ***10 мм*** . Это значит, что размеры всех объектов, а так же расстояние между ними будет кратно ***10 мм*** . Для установки шага сетки в поле **По горизонтали** (рис.2.12) введите ***10 мм*** (при вводе не целого числа используется десятичная точка). Если флажок **Не квадратные ячейки** снят, то такое же значение появится в поле **По вертикали**. Отсчет координат ведется от точки, которая, по умолчанию, имеет координаты ***(0,0)***. Менять ее положение в данной задаче не имеет смысла, поэтому в окне **Позиция начальной точки** остается без изменения. Щелчок по кнопке **OK**, завершит диалог.




а)

б)

Рис. 2.11. Построение прямоугольника в главном окне: а - меню **«Правка/Добавить вершины»**; б – границы расчетной области.

16) Если в окне при построении модели случайно были созданы лишние рёбра или вершины, то их можно удалить. Для этого следует:

- удерживая клавишу **«CTRL»,** выделите щелчком мыши удаляемые объекты. Если выделили ненужный объект, щелкните его мышью еще раз, чтобы снять выделение. Отпустите клавишу **«CTRL»;**
- нажмите клавишу **«DEL»** (или выберите команду **«Удалить выделенное»** из меню **«Правка»** или контекстного меню). Удаляемые объекты сразу исчезнут с экрана.

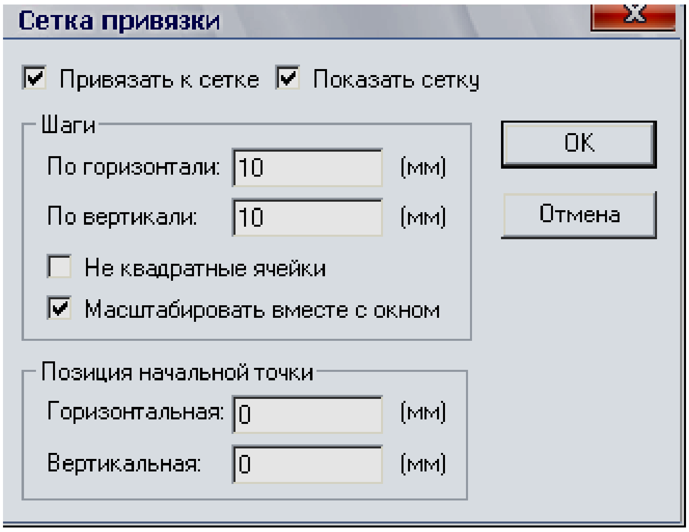



Рис. 2.12. Параметры сетки привязки

*Присвоение имен геометрическим объектам и задание их свойств*

17) После того как геометрия модели определена, требуется присвоить имена геометрическим объектам, или как принято говорить в *EL-CUT*, определить метки и присвоить их элементам модели. Метки необходимы для того, чтобы пользователь мог обращаться к конкретному элементу модели для описания свойств его материала, или описания источников поля, а также граничных условий. Кроме того, программа расчета поля использует метки при решении задачи. Длина метки, то есть имени, ограничена ***16*** символами.

18) В рассматриваемой задаче содержатся три материала с различными свойствами: воздух, сталь, проводник. Выберем мнемонические метки «**Воздух**», «**Сердечник**», «**Обмотка**». Для присвоения меток блокам проделайте следующее:

- щелкните мышью по блоку, заполненному воздухом, и затем, удерживая клавишу «**CTRL**», щелкните мышью по другим блокам, где также есть воздух, чтобы выделить имеющиеся блоки с воздухом одновременно (блоки станут выделенными заливкой красного цвета);
- щелкните правой кнопкой мыши в пределах выделенного, чтобы вывести контекстное меню, не изменяя выделения объектов;
- В контекстном меню выберите «**Свойства**», и присвойте метку «**Воздух**» выделенным объектам (рис.2.13);
- нажмите «**ОК**», чтобы завершить диалог.
- повторите эти действия для присвоения меток «**Сердечник**» и «**Обмотка**»;

- метки блоков, появившиеся в окне задачи, содержат вопросительный знак (рис. 2.14), который означает, что эти метки упомянуты в модели, но их свойства еще не определены.

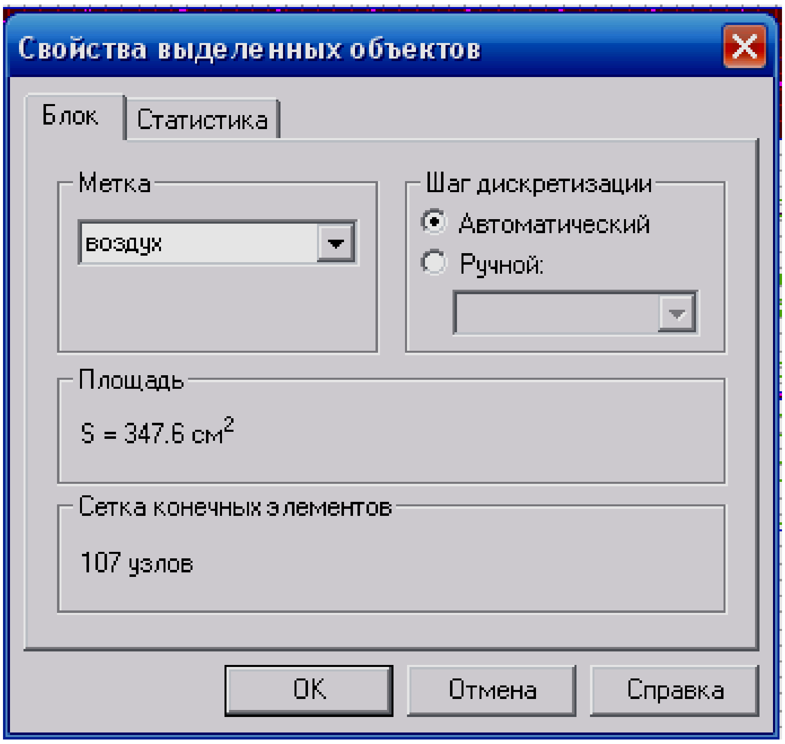



Рис. 2.13. Окно «**Свойства …**» на этапе присвоения меток блокам

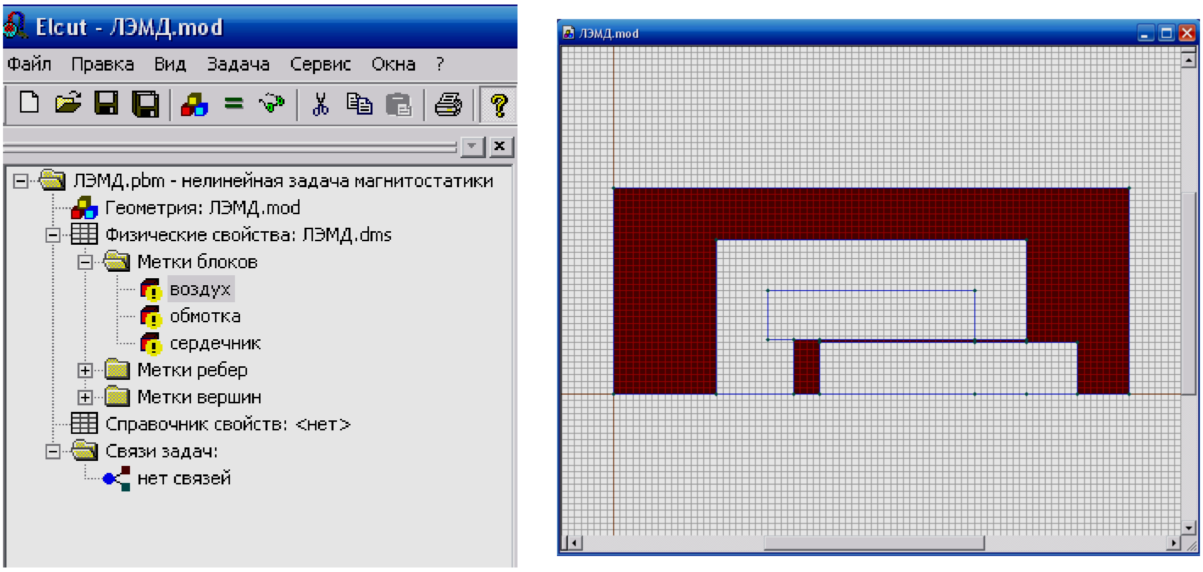



Рис. 2.14. Окно программы на этапе присвоения меток блокам

19) Для того, чтобы ввести свойства для метки «**Воздух**» дважды щелкнете по метке **Воздух**, или выберите ее свойства в контекстном меню.

Относительная магнитная проницаемость воздуха равна единице, поэтому введите *1* (единица) в любое поле «**Магнитная проницаемость»** (рис. 2.15). Отметьте флаг «**Относительная».** Нажмите «**ОК»,** чтобы завершить диалог.

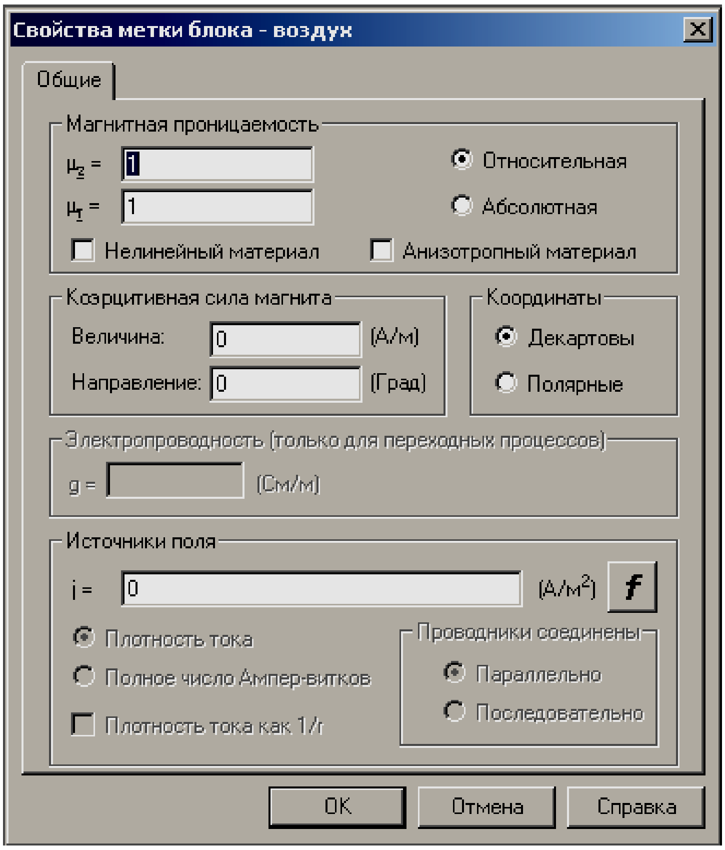



Рис. 2.15. Окно «**Свойства …**» блока «**Воздух»**

20) Редактирование данных для метки «**Сердечник»** начнем с задания основной кривой намагничивания ферромагнитного материала:

- дважды щелкните строку «**Сердечник»** или выберите «**Свойства»** в ее контекстном меню. Появится диалог ввода свойств;
- отметьте флаг «**Нелинейный материал»**, сразу откроется окно работы с основными кривыми намагничивания. Это окно позволяет вводить значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля точка за точкой, контролируя вид кривой на графике в левом окне (рис. 2.16). Точка ***(0;0)*** всегда присутствует в таблице и не может быть изменена или удалена.

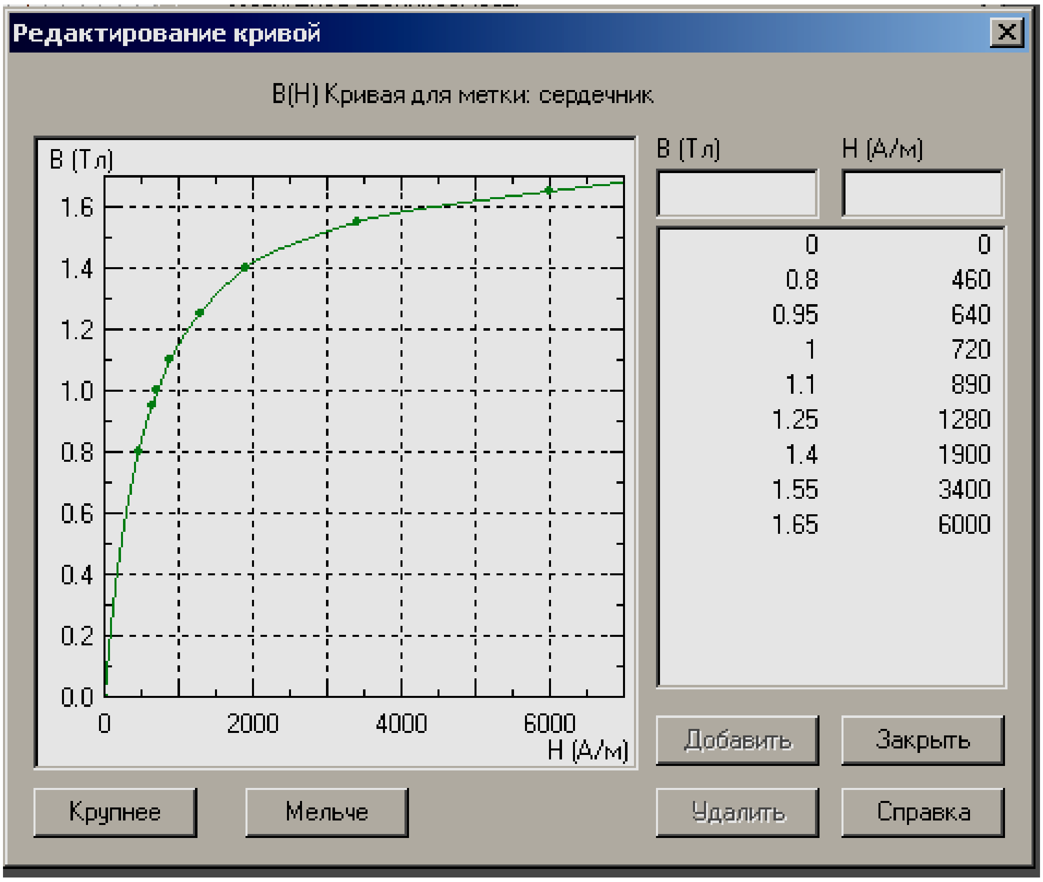



Рис. 2.16. Окно задания свойств нелинейных материалов

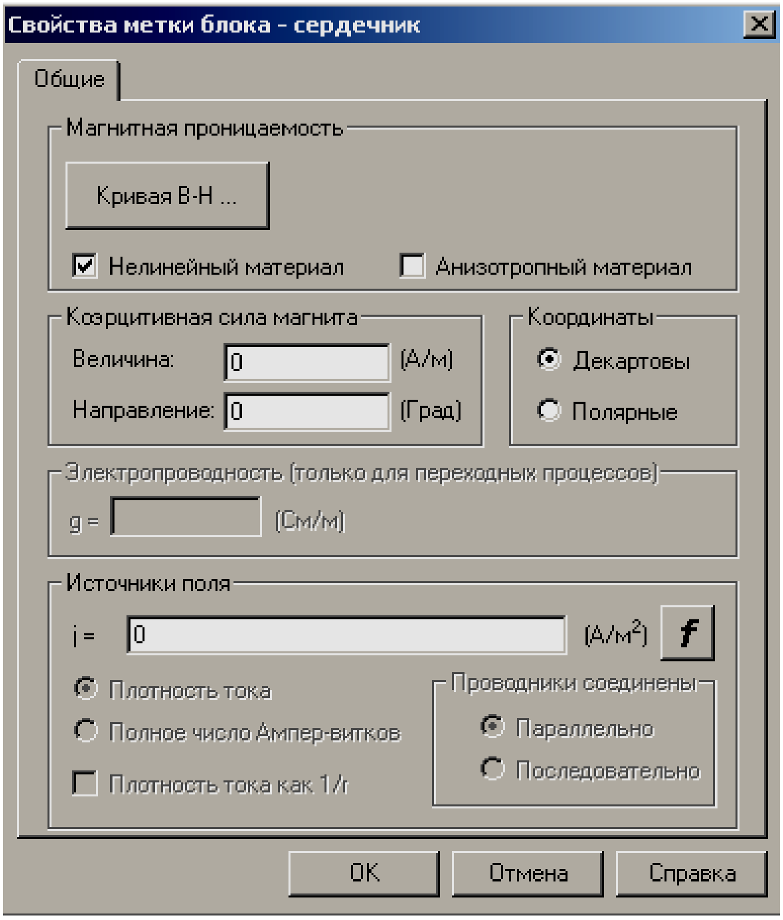



Рис. 2.17. Окно «**Свойства …**» блока «**Сердечник»**

21) После ввода точек основной кривой намагничивания $\boldsymbol{B = B(H)}$ (см. таблицу) нажмите на кнопку «**Закрыть». О**кно редактирования данных **«Сердечник»** показано на рис. 2.17. Нажмите «**ОК»**, чтобы завершить диалог.

Таблица

Кривая намагничивания для материала сердечника и якоря.
Сталь 49К2Ф (пермендюр)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B, Тл$ | 0 | 0,8 | 0,95 | 1,0 | 1,1 | 1,25 | 1,4 | 1,55 | 1.65 |
| $H, A/м$ | 0 | 460 | 640 | 720 | 890 | 1280 | 1900 | 3400 | 6000 |

22) Щелкнете по метке «**Обмотка»**, или выберите ее свойства в контекстном меню (рис. 2.18). Относительная магнитная проницаемость медного провода равна единице, поэтому введите ***1*** (единица) в любое поле «**Магнитная проницаемость»**. Отметьте флаг «**Относительная».**

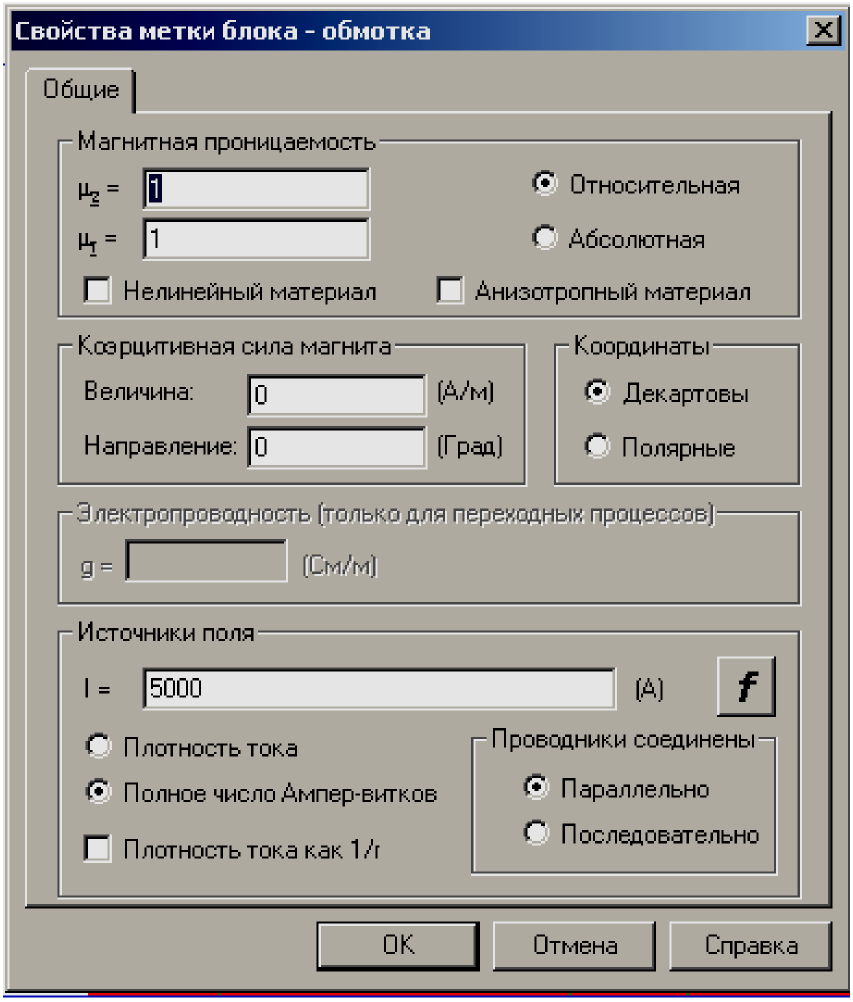



Рис. 2.18. Окно «**Свойства …**» блока «**Обмотка»**

23) Для задания «**Источников поля»** отметьте флаг **«Полное число Ампер-витков»** и введите в поле число $5000$ , это означает, что в примере задана магнитодвижущая сила обмотки $F = Iw = 5000A$. Если сделать отметку флагом **«Плотность тока»,** то в поле следует ввести плотность тока обмотки, которая связана с магнитодвижущей силой выражением

$$\boldsymbol{Iw = k_з \cdot S_{обм} \cdot J_{пр}}.$$

В примере заданы: $S_{обм} = 60{,}8 \cdot 10^{-4}\ м^2$ - площадь поперечного сечения катушечного окна, $k_з = 0{,}55$ - коэффициент заполнения катушечного окна медным проводом (зависит от вида намотки, толщины изоляции и диаметра обмоточного провода, изоляции между слоями и т.п.), $w = 500$ - число витков, $I = 10\ A$ - ток в обмотке. Из расчета находим плотность тока в обмотке $J_{пр} = 1{,}5 \cdot 10^6\ \dfrac{A}{м^2}$.

*Задание граничных условий*

24) Метки ребер используются для задания граничных условий на внутренних и внешних границах области. В рассматриваемой задаче следует задать нулевое граничное условие Дирихле на внешней границе области. Для присвоения меток ребрам:

- укажите мышью три ребра $\boldsymbol{DA, AB, BC}$ (рис. 2.11), удерживая нажатой клавишу «**CTRL».** Эти три ребра будут подсвечены. Если случайно была выделена лишняя вершина, ребро или блок, щелкните его еще раз, чтобы снять выделение;
- не меняя выделение объектов, щелкните правой кнопкой мыши, чтобы вывести контекстное меню «**Свойства…»** и присвойте метку **«Граница»** выделенным ребрам $\boldsymbol{DA, AB, BC}$ (рис. 2.19). В осесимметричной задаче ребро $\boldsymbol{DC}$ можно не выделять (присваивать ему метку), так как оно находится на оси вращения, где функция потока $\boldsymbol{\psi = rA = 0}$. Нажмите «**ОК»**, чтобы завершить диалог.

25) В рассматриваемой задаче значения индукции и напряженности магнитного поля за пределами расчетной области можно принять равными нулю. Для метки **«Граница»** ввод данных происходит следующим образом:

- выделите имя метки **«Граница»** в ветви **«Метки ребер»** и дважды щелкните ее мышью или выберите «**Свойства…»** в ее контекстном меню;

- включите флаг **«Магнитный потенциал».** В поле ввода будет предложено нулевое значение. Нажмите **«ОК».**

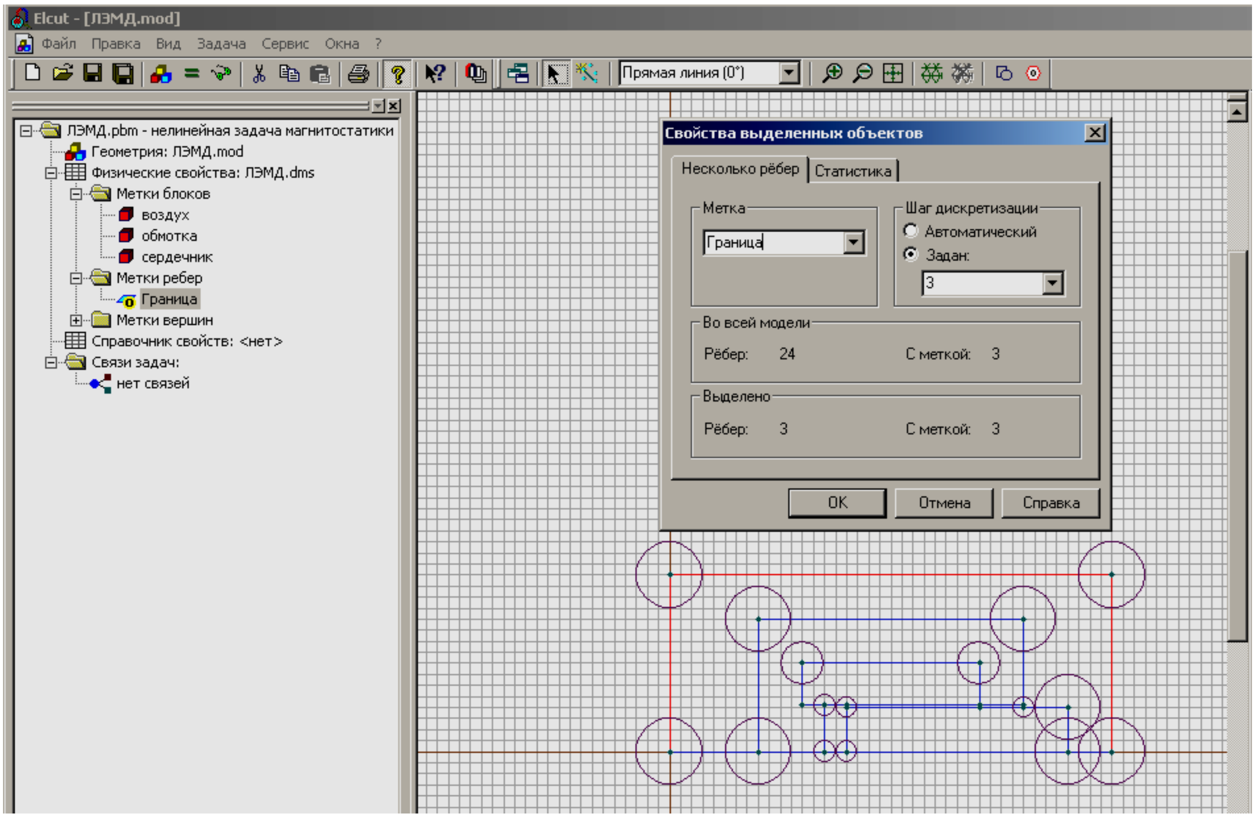



Рис. 2.19. Окно «**Свойства…**» на этапе присвоения меток ребрам

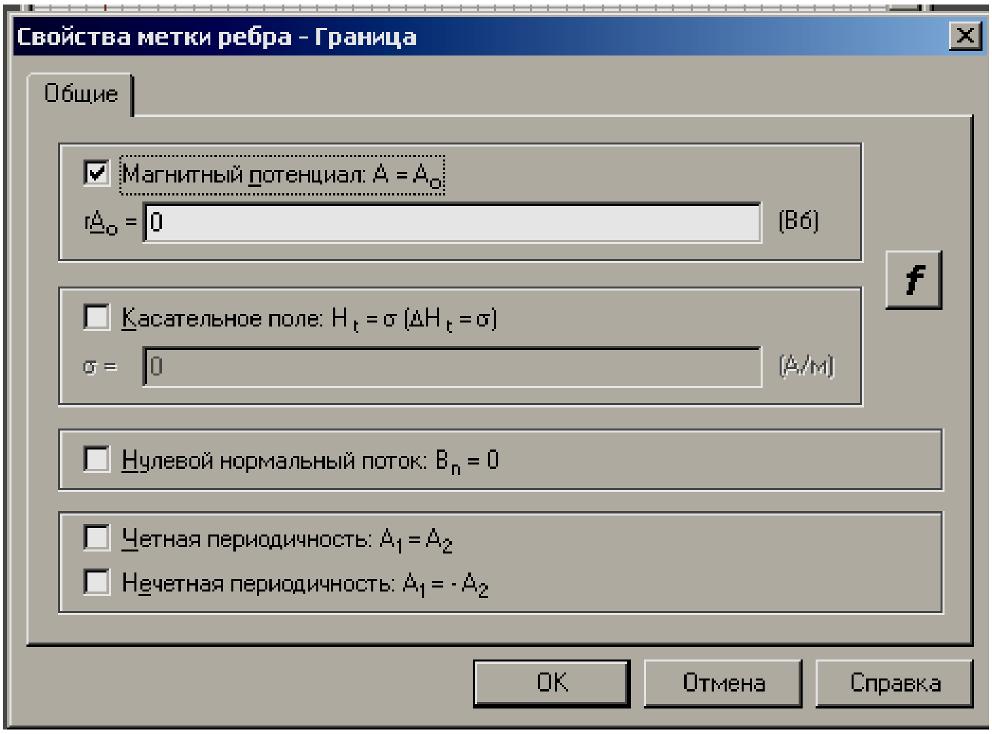



Рис. 2.20. Окно задания **«Свойства ребра»**

*Построение сетки конечных элементов*

26) Для построения сетки конечных элементов предварительно нужно задать шаг дискретизации (разбиения) расчетной области. Шаг дискретизации определит густоту сетки конечных элементов в различных областях модели. Этот параметр можно задать для вершин, ребер или областей модели. Для рассматриваемой задачи можно предположить существенную неоднородность магнитного поля в рабочем зазоре, вследствие выпучивания магнитного потока, поэтому сетка тут должна быть максимальной густоты. Зададим величину шага дискретизации на внешней границе области $3\,мм$, а на внутренних границах соответственно $2\,мм$ (область обмотки) и $1\,мм$ (область рабочего зазора) с тем, чтобы получить сетку общим числом узлов не более ***200*** (данное ограничение отсутствует в профессиональной версии программы *ELCUT*). Для задания шага дискретизации необходимо:

- выделить левой клавишей мышью вершину модели и выбрать команду «**Свойства…»** свойства в контекстном меню;
- установить переключатель **«Шаг дискретизации»** в положение **«Ручной»** и ввести число, например, **«3»** (рис. 2.11). Затем нажать «**ОК»** для завершения диалога;
- повторить эти действия для других вершин, чтобы присвоить шаг дискретизации $2\,мм$ и $1\,мм$.
- для построения сетки конечных элементов в меню **«Правка»** выберите команду **«Построить сетку»**, и затем, **«Во всех блоках»**, чтобы построить сетку во всех блоках одновременно.

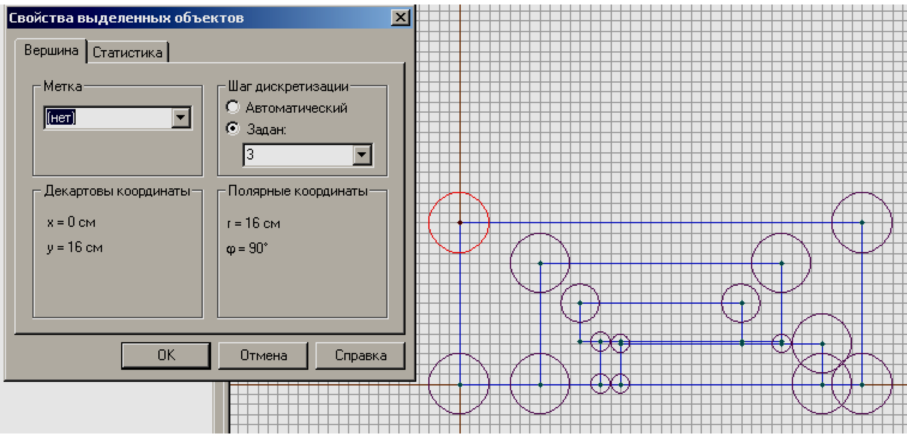



Рис. 2.21 Окно программы на этапе задания шага дискретизации

27) Сохраните модель на диске. Для этого выберите команду **«Сохранить»** в меню **«Файл».**

*Решение задачи*

28) Выберите пункт меню **«Задача/ Решить…».** Если данный пункт в меню **«Задача»** отсутствует, то необходимо выделить (однократным щелчком левой клавиши мыши) любую метку материала. После этого пункт **«Решить…»** в меню **«Задача»** появится. После окончания расчета появится сообщение (рис.2.22). Нажмите **«Да»**, в правой части основного окна, при этом будет выделена рассчитанная картина поля текущей задачи (рис. 2.23).

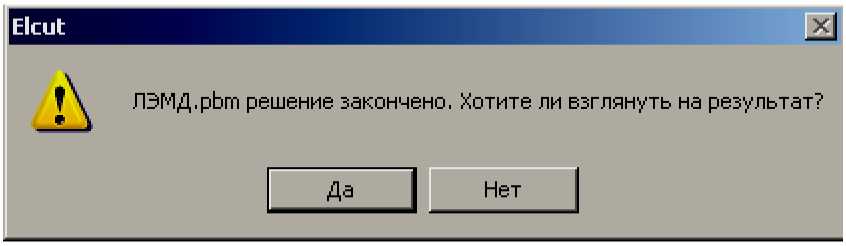



Рис. 2.22. Окно программы о завершении расчета поля

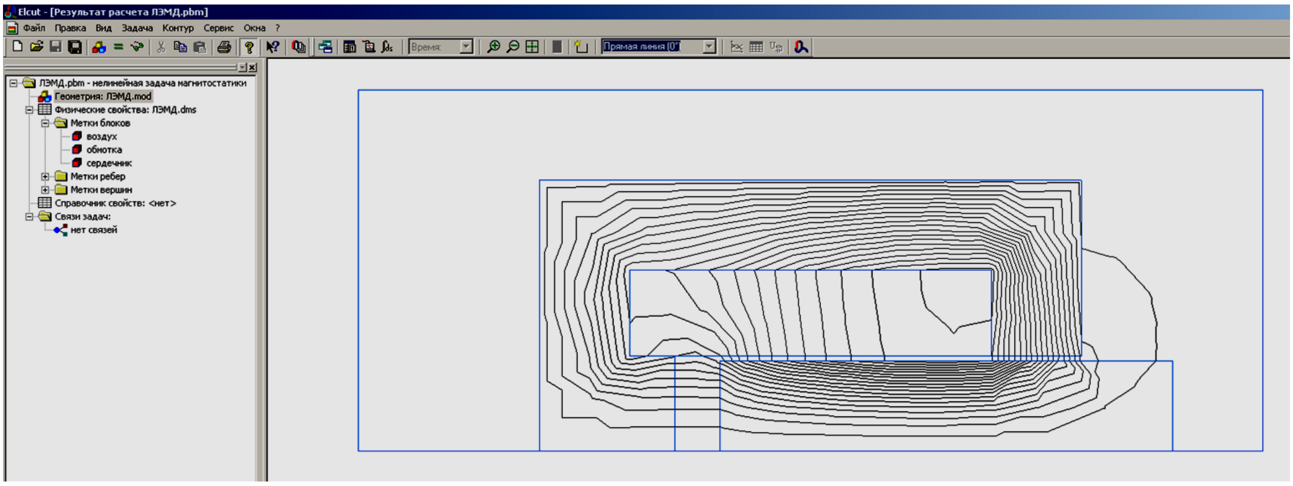



Рис. 2.23. Окно программы с результатами расчета

*Просмотр результатов расчета поля*

29) Программа *ELCUT* позволяет представить решение задачи несколькими способами:

- картины поля;
- локальные полевые значения;
- интегральные величины;
- графики;
- таблицы.

30) *Для работы с картиной поля* выберите пункт меню **«Вид/Картина поля»**. В открывшемся окне можно установить нужные флажки, в соответствии с желаемым видом решения, например, в соответствии с рис. 2.24. Щелчок по кнопке **«ОК»** приведет к завершению диалога и появлению соответствующего графического отображения магнитного поля. Выберите пункт в меню **«Вид/ Цветовая шкала»**, рядом с картиной поля появится цветовая шкала, которая цветом отражает изменение параметра поля, например, магнитную индукцию (рис. 2.25).

Обратите внимание, что цвета индукции магнитного поля в областях модели различны. Это значит, что магнитная индукция в этих областях изменяется. При этом увеличение магнитной индукции отображается полосами более темного цвета. Длины векторов магнитной индукции по поверхности рисунка поля так же информирует о величине индукции магнитного поля.

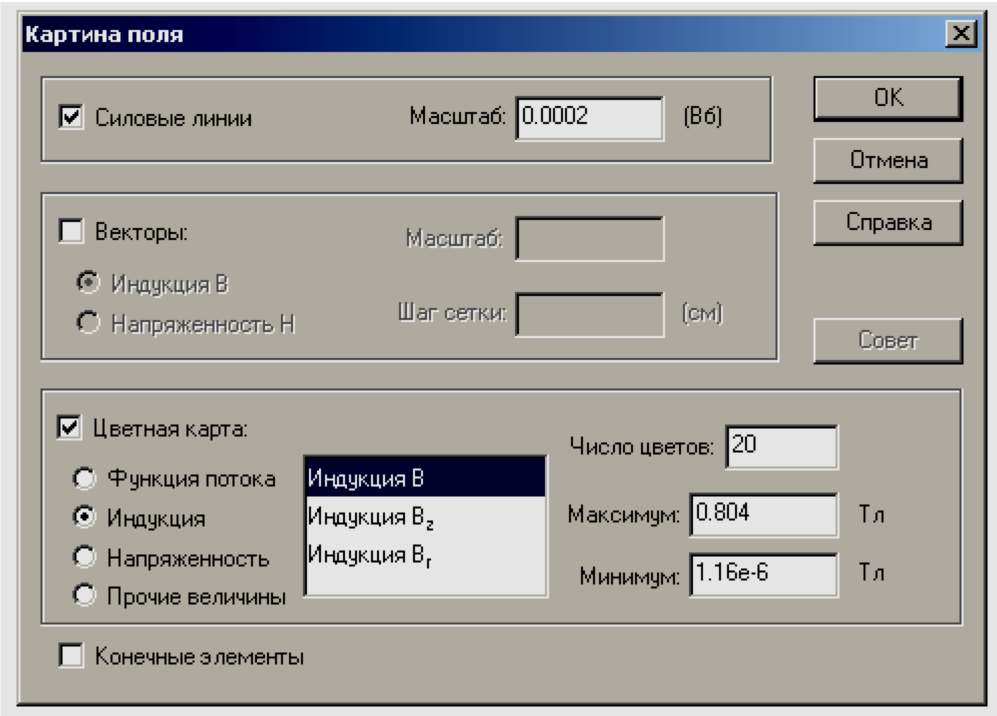



Рис. 2.24. Выбор способов отображения параметров магнитного поля

31) *Для просмотра локальных значений физических величин*, характеризующих поле в требуемых точках необходимо открыть меню **«Вид/Локальные значения».** После выбора данного пункта меню появится дополнительное окно (рис. 2.26), в котором будут отображаться значения переменной в точке, указанной мышью на общей картине поля.

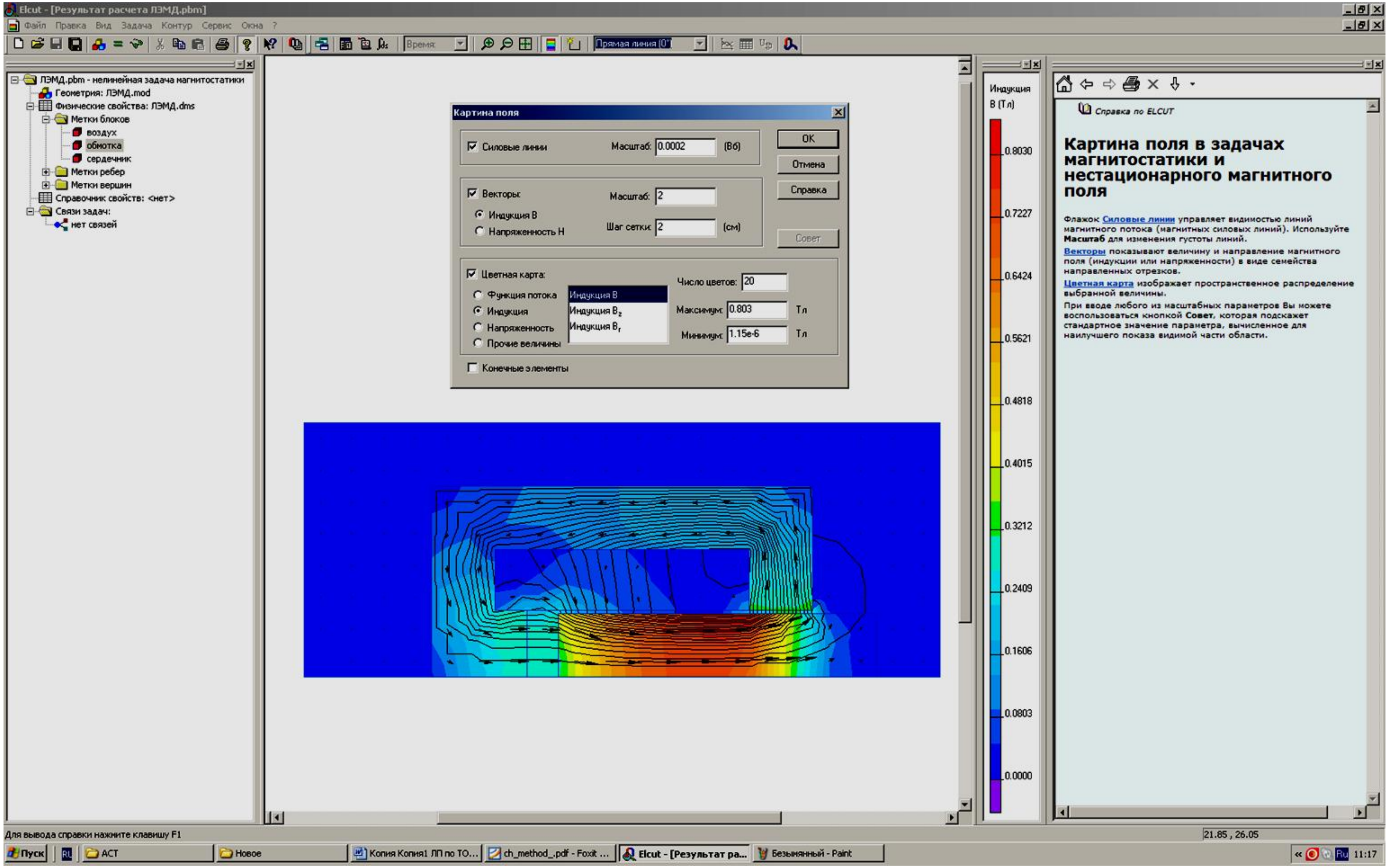



Рис. 2.25. Отображение цветом и векторами линий магнитной индукции (силовые линии) поля:

(магнитная индукция $B_{max} = 0,8\,Тл$, функция потока $\Delta\psi = 2 \cdot 10^{-4}\,Вб$, число линий $N = 20$)

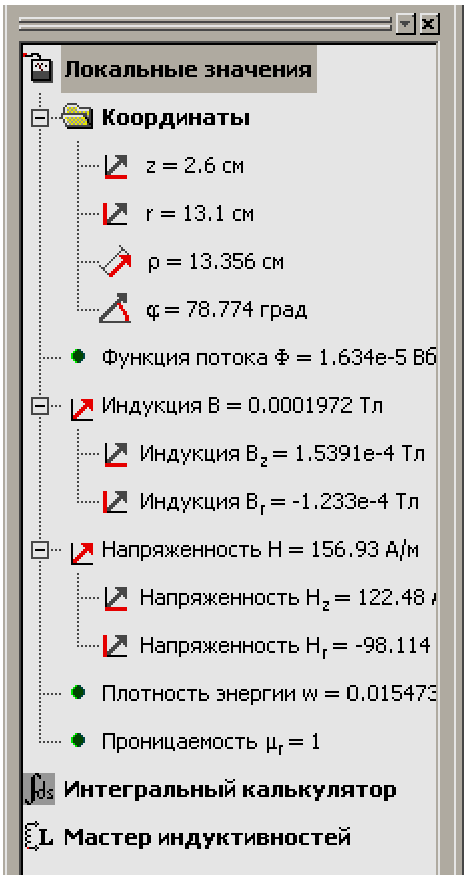
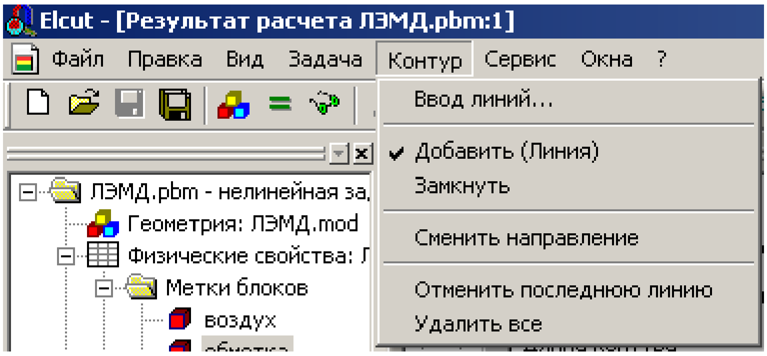



Рис. 2.26. Окно отображения локальных значений

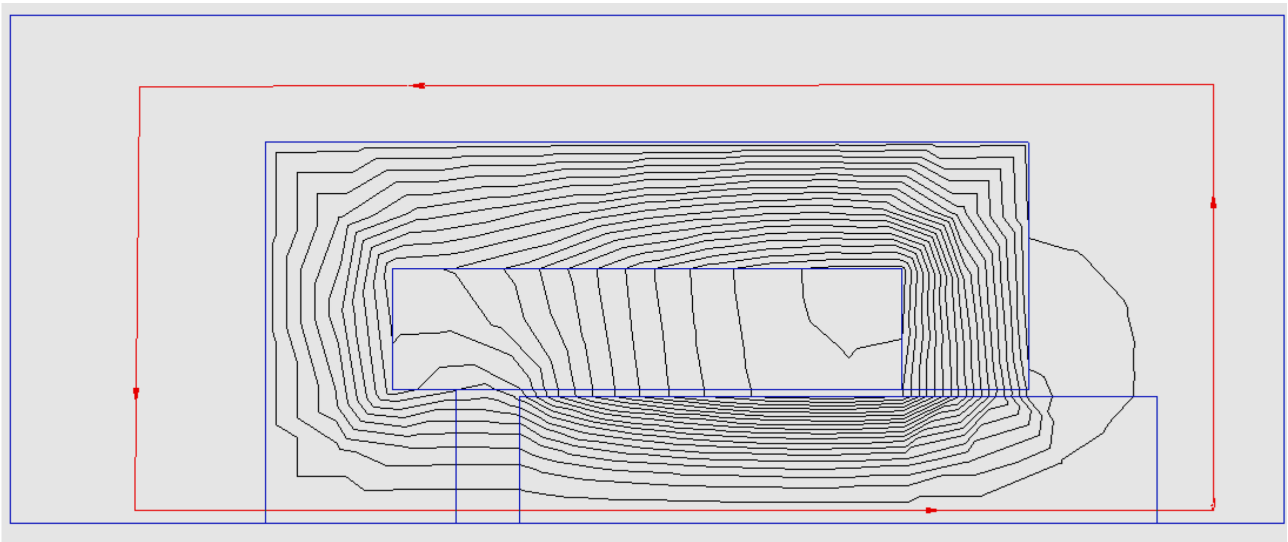
32) *Для расчета интегральных значений* необходимо построить контур, по которому будет выполняться интегрирование, например, в рассматриваемой задаче контур, ограничивающий область обмотки с током. Выберите команду меню **«Контур/ Добавить»,** и тогда появится возможность нарисовать контур с помощью «мыши» (рис. 2.27). В пакете *ELCUT* положительным направлением контура считается направление против часовой стрелки. Замыкание контура выполняется командой **«Контур/ Замкнуть»**). После этого обратитесь к меню **«Вид/ Интегральные значения»,** тут же откроется дополнительное окно со списком рассчитанных интегральных характеристик. Щелкнув один раз по левой кнопке с помощью «мыши» рядом с названием выбранного параметра можно вывести на экран его значение, например, магнитодвижущую силу $F = 5011A$ (рис. 2.27). Вычисленное значение магнитодвижущей силы дает возможность выполнить проверку расчета по закону полного тока

$$\oint_l \overline{H} \cdot d\bar{l} = F = Iw = 10 \cdot 500 = 5000\ A,$$

что соответствует ошибке расчета поля $\varepsilon \approx 0{,}22\%$.




а)



б)

Рис. 2.27. Рисование контура в главном окне программы *ELCUT*:
а - команда меню, б - расчетная модель электромагнита

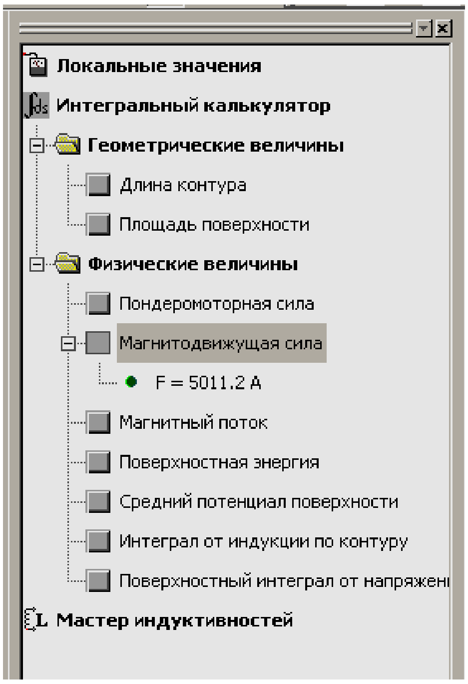



Рис. 2.28. Окно отображения интегральных значений

33) По результатам расчета магнитного поля при заданном рабочем зазоре $\delta = 0{,}02\,м$ можно определить индуктивность обмотки электромагнита. Для этого выберите в меню **«Вид/Мастер индуктивностей** (рис. 2.29). Мастер индуктивностей позволяет выполнить расчет индуктивности обмотки, исходя из потокосцепления $L = \dfrac{\Psi}{I}$ или из запасенной энергии $L = \dfrac{2W}{I^2}$. Выбор одного из способов производится переключателем с помощью левой клавиши мыши.

При выборе способа **«Исходя из потокосцепления...»** щелчок по кнопке **«Далее»** приведет к открытию окна вычисления потокосцепления (рис. 2.30). В окне пометьте блок **«Обмотка»** и нажмите на клавишу **«Выбрать».** Так как в модели представлена одна из сторон обмотки, а вторая сторона подразумевается симметричной, то используйте метку **«Симметрично».** Не забудьте указать число витков обмотки. С вводом числа витков обмотки (в примере $w = 500$) в правом нижнем углу окна появится вычисленное значение потокосцепления обмотки $\psi = 1{,}53\ Вб$. Затем нажмите на кнопку **«Далее».** В новом окне введите число витков $w = 500$ и ток обмотки (в примере $I = 10\ A$). Снова нажмите на кнопку **«Далее».** Мастер индуктивностей завершит работу открытием окна (рис. 2.31), в котором будет выведено рассчитанное значение индуктивности обмотки $L = 0{,}1527\ Гн$.

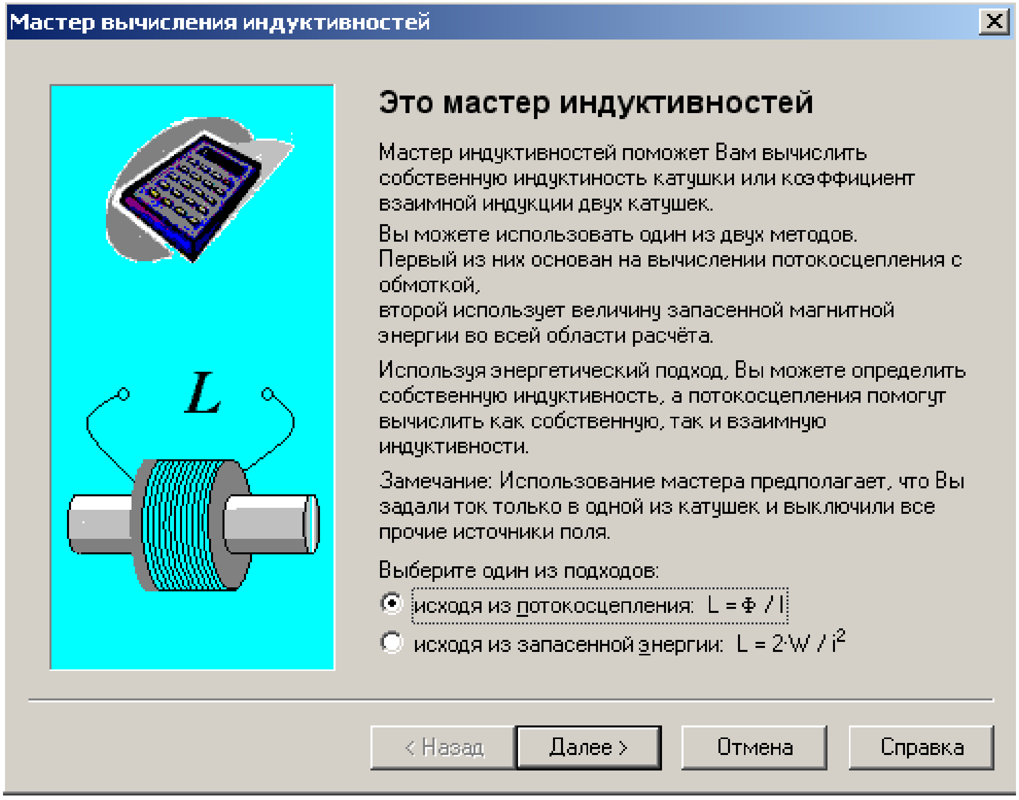



Рис. 2.29. Окно мастера индуктивностей

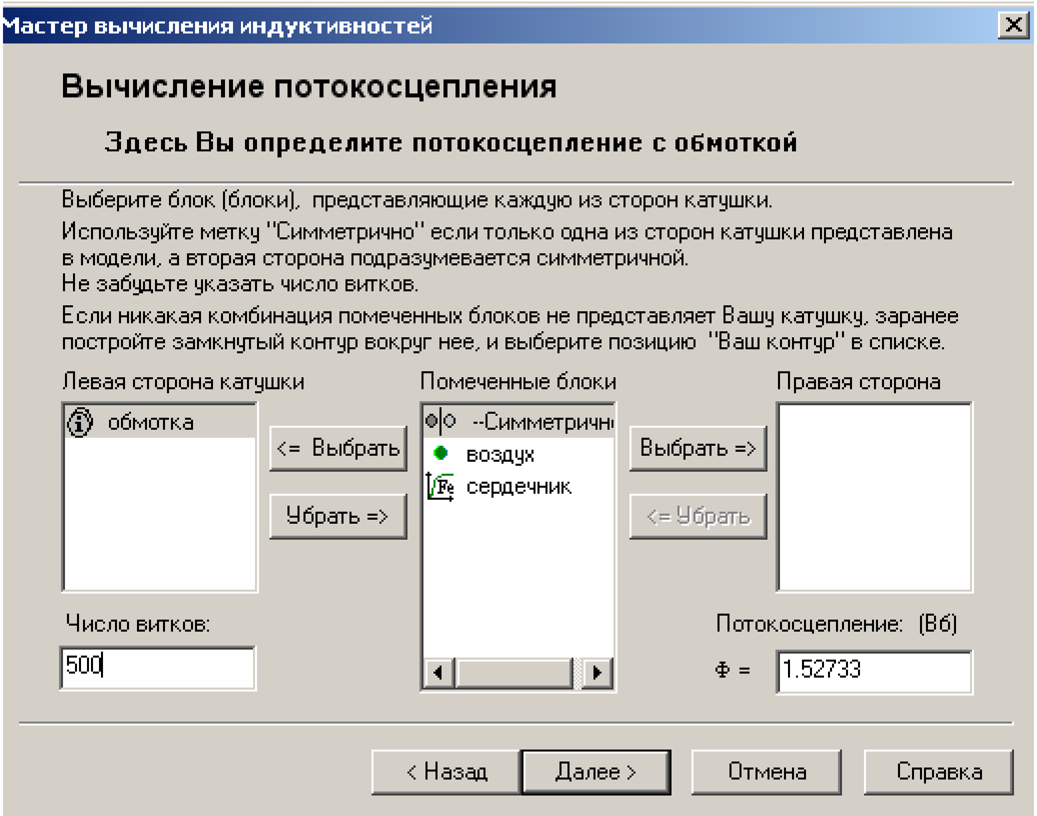



Рис. 2.30. Окно вычисления потокосцепления

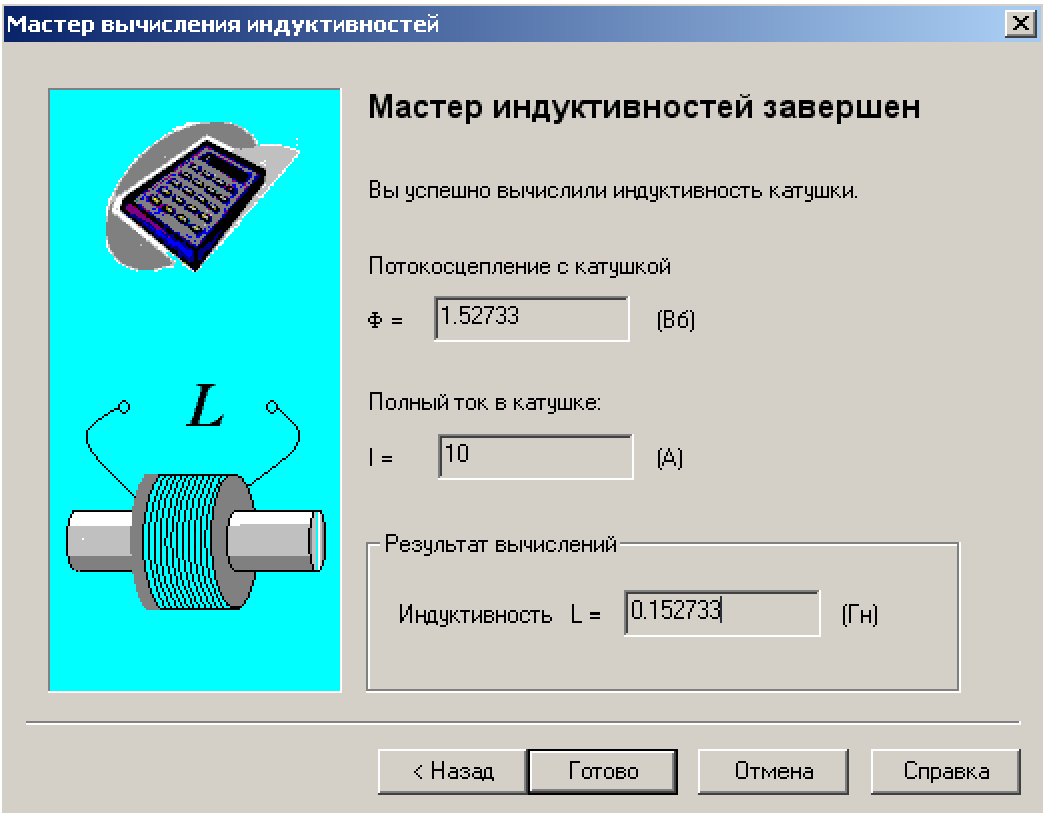



Рис. 2.31. Окно вывода индуктивности обмотки **«Исходя из потокосцепления…»**

Расчет индуктивности обмотки способом **«Исходя из запасенной энергии**…» проводится по шагам в том же порядке, что при расчете индуктивности обмотки **«Исходя из потокосцепления…».** По завершению работы мастера индуктивностей в окне (рис. 2.32) выводится вычисленное значение энергии магнитного поля $W = 7{,}675\ Дж$ и индуктивность обмотки $L = 0{,}1535\ Гн$.

Сопоставление значений индуктивности обмотки, полученных разными способами, дает расхождение результатов расчета в пределах погрешности вычислений $\varepsilon < 10\%/$.

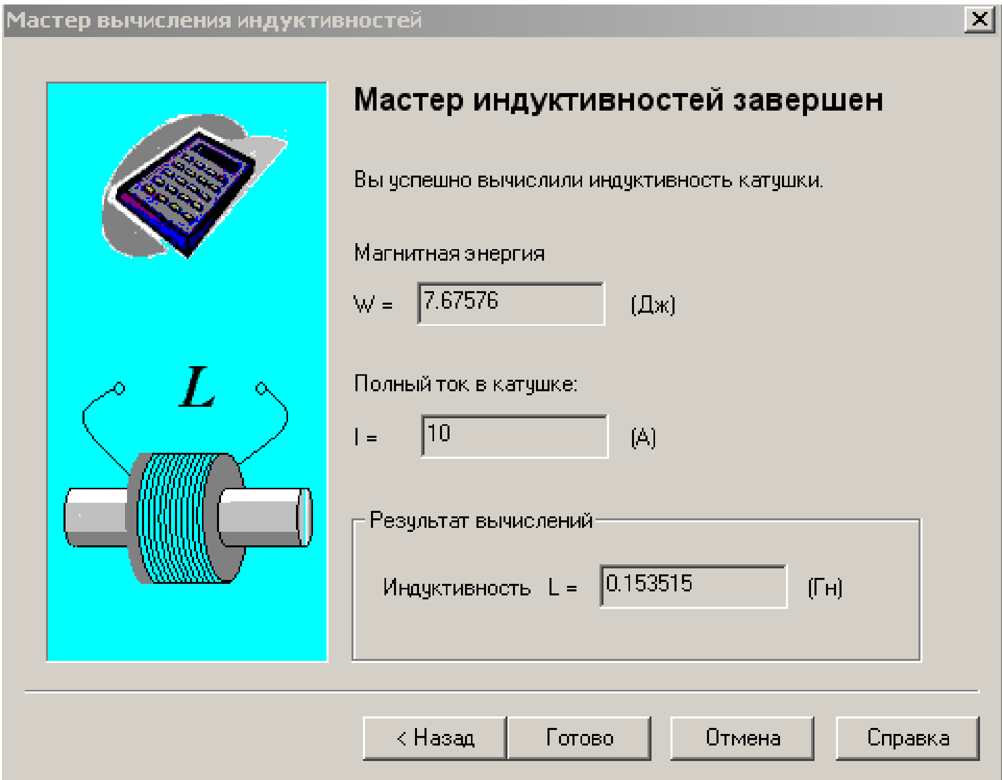



Рис. 2.32. Окно вывода индуктивности обмотки **«Исходя из запасенной энергии**…»

Варьируя в геометрической модели электромагнита значения рабочего зазора можно по указанным выше шагам расчета магнитного поля определить индуктивность $L$ обмотки при различных значениях рабочего зазора $\delta$ (см. таблицу).

| $\delta \cdot 10^{-3}, м$ | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L,\ Гн$ | 0,230 | 0.153 | 0,117 | 0,093 | 0,075 | 0,062 | 0,051 | 0,043 |
| $L^{-1},\ Гн^{-1}$ | 4,35 | 6,56 | 8,58 | 10,73 | 13,25 | 16,2 | 19,56 | 23,47 |

Зависимость инверсной индуктивности обмотки электромагнита $L^{-1} = L^{-1}(\delta)$ на большей части хода якоря представим аппроксимирующим полиномом первой степени, коэффициенты которого вычисляются согласно методу наименьших квадратов. Используя данные таблицы, получим:

$$L^{-1}(\delta) = a + b \cdot \delta = 1{,}25 + 250 \cdot \delta .$$

Электромагнитная сила, действующая на якорь электромагнита, при заданном рабочем зазоре и токе в обмотке вычисляется по формуле:

$$F_{ЭМ} = F_{ЭМ}(\delta) = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{d\delta} = -\frac{1}{2} I^2 \frac{b}{(a + b\delta)^2} .$$

Знак минус в значении электромагнитной силы указывает на то, что электромагнитная сила всегда направлена в сторону уменьшения рабочего зазора (якорь втягивается внутрь обмотки).

В рассматриваемом примере при токе в обмотке $I = 10\ A$ и рабочем зазоре $\delta = 0{,}02\,м$ электромагнитная сила

$$F_{ЭМ} = -\frac{1}{2} 10^2 \cdot \frac{250}{(1{,}25 + 250 \cdot 0{,}02)^2} = -320\,H .$$

34) В пакете *ELCUT* можно непосредственно определить электромагнитную силу. Для этого выберите команду меню **«Контур/ Добавить»**, и тогда появится возможность нарисовать контур с помощью «мыши». Электромагнитная сила, действующая на якорь, вычисляется интегрированием по поверхности якоря. Для детального рассмотрения ситуации *ELCUT* позволяет вычислить электромагнитную силу для незамкнутых контуров. Поскольку электромагнитная сила действует в осевом направлении и приложена к торцевой и боковой поверхности якоря, то с помощью «мыши» необходимо выделить именно эти участки незамкнутого контура (рис.2.33). После этого обратимся к меню **«Вид/ Интегральные значения»**, откроется дополнительное окно со списком рассчитанных интегральных характеристик. Щелкнув один раз по левой кнопке «мыши» рядом с названием выбранного параметра **«Пондеромоторная сила»**, получим $F_{ЭМ} = 253{,}6\,H$. При определении электромагнитной силы с использованием зависимости $L = L(\delta)$ электромагнитная сила $F_{ЭМ} = 320\,H$ при рабочем зазоре $\delta = 0{,}02\,м$. Расхождение значений электромагнитных сил, определяемых прямым и

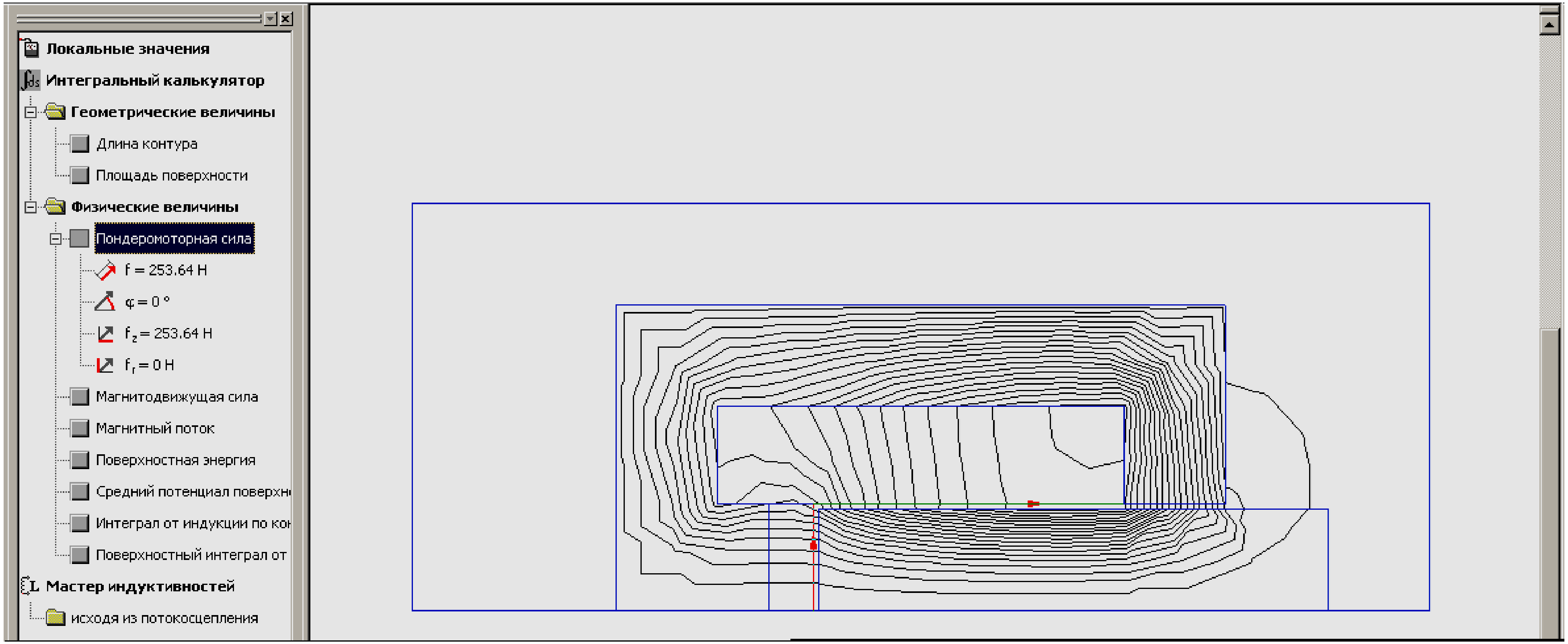



Рис. 2.33. К определению электромагнитного усилия при рабочем зазоре $\delta = 0{,}02\,м$

косвенным методом, вызвано погрешностью аппроксимации зависимости инверсной индуктивности обмотки от хода якоря при рабочем зазоре. С увеличением рабочего зазора расхождение значений электромагнитных сил прямым и косвенным методами снижается, Например, при рабочем зазоре $\delta = 0{,}03\,м$ расчет электромагнитной силы косвенным методом дает результат $F_{ЭМ} = 163{,}2\,H$, а прямым методом соответственно силу $F_{ЭМ} = 172{,}3\,H$, что составляет ошибку вычислений менее $10\%$.

35) *Графики распределения переменных в пакете ELCUT* строятся вдоль линии предварительно проложенного контура. Для построения графика необходимо сначала создать контур (это может быть просто отрезок прямой линии), а затем обратиться к пункту меню **«Вид/ График»**. В результате на экран будет выведен требуемый график (рис. 2.34). Для изменения переменной отображаемой на графике необходимо выполнить команду **«Вид/ Кривые на графике»** и выбрать требуемую переменную. Выполнив команду **«Вид/ Таблица»**, распределение переменных вдоль предварительно проложенного контура или линии можно представить в виде таблицы.

Таблица

| L (см) | z (см) | r (см) | B (Тл) | $B_z$ (Тл) | $B_r$ (Тл) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.00000 | 15.2104 | 0.00000 | 0.280737 | 0.280737 | -8.99468e-5 |
| 0.400000 | 15.2104 | 0.400000 | 0.280847 | 0.280846 | -0.000360530 |
| 0.800000 | 15.2104 | 0.800000 | 0.280850 | 0.280849 | -6.38589e-4 |
| 1.20000 | 15.2104 | 1.20000 | 0.280990 | 0.280986 | -0.00140980 |
| 1.60000 | 15.2104 | 1.60000 | 0.280877 | 0.280866 | -0.00253623 |
| 2.00000 | 15.2104 | 2.00000 | 0.280327 | 0.280292 | -0.00440105 |
| 2.40000 | 15.2104 | 2.40000 | 0.283773 | 0.283682 | -0.00715363 |
| 2.80000 | 15.2104 | 2.80000 | 0.281955 | 0.281587 | -0.0144167 |
| 3.20000 | 15.2104 | 3.20000 | 0.276417 | 0.275543 | -0.0219678 |
| 3.59486 | 15.2104 | 3.59486 | 0.260677 | 0.255968 | -0.0493245 |
| 4.00000 | 15.2104 | 4.00000 | 0.219855 | 0.211232 | -0.0609679 |
| 4.40000 | 15.2104 | 4.40000 | 0.175036 | 0.161889 | -0.0665554 |
| 4.80000 | 15.2104 | 4.80000 | 0.135421 | 0.120597 | -0.0616053 |
| 5.20000 | 15.2104 | 5.20000 | 0.0935209 | 0.0840463 | -0.0410169 |
| 5.60000 | 15.2104 | 5.60000 | 0.0766839 | 0.0660120 | -0.0390235 |
| 6.00000 | 15.2104 | 6.00000 | 0.0632332 | 0.0495895 | -0.0392342 |
| 6.40000 | 15.2104 | 6.40000 | 0.0516503 | 0.0337874 | -0.0390662 |
| 6.80000 | 15.2104 | 6.80000 | 0.0428318 | 0.0262027 | -0.0338819 |
| 7.20000 | 15.2104 | 7.20000 | 0.0347484 | 0.0183398 | -0.0295144 |
| 7.60000 | 15.2104 | 7.60000 | 0.0303871 | 0.00917495 | -0.0289689 |
| 8.00000 | 15.2104 | 8.00000 | 0.0284233 | 1.01065e-5 | -0.0284233 |

Команды **«Вид/ Столбцы» и «Вид/ Строки»** позволяют задать требуемое количество строк и столбцов в таблице для вывода результатов расчета на экран.

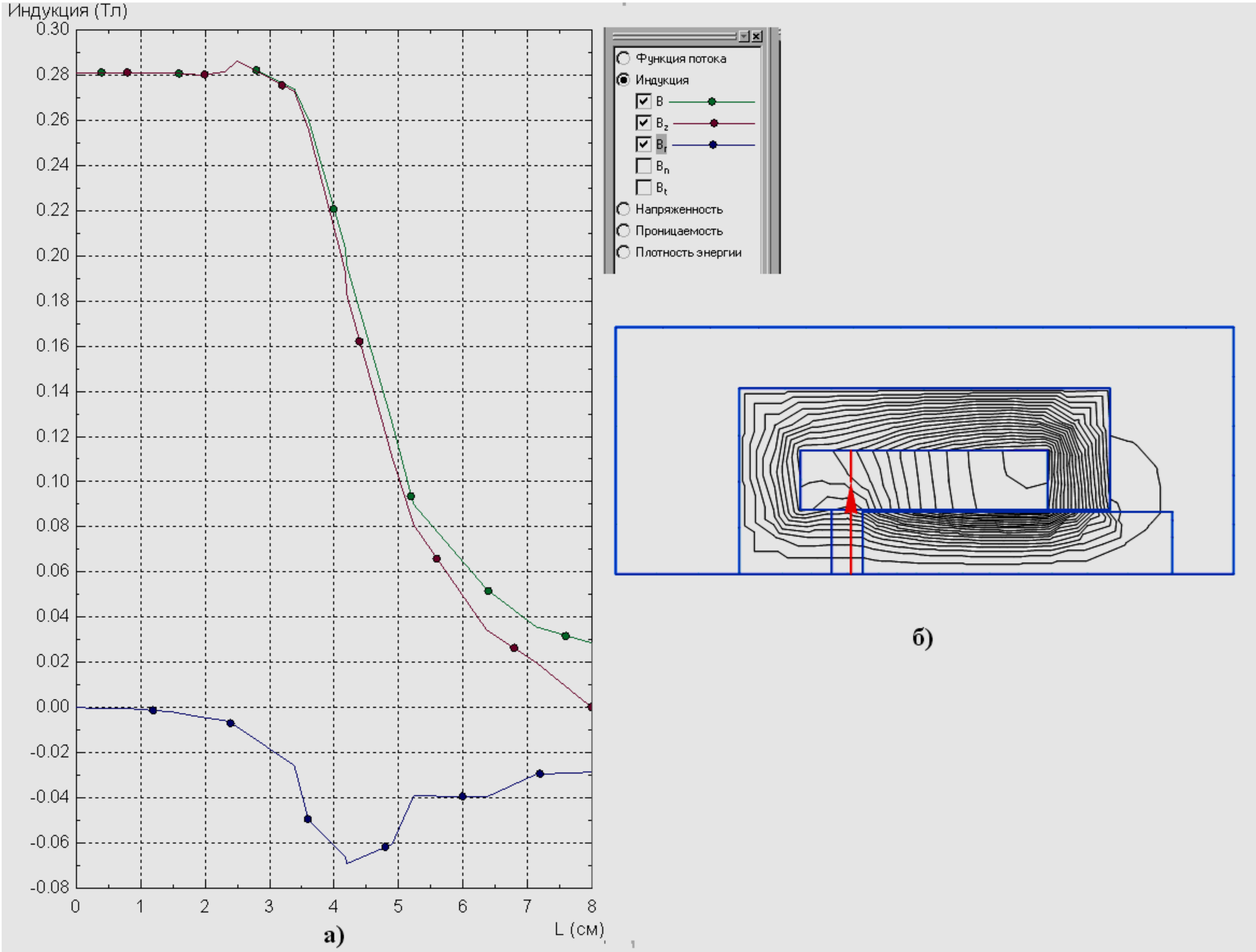



Рис. 2.34. Окно построения графиков: распределение вектора индукции магнитного поля и его составляющих (а) вдоль предварительно проложенной линии (б)

## 2.3. ОБЗОР ОСНОВНЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ

Пакет *ELCUT* содержит следующие модули решения задач.

- *Модуль электростатика* может быть использован для расчета и проектирования различных систем, имеющих емкость, таких как конденсаторы, линии передачи и тому подобное, а также расчета изоляции.
- *Модуль электрическое поле постоянных токов* может быть использован для расчета систем заземления и других массивных проводящих систем.
- *Модуль электрическое поле переменных токов* используется при анализе электрических полей, вызванных переменными токами и напряжениями в неидеальных диэлектриках. Этот вид анализа чаще всего применяется при расчете сложных систем изоляции и конденсаторов. Обычно интерес представляют омические потери в диэлектриках, напряжение, компоненты электрического поля, силы, вращающие моменты.
- *Модуль нестационарное электрическое поле* используется при анализе электрических полей, вызванных меняющимися токами и напряжениями в нелинейных диэлектриках. Этот вид анализа применяется при расчете сложных систем изоляции, варисторов, ограничителей перенапряжений.
- *Модуль магнитостатика* рассчитывает магнитное поле постоянных токов и постоянных магнитов. Он может быть использован для анализа электрических машин, реакторов, магнитных экранов, систем с постоянными магнитами, электромагнитных муфт, и т.п.
- *Модуль магнитные поля переменных токов* рассчитывает синусоидальное во времени магнитное поле заданной частоты с учетом вихревых токов. Этот модуль идеален для проектирования установок индукционного нагрева, трансформаторов, катушек, электрических машин, и многих типов индукторов.
- *Модуль нестационарное магнитное поле* рассчитывает изменяющееся во времени магнитное поле, вызванное импульсными токами и постоянными магнитами. Этот наиболее общий метод анализа магнитного поля может быть использован для расчета переходных процессов в электромагнитных устройствах, работы двигателей от импульсных преобразователей и другие задачи, где недостаточно только решения задачи магнитостатики или синусоидальных токов.
- *Модуль теплопередача* рассчитывает установившееся и нестационарное распределение температуры и тепловых потоков с учетом источников и условий теплообмена, включая конвективный и радиационный.

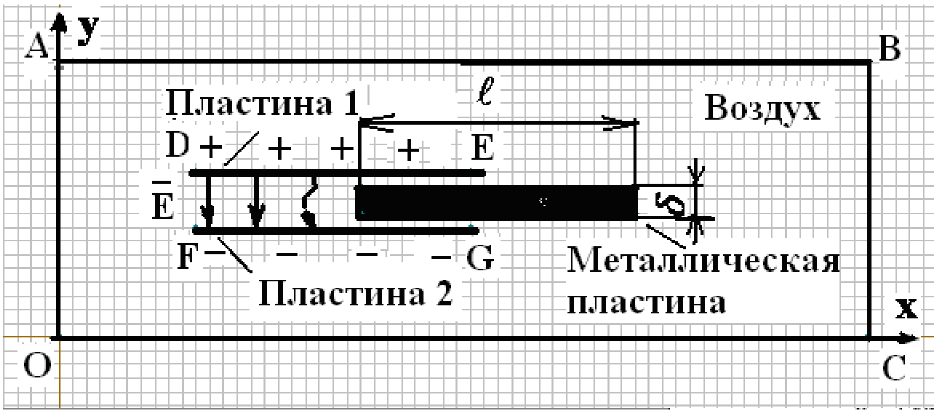
- *Модуль упругие деформации* может быть использован для расчета упругого напряженного состояния тел под действием сосредоточенных, распределенных и термических нагрузок.

# 3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ПАКЕТЕ *ELCUT*

## 3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

### Задача 1. Конденсатор переменной емкости

*Тип задачи.* Электростатическое поле.
*Класс модели.* Плоская (плоскопараллельная задача электростатики).
*Единицы длины.* Миллиметры.
*Система координат.* Декартовы координаты.
*Геометрия:*




Заряженные металлические пластины *1* и *2* разделены слоем воздуха и образуют обкладки плоского конденсатора. В зазор между обкладками на равном удалении от них помещена изолированная металлическая пластина толщиной $\delta$. Геометрические размеры металлической пластины и обкладок конденсатора одинаковы. Перемещение пластины между обкладками конденсатора сопровождается изменением конфигурации зазора, активной площади заряженных пластин, а, следовательно, и емкости конденсатора. Пример геометрии поясняет один из важных принципов построения конденсатора переменной емкости.

*Дано:*
Ширина изолированной металлической пластины и обкладок конденсатора $\ell = 20\,мм$ , их длина $L_Z = 100\ мм$. Зазор между обкладками конденсатора в два раза больше толщины пластины $\delta = 2\,мм.$ Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 200 - (-200) = 400\,B.$
Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon' = 1.$

*Задача:*

Построить картины электрического поля, определить заряд на поверхности заряженных металлических пластин и емкость плоского конденсатора в зависимости от глубины погружения изолированной металлической пластины в зазор между обкладками конденсатора.

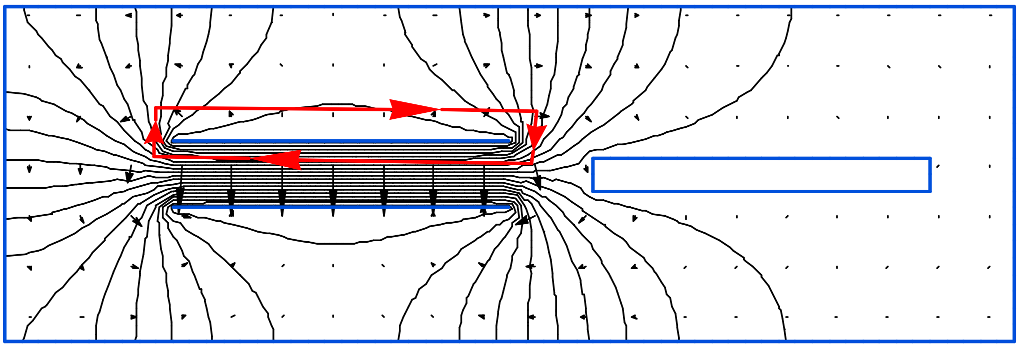
*Решение:*

Для решения теоретически бесконечной задачи определим область расчета как прямоугольник площадью $60 \times 20\,мм^2$ с тем, чтобы учесть влияние краевых эффектов. После построения геометрии в области моделирования по исходным данным присваиваем имена геометрическим объектам *Пластина 1, Пластина 2, Воздух, Тело* и задаем их свойства. Ребра $DE$ и $FG$ в модели отмечаем метками «Пластина 1» и «Пластина 2». В окне «Свойства метки ребра …» для пластины $1$ задаем значение потенциала $\varphi_1 = 200\,B$, а для пластины $2$ соответственно $\varphi_2 = -200\,B$. В окне «Свойства метки блока – Воздух» задаем значение относительной диэлектрической проницаемости воздуха $\varepsilon' = 1$. Изолированную металлическую пластину в модели представляем в виде прямоугольника, каждое ребро которого помечаем меткой *Тело.* В окне «Свойства метки ребра – Тело» устанавливаем флаг «Изолированный проводник (равный потенциал)». Решая задачу электростатики, находим распределение электрического поля в зависимости от глубины погружения $\lambda$ изолированной металлической пластины внутрь плоского конденсатора.

*Результат:*

Картины электрического поля плоского конденсатора при различных значениях $\lambda$.

- Глубина погружения изолированной металлической пластины внутрь плоского конденсатора $\lambda = 0$.

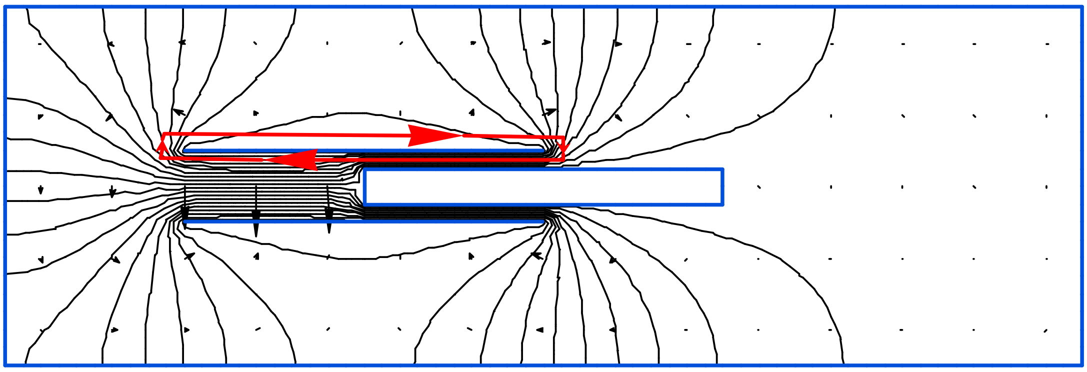


На картине электрического поля сплошными линиями обозначены линии равного электрического потенциала (число эквипотенциальных линий $n = 20$, $\Delta U = 20\,B$), а в виде стрелок - силовые линии поля.

Длина стрелки на картине поля соответствует значению модуля вектора напряженности электрического поля. Максимум напряженности электрического поля $E_{max} = 1{,}1 \cdot 10^{5}\ В/м$. Для определения заряда на поверхности пластины *1* плоского конденсатора зададим контур интегрирования, охватывающий ее целиком. Выполнив интегрирование по этому контуру, с помощью мастера «Мастер вычисления емкостей» получим заряд $Q_S = 2{,}69 \cdot 10^{-9}\ Кл$. Емкость конденсатора будет

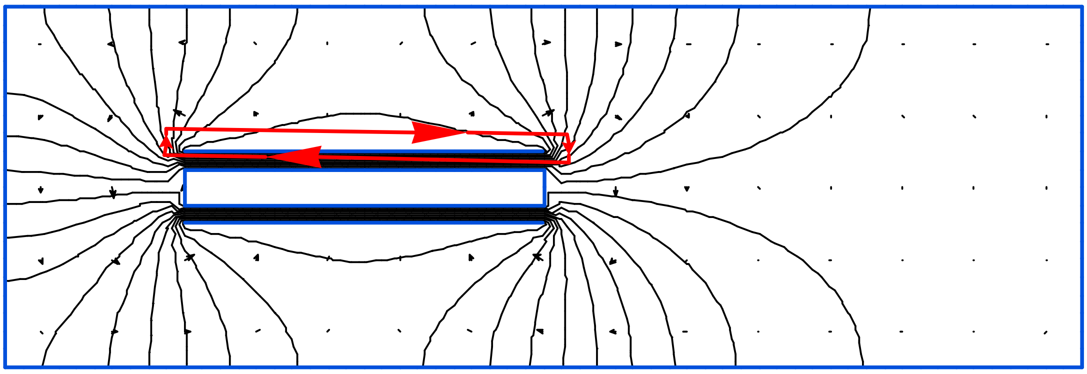
$$C = \frac{Q_S}{U} = \frac{2{,}69 \cdot 10^{-9}}{400} = 0{,}673 \cdot 10^{-11}\ Ф.$$

- Глубина погружения изолированной металлической пластины внутрь плоского конденсатора $\lambda = \ell/2$. Число эквипотенциальных линий $n = 20$, $\Delta U = 20\ В$, максимум напряженности электрического поля $E_{max} = 2 \cdot 10^{5}\ В/м$, заряд $Q_S = 3{,}13 \cdot 10^{-9}\ Кл$. Емкость конденсатора $C = 0{,}781 \cdot 10^{-11}\ Ф$.

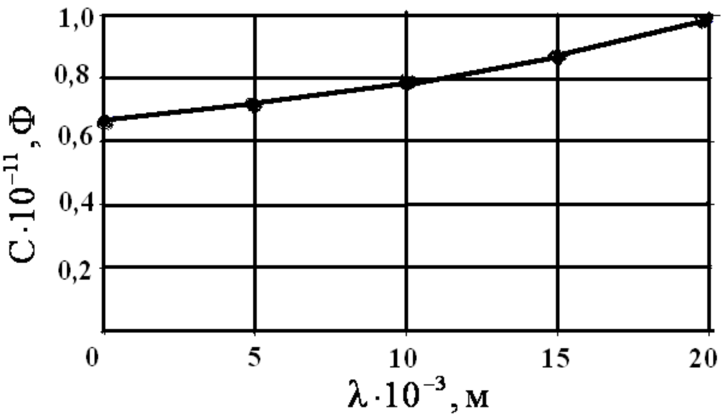


- Глубина погружения изолированной металлической пластины внутрь плоского конденсатора $\lambda = \ell$. Число эквипотенциальных линий $n = 20$, $\Delta U = 20\ В$, $E_{max} = 2 \cdot 10^{5}\ В/м$, $Q_S = 3{,}914 \cdot 10^{-9}\ Кл$.

  Емкость конденсатора $C = 0{,}979 \cdot 10^{-11}\ Ф$.



По результатам расчета картин электрического поля на рисунке приведена зависимость емкости плоского конденсатора от глубины погружения изолированной металлической пластины в зазор $C = C(\lambda)$. Из графика видно, что зависимость $C = C(\lambda)$ с достаточной точностью можно аппроксимировать уравнением прямой линии.




Конденсаторы с воздушным диэлектриком применяют на практике наиболее часто, так как они характеризуются большей точностью установки ёмкости, малыми потерями и высокой стабильностью. Эти преимущества не относятся к конденсаторам с твёрдым диэлектриком, хотя они проще в изготовлении и имеют меньшие габариты.

**Задача 2. Растекание токов с заземлителя**

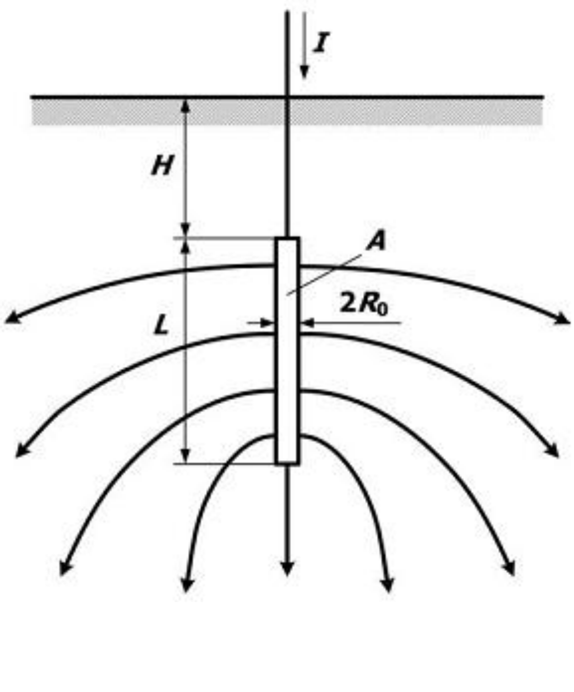
*Тип задачи.* Электрическое поле постоянных токов.

*Класс модели.* Осесимметричная.

*Единицы длины.* Сантиметры.

*Система координат.* Декартовы координаты.

*Геометрия*:



Металлический электрод $A$, имеющий форму цилиндра длиной $L$ и радиусом $R_0$, забит вертикально в неоднородный грунт на глубину $H$ с целью обеспечения заземления электроустановки. При наличии на поверхности заземлителя потенциала $U_0$ постоянный ток $I$ стекает через заземлитель в землю (на рисунке линии тока показаны в виде стрелок) и растекается во все стороны по значительному объему земли. При этом плотность тока имеет наибольшее значение вблизи заземлителя. По мере удаления от заземлителя ток проходит по все большему сечению земли и сопротивление растеканию тока уменьшается. Сопротивление растеканию тока является основной характеристикой заземляющего устройства и определяется как отношение напряжения на нем $U_0$ (потенциала поверхности электрода) к току $I$, протекающему через него в землю:

$$R = \frac{U_0}{I} \quad .$$

Линии тока в земле не уходят в бесконечность, а собираются у другого электрода или места повреждения изоляции (например, при замыкании на землю). Однако это явление при значительном расстоянии между электродами не оказывает заметного влияния на распределение линий тока около электродов и на электрическое сопротивление растеканию заземлителя.

В зоне растекания тока замыкания на землю через тело человека может проходить электрический ток, сила которого определяется шаговым напряжением. Под шаговым напряжением понимается разность потенциалов между двумя точками на поверхности почвы, отстоящими друг от друга на расстояние $0{,}8\,м$ (средняя длина шага). Человек, приближающийся к зарытому в землю электроду, может оказаться под опасным для здоровья напряжением. По мере удаления от заземлителя значение шагового напряжения уменьшается. В соответствии с принятыми нормами напряжение шага считается безопасным, если оно не превышает $40\,В$. Напряжение шага может быть равным нулю и в непосредственной близости к заземлителю, когда человек стоит на линии равного электрического потенциала.

*Дано:*

Глубина погружения металлического электрода в землю $H = 50\,см$.

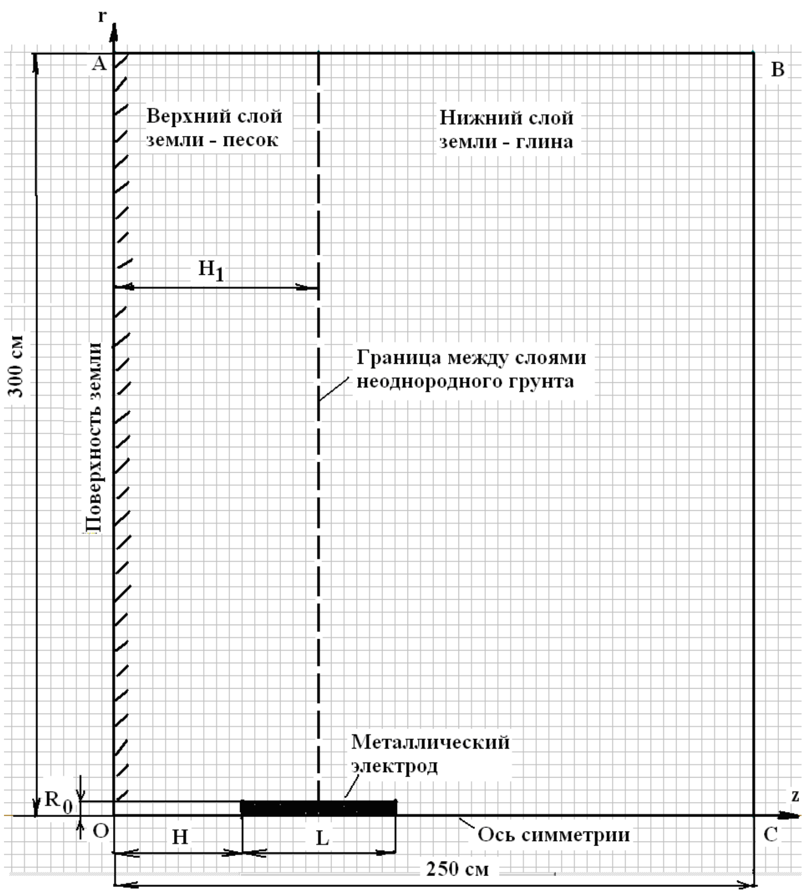
Длина электрода $L = 60\ см$. Радиус электрода $R_0 = 5\ см$.

Неоднородный грунт состоит из двух слоев.

Верхний слой грунта – песок;
Нижний слой грунта - глина.
Толщина верхнего слоя грунта $H_1 = 80\,см.$
Напряжение (потенциал) на поверхности электрода $U_0 = 6\,кВ.$
Значения удельных сопротивлений грунтов:
для песка $\rho = 300 Ом \cdot м;$ для глины $\rho = 50 ом \cdot м.$

*Задача:*
Построить картину электрического поля вертикального стержневого заземлителя в неоднородном грунте, графики зависимостей потенциала вдоль поверхности земли и плотности тока вдоль оси симметрии. Определить значение полного тока, стекающего с поверхности заземлителя, и сопротивление растеканию тока.

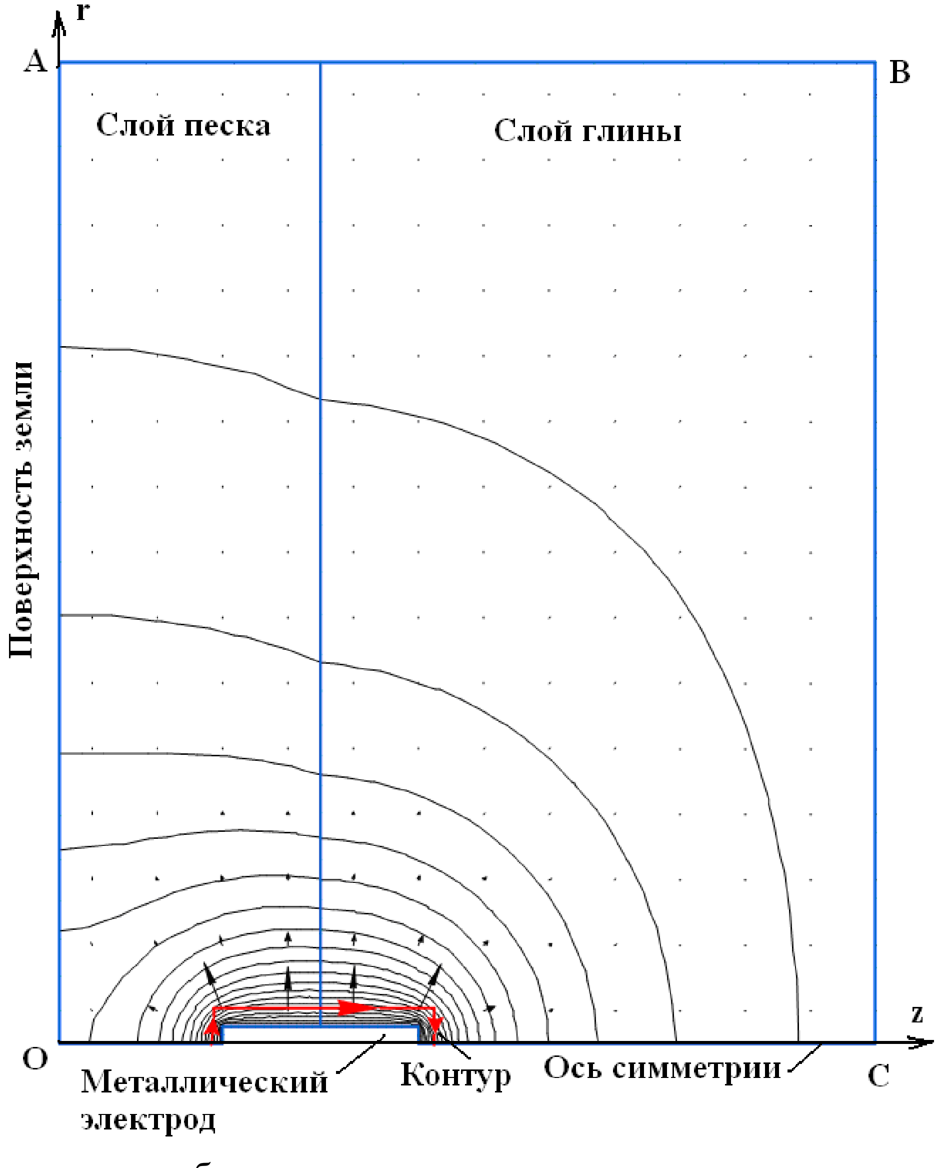
*Решение:*
Внешние границы расчетной модели должны быть расположены таким образом, чтобы имитировать бесконечное удаление (отсутствие изменения поля в нормальном направлении к границе). Принимая во внимание исходные данные задачи, ограничим расчетную область прямоугольником $OABC$ размерами $300\ см \times 250\ см.$



*Граничные условия:*
поверхность заземлителя – заданный потенциал $U = U_0$;
бесконечно-удаленные границы $AB$ и $BC$ - нулевой потенциал $U = 0$;
ось симметрии (линия $OC$) и поверхность земли (линия $OA$) - нормальная составляющая вектора плотности тока $J_n = 0$.

После этапов создания новой, пустой задачи *ELCUT,* ввода параметров задачи, создания геометрической модели, описания физических свойств материалов и ввода граничных условий приступаем к построению сетки конечных элементов и решению задачи.

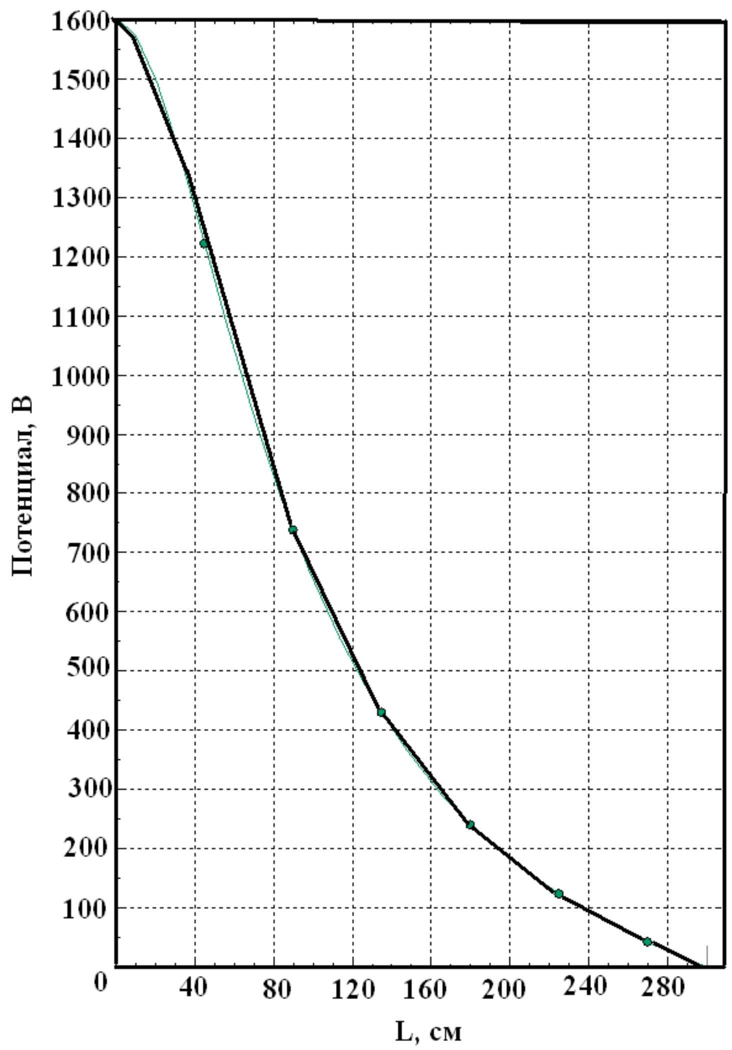
*Результат:*
Картина электрического поля вертикального стержневого заземлителя в неоднородном грунте показана на рисунке.




На картине поля обозначены линии равного электрического потенциала (число эквипотенциальных линий $n = 20$ $\Delta U = 300B$) в виде сплошных линий, а силовые линии поля, то есть линии вектора плотности тока - в виде стрелок. На поверхности заземлителя плотность тока и напряженность электрического поля принимают максимальные значения соответственно $J_{max} = 1090\ А/м^2$ и $E_{max} = 54{,}5\ кВ/м$. Задание контура интегрирования вблизи заземлителя позволяет определить полный ток $I$, стекающий с заземлителя в неоднородный грунт. С помощью интегрального калькулятора находим, что полный ток растекания $I = 135\ А$. Сопротивление растеканию тока $R = 6000/135 = 44{,}4\ Ом.$

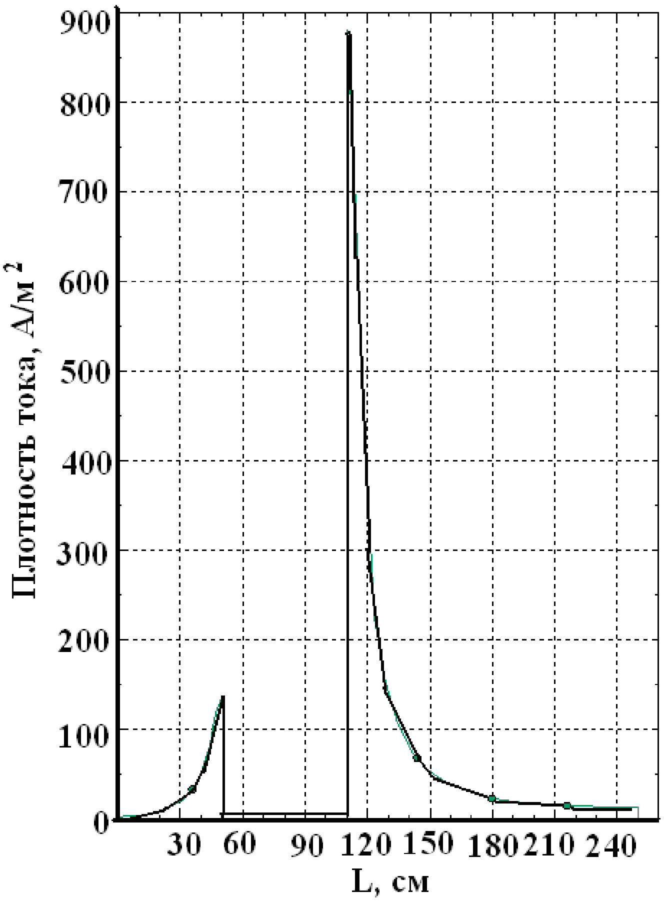
Для построения графиков зависимостей потенциала вдоль поверхности земли и плотности тока вдоль оси симметрии необходимо предварительно создать отрезок прямой линии $OA$ - для электрического потенциала и $OC$ - для плотности тока растекания в земле, а затем обратиться к пункту меню «Вид/ График». При построении графиков точкой отсчета расстояния $L$ служит начало координат.

График зависимости распределения потенциала вдоль поверхности земли имеет вид



Анализ результата расчета распределения потенциала на поверхности земли позволяет сделать вывод, что безопасное расстояние для человека от места расположения заземлителя должно быть не менее *2,5 м*.

График зависимости распределения плотности тока вдоль оси симметрии имеет вид




Из рисунка видно, что плотность тока максимальна вблизи заземлителя и на глубине более *2,0 м* от поверхности земли стремится к нулю. Плотность тока изменяется скачком на границах раздела сред с различным удельным сопротивлением: песок - электрод и глина – электрод.

## 3.2. МАГНИТНЫЕ ЗАДАЧИ

**Задача 1. Катушка со стальным сердечником**

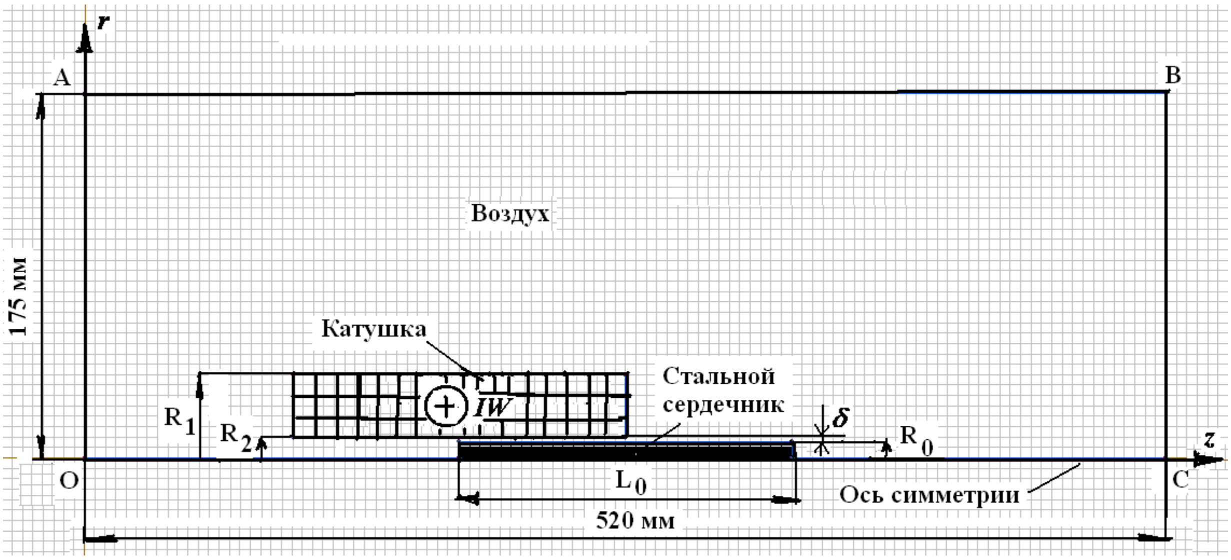
*Тип задачи.* Магнитостатическое поле.

*Класс модели.* Осесимметричная.

*Единицы длины.* Миллиметры.

*Система координат.* Декартовы координаты.

*Геометрия модели:*




Многовитковая многослойная цилиндрическая катушка намотана медным проводом и содержит $w$ витков. Под действием намагничивающей силы $F_{кат} = Iw$ катушки вокруг и внутри нее создается постоянное магнитное поле. В катушку помещается цилиндрический стальной сердечник, имеющий радиус $R_0$ и длину $L_0$, равную длине катушки. Постоянство зазора $\delta$ между сердечником и катушкой обеспечивается электроизоляционной втулкой, которая плотно прилегает к внутренней поверхности каркаса катушки. Вследствие малого трения, стальной сердечник можно свободно перемещать внутри катушки.

С изменением глубины $x$ погружения стального сердечника в катушку меняется ее индуктивность $L_{кат}$, а, следовательно, при неизменном токе и запасенная катушкой энергия $W_м$ магнитного поля. Изменение энергии магнитного поля сопровождается появлением электромагнитной силы, под действием которой стальной сердечник втягивается внутрь катушки:

$$F_{эм} = -\frac{dW_м}{dx} = -\frac{1}{2} I^2 \frac{dL_{кат}}{dx}.$$

*Дано:*

Размеры катушки (по каркасу): $L_0 = 160\,мм$ - длина, $R_1 = 40\,мм$ - наружный радиус; $R_2 = 10\ мм$ - внутренний радиус.

Радиус стального сердечника $R_0 = 8\,мм$.

Намагничивающая сила катушки $F_{кат} = 3000\ A$, число витков $w = 6000$.
Относительная магнитная проницаемость стали $\mu' = 1000$.
Относительная магнитная проницаемость меди и воздуха $\mu' = 1$.

*Задача:*

Построить картину магнитного поля, графики зависимостей индуктивности катушки и электромагнитной силы от глубины погружения стального сердечника внутрь катушки.

*Решение:*

Внешние границы расчетной модели должны быть расположены таким образом, чтобы имитировать бесконечное удаление от катушки с током, вследствие затухания магнитного поля. Для этого ограничим расчетную область прямоугольником $OABC$ размерами $175мм \times 520мм$. При задании размеров расчетной области использование круглых чисел не является обязательным и принципиальным условием решения задачи.

Граничные условия:

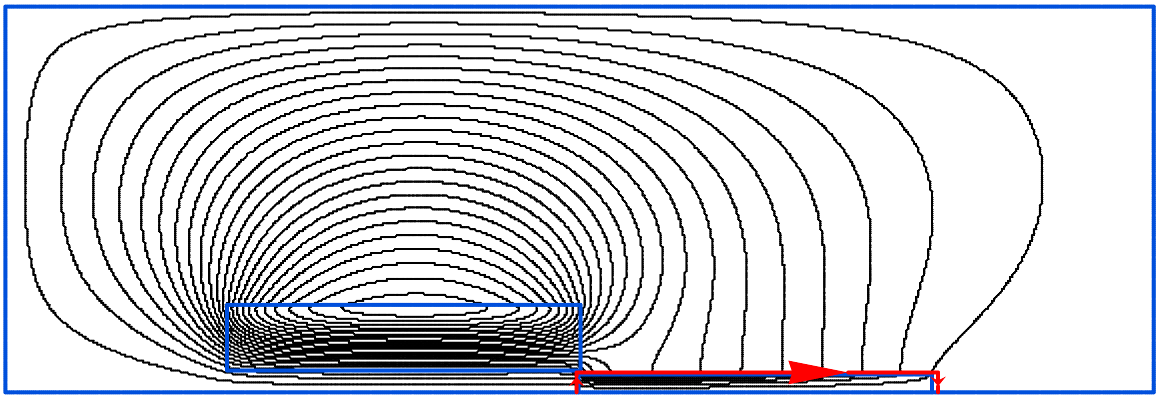
на внешних границах расчетной области $OABC$ функция магнитного потока принимает нулевое значение, поэтому в модели $ELCUT$ границы (ребра) $OA,\ AB, BC$ помечаются меткой «Граница» и на них указываются свойства метки ребра $\psi = rA = 0$;

на оси симметрии по молчанию в модели $ELCUT$ функция магнитного потока всегда принимает значение $\psi = rA = 0$.

*Результат:*

Картины магнитного поля катушки при различных глубинах $\lambda$ погружения стального сердечника внутрь катушки:

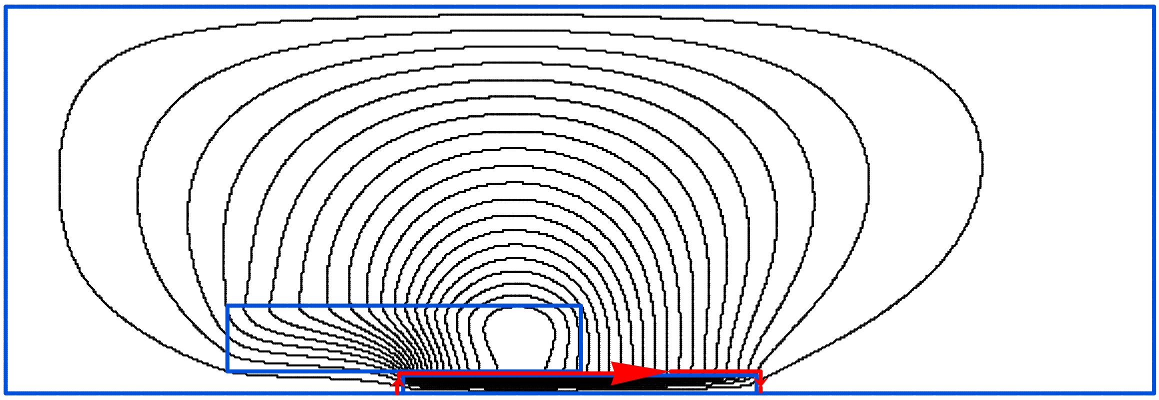
- Глубина погружения стального сердечника внутрь катушки $\lambda = 0$.



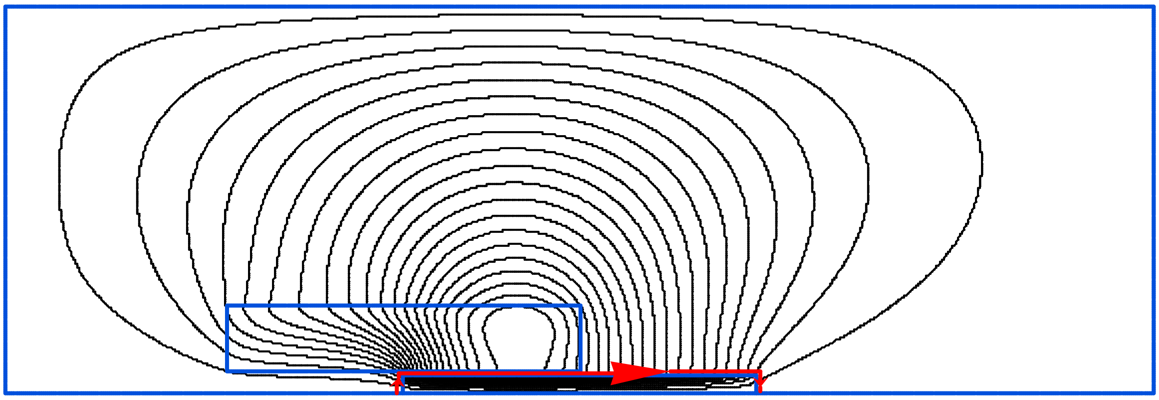
На картине магнитного поля сплошными линиями обозначены линии функции магнитного потока (силовые линии). Число силовых линий $n = 20$. На силовой линии значение функции магнитного потока $\psi = const$. Максимальное значение индукции магнитного поля $B_{max} = 0{,}34\,Тл.$ Максимальное значение магнитного потока $\psi_{max} = 4{,}6 \cdot 10^{-5}$ $Вб$.

Задание контура интегрирования вблизи стального сердечника позволяет с помощью интегрального калькулятора *ELCUT* определить электромагнитную силу (тяговое усилие) $F_{эм} = 0{,}12\,Н$.

- Глубина погружения стального сердечника внутрь катушки $\lambda = 0{,}5L_0 = 80\,мм$. Число силовых линий $n = 20$. Максимальное значение магнитного потока $\psi_{max} = 16{,}4 \cdot 10^{-5}$ $Вб$, максимальное значение индукции магнитного поля $B_{max} = 0{,}80\,Тл.$ Электромагнитная сила $F_{эм} = 2{,}29\,Н$.



- Глубина погружения стального сердечника внутрь катушки $\lambda = L_0 = 160\,мм$. Число силовых линий $n = 20$. Максимальное значение магнитного потока $\psi_{max} = 25{,}9 \cdot 10^{-5}$ $Вб$, максимальное значение индукции магнитного поля $B_{max} = 1{,}27\,Тл.$ Электромагнитная сила $F_{эм} \approx 0{,}1\,Н$, что соответствует ошибке расчета, так как теоретической точки зрения электромагнитная сила должна быть равна нулю.



По результатам расчета картин магнитного поля катушки со стальным сердечником на рисунке построены зависимости $F_{эм} = F_{эм}(\lambda)$ и $L_{кат} = L_{кат}(\lambda)$.


Зависимость $F_{эм} = F_{эм}(\lambda)$ имеет специфический характер: сила достигает максимального значения вблизи среднего положения сердечника внутри катушки и убывает до нуля (пунктирная линия) при полном его погружении. Отсутствие внешнего магнитопровода, охватывающего катушку, существенно сказывается на величине электромагнитной силы при прочих равных условиях.

Зависимости силы $F_{эм} = F_{эм}(\lambda)$ соответствует характер изменения индуктивности катушки $L_{кат} = L_{кат}(\lambda)$, показанный на рисунке.


**Задача 2. Проводник в ферромагнитном пазу**

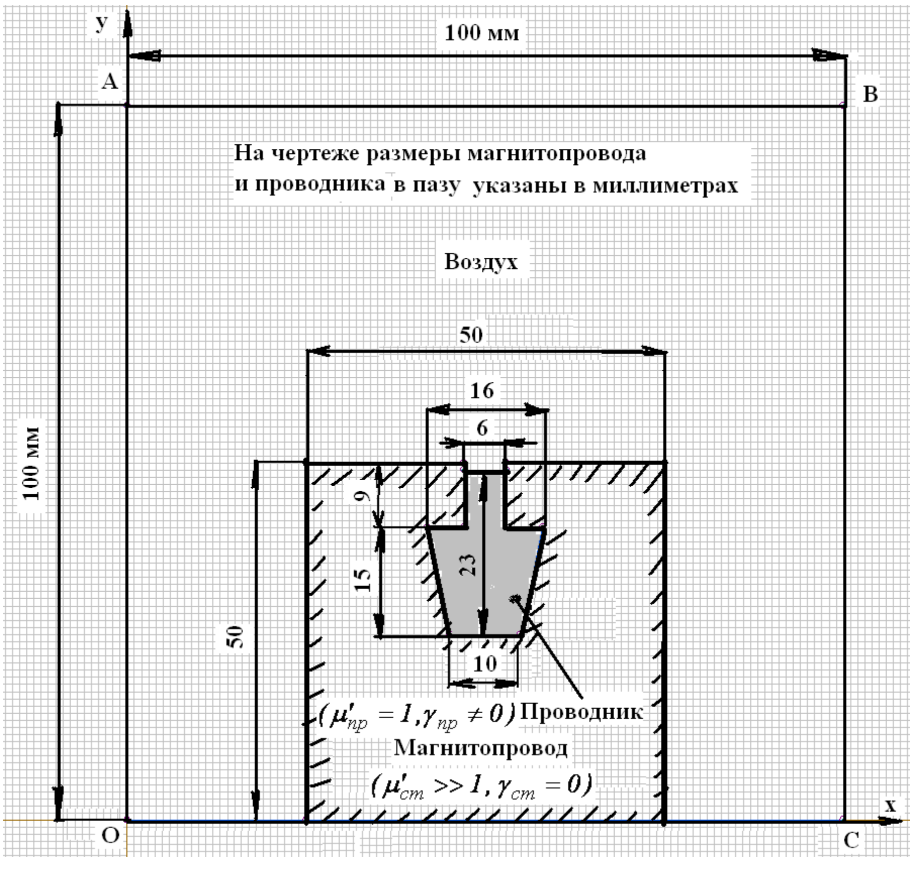
*Тип задачи.* Магнитное поле переменных токов.

*Класс модели.* Плоская (плоско-параллельная модель)

*Единицы длины.* Миллиметры.

*Система координат.* Декартовы координаты.

*Геометрия:*



По проводнику, изготовленному из алюминиевой шины сложного сечения, расположенному в ферромагнитном пазу, проходит переменный синусоидальный ток $i(t) = I_m\, sin(\omega t + \psi)$. Размеры поперечного сечения паза и проводника указаны на рисунке. Сердечник магнитопровода является шихтованным и состоит из тонких, изолированных друг от друга, пластин электротехнической стали.

Физические явления при прохождении переменного синусоидального тока по проводнику, помещенному в ферромагнитный паз, заключаются в неравномерном распределении плотности тока по высоте проводника и характеризуются как эффект «магнитного паза» или частный случай поверхностного эффекта. Вследствие поверхностного эффекта электрический ток будет вытесняться в открытую поверхность проводника. Причина поверхностного эффекта связана с вихревыми токами, которые по сечению проводника замыкаются в кольца, и возникают под воздействием переменного электромагнитного поля.

*Дано:*

Эскиз геометрии проводника сложного сечения в ферромагнитном пазу (на рисунке все размеры геометрии указаны в миллиметрах).

Площадь сечения проводника $S_{np} = 243\, мм^2$.

Относительная магнитная проницаемость воздуха $\mu' = 1$.

Относительная магнитная проницаемость алюминия $\mu' = 1$.

Относительная магнитная проницаемость стали $\mu' = 1000$.

Электропроводность алюминия $\gamma = 30 \cdot 10^6\ \frac{См}{м}$.

Ток в проводнике $i(t) = 250\, sin(314t + 90)\ A$.

*Задача:*

Найти распределение тока внутри проводника, его активное и индуктивное сопротивление, а также индуктивность проводника на единицу длины.

*Решение:*

При составлении расчетной модели проводника с током в ферромагнитном пазу внешние границы модели находятся на достаточно большом расстоянии от ферромагнитного паза, с тем, чтобы задание граничных условий на них не оказывало заметное влияние на расчет магнитной индукции непосредственно в области проводника. Исходя из этого, расчетную область граничим прямоугольником $OABC$ размерами $100мм \times 100мм$.

На внешней границе расчетной модели можно принять векторный магнитный потенциал $A = 0$.

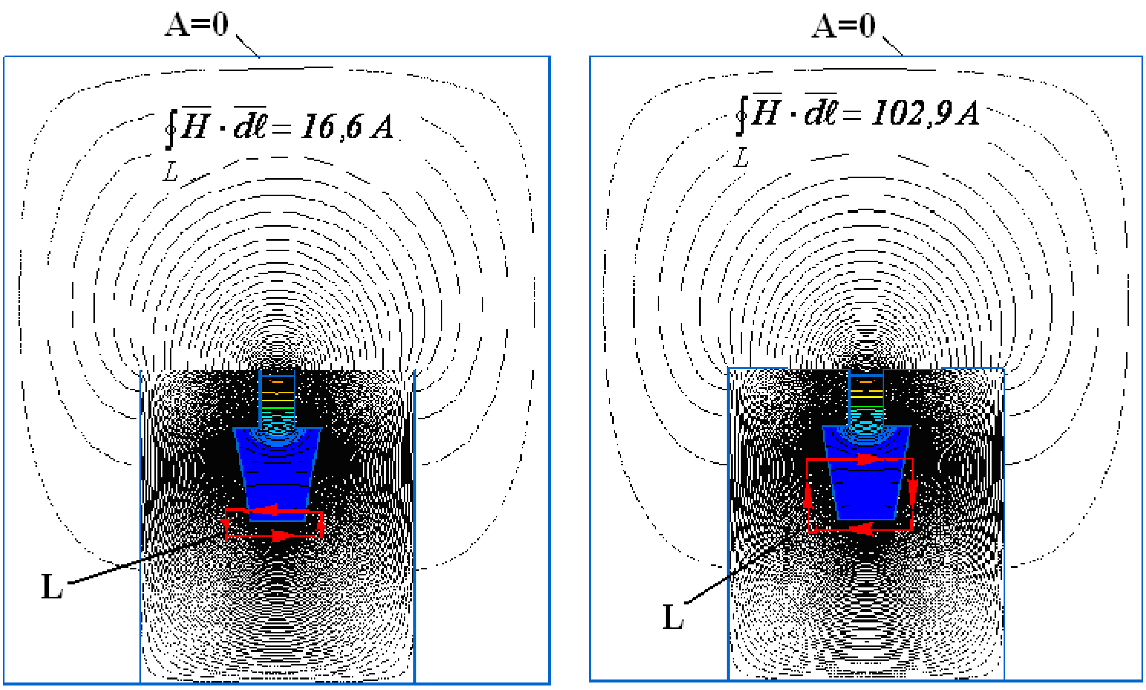
При описании физических свойств (объекта) шихтованного магнитопровода можно принять электропроводность паза $\gamma = 0$, так как влияние вихревые токов в толщине листов электротехнической стали незначительно.

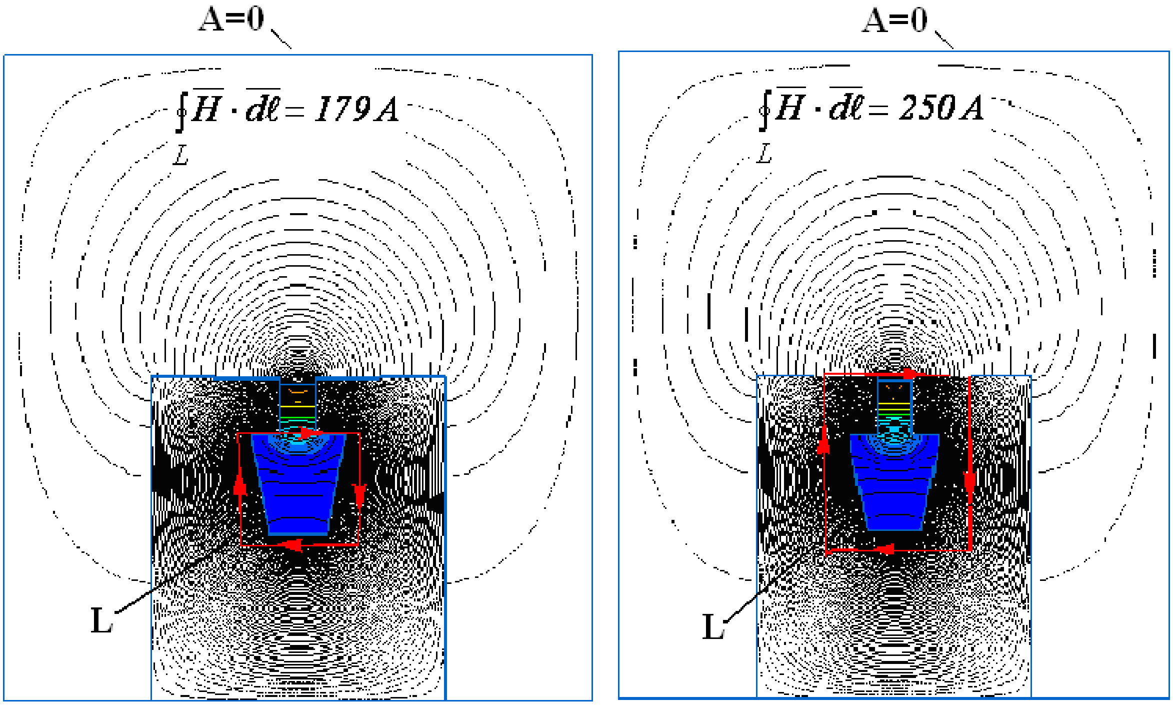
При описании физических свойств (объекта) проводника в пазу наряду с электропроводностью и относительной магнитной проницаемостью проводника в соответствии с исходными данными задаем источник поля, а именно выражение для тока в виде $i = 250 sin(360 * 50 * t + 90)$, причем в пакете $ELCUT$ аргумент синуса задается в градусах.

После этапов создания новой, пустой задачи *ELCUT,* ввода параметров задачи, создания геометрической модели, описания физических свойств материалов и ввода граничных условий приступаем к построению сетки конечных элементов и решению задачи.

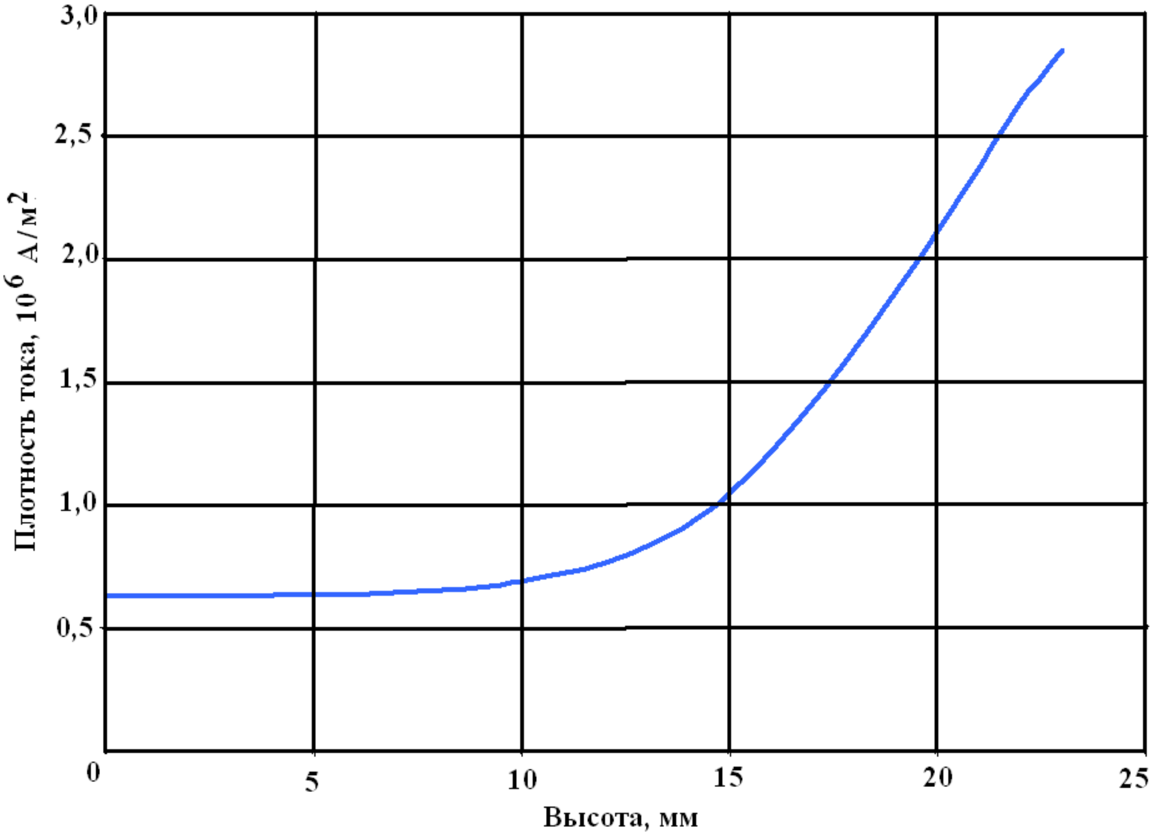
*Результат:*

Картина магнитного поля проводника с током в ферромагнитном пазу с различным охватом контуром интегрирования $L$ части поперечного сечения проводника. Различные значения циркуляции вектора напряженности магнитного поля вдоль замкнутого контура $\int\limits_L \overline{H} \cdot \overline{d\ell}$ даны на рисунках.




A=0
$\oint_L \overline{H} \cdot \overline{d\ell} = 179\,A$
L
A=0
$\oint_L \overline{H} \cdot \overline{d\ell} = 250\,A$
L

Распределение плотности тока по высоте паза (отсчет точек от дна паза)




Комплексное сопротивление (импеданс) проводника на единицу длины может быть получено из уравнения:

$$\underline{z}_{np} = \frac{\dot{U}_m}{\dot{I}_m} = R_{np} + jX_{np},$$

где $\dot{U}_m$ - комплексная амплитуда падения напряжения на единицу длины, получаемая в окне анализа результатов расчета при помощи команды **«Локальные значения»** в меню **Вид** (в этом режиме следует щелкнуть мышью любую точку сечения проводника).

В результате расчета находим:

$$\underline{z}_{np} = \frac{0{,}252\, e^{j162{,}8^\circ}}{250\, e^{j90^\circ}} = 0{,}001\, e^{j72{,}8^\circ} = (2{,}99 + j9{,}65)\cdot 10^{-4}\ \frac{Ом}{м}.$$

Индуктивность проводника в пазу

$$L_{np} = \frac{X_{np}}{\omega} = \frac{9{,}65\cdot 10^{-4}}{314} = 3{,}1\cdot 10^{-6}\ \frac{Гн}{м}.$$

Сравним сопротивления проводника в пазу на переменном и постоянном токе. На постоянном токе, вследствие равномерного распределения тока, сопротивление проводника в пазу на единицу длины

$(\ell_{np} = 1\,м)$:

$$R_{np} = \frac{\ell_{np}}{\gamma_{np} \cdot S_{np}} = \frac{1}{30 \cdot 10^6 \cdot 243 \cdot 10^{-6}} = 1{,}37 \cdot 10^{-4}\ \frac{Ом}{м}.$$

Из расчета видно, что на переменном токе за счет поверхностного эффекта активное сопротивление проводника оказывается существенно больше, чем на постоянном токе, и с ростом частоты тока будет только увеличиваться.

# 4. ВАРИАНТЫ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ПАКЕТЕ *ELCUT*

## 4.1. РАСЧЕТ ПОЛЯ И ЕМКОСТИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ПРОВОДЯЩИХ ТЕЛ

*Задание:* Рассчитать картину поля и емкость между двумя неподвижными проводящими заряженными телами, определить максимальное значение напряженности электрического поля. Расчет выполнить для двух вариантов:

а) заряженные тела находятся в воздухе $(\varepsilon' = 1)$;

б) заряженные тела находятся в трансформаторном масле с относительной диэлектрической проницаемостью $(\varepsilon' = 2{,}2)$.

*Объект* неподвижные заряженные проводящие тела (рис. 4.1 а, б, в, г):

а) эллиптический конденсатор;

б) софокусные гиперболические цилиндры;

в) плоскость и лежащий против нее гиперболический выступ;

г) тонкие полуплоскости, лежащие в одной плоскости на некотором расстоянии друг от друга.

*Тип задачи:* Электростатическое поле

*Класс модели:* Плоская, то есть поле является плоскопараллельным.

*Расчетная модель задачи.*

В плоскопараллельном поле линии равного электрического потенциала, совпадающие на чертеже со следами пересечения поверхности электродов плоскостью $x0y$, принимаются «отвердевшими» линиями.

*Геометрия модели*:

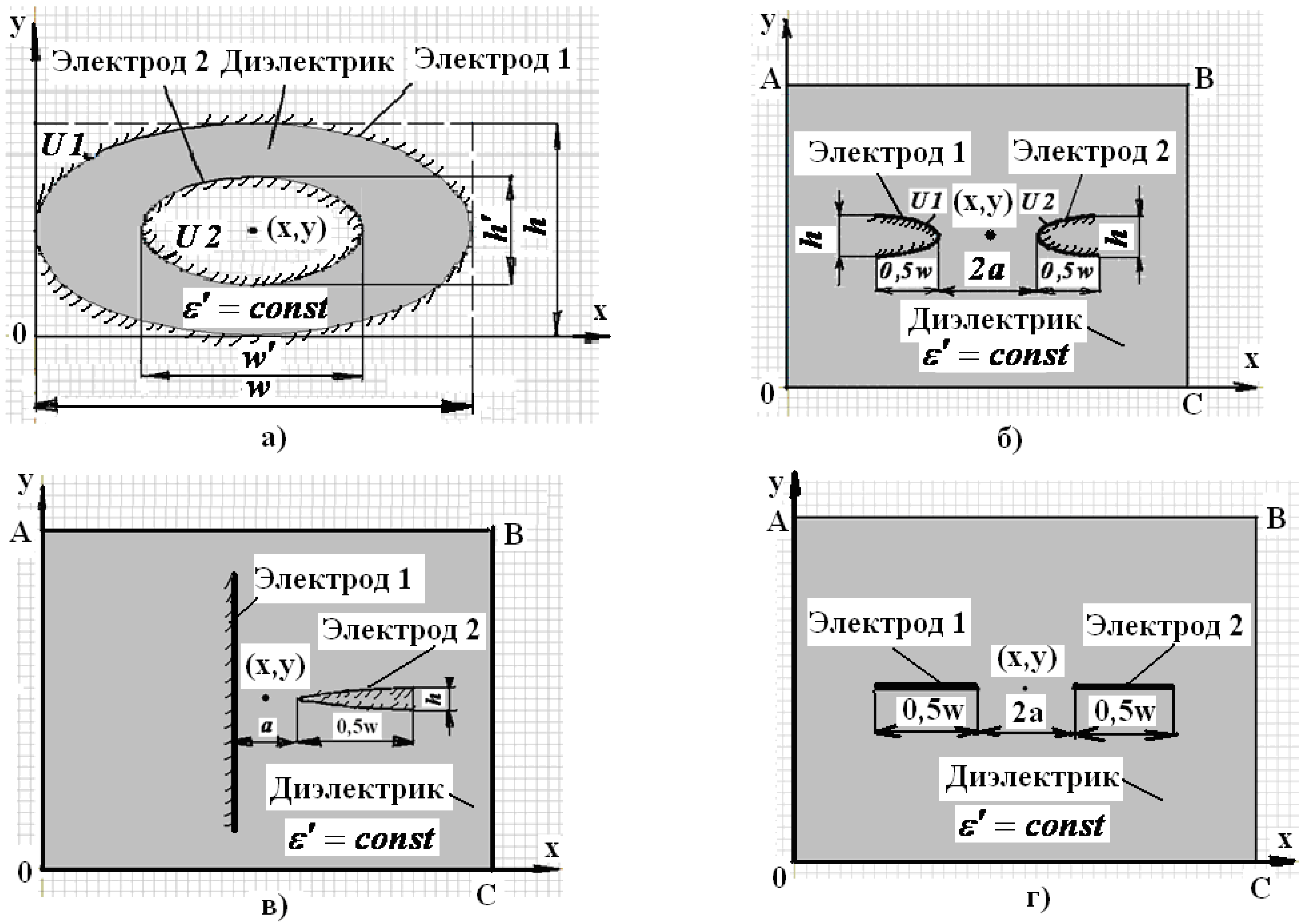



Рис. 4.1. Объект исследования: эллиптический конденсатор (а); софокусные гиперболические цилиндры (б); плоскость и лежащий против нее гиперболический выступ (в); тонкие полуплоскости, лежащие в одной плоскости на некотором расстоянии друг от друга (г).

*Исходные данные:*

| Вариант | Напряжение, В | | Размеры, см | | | | | Координаты центра модели, см | | Рис. 4.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $U_1$ | $U_2$ | $w$ | $h$ | $w'$ | $h'$ | $a$ | $x$ | $y$ | |
| 1 | 200 | -300 | 200 | 150 | 100 | 60 | - | 100 | 75 | а |
| 2 | 400 | -100 | 100 | 60 | - | - | 25 | 100 | 75 | б |
| 3 | 300 | -700 | 120 | 50 | - | - | 25 | 100 | 75 | в |
| 4 | 200 | -300 | 140 | - | - | - | 15 | 100 | 75 | г |
| 5 | 800 | -200 | 180 | 100 | 120 | 50 | - | 90 | 50 | а |
| 6 | -600 | 400 | 120 | 50 | - | - | 20 | 100 | 75 | б |
| 7 | 250 | -250 | 100 | 30 | - | - | 25 | 100 | 75 | в |
| 8 | -300 | 300 | 120 | - | - | - | 20 | 100 | 75 | г |
| 9 | 400 | -100 | 140 | 80 | 100 | 30 | - | 70 | 40 | а |
| 10 | 300 | -200 | 100 | 30 | - | - | 25 | 100 | 75 | б |
| 11 | 400 | 0 | 110 | 20 | - | - | 10 | 100 | 75 | в |
| 12 | 400 | -400 | 100 | - | - | - | 25 | 100 | 75 | г |
| 13 | 300 | -300 | 160 | 50 | 110 | 20 | - | 80 | 25 | а |
| 14 | 400 | -600 | 120 | 20 | - | - | 20 | 100 | 75 | б |
| 15 | 120 | -80 | 100 | 20 | - | - | 30 | 100 | 75 | в |
| 16 | 500 | -500 | 80 | - | - | - | 30 | 100 | 75 | г |
| 17 | 100 | -50 | 150 | 60 | 100 | 20 | - | 75 | 30 | а |
| 18 | 200 | -200 | 100 | 20 | - | - | 25 | 100 | 75 | б |
| 19 | 0 | 500 | 90 | 15 | - | - | 10 | 100 | 75 | в |
| 20 | 400 | -400 | 140 | - | - | - | 15 | 100 | 75 | г |
| 21 | 600 | -400 | 170 | 40 | 90 | 15 | - | 85 | 20 | а |
| 22 | 150 | -250 | 80 | 20 | - | - | 30 | 100 | 75 | б |
| 23 | 300 | -200 | 100 | 15 | - | - | 10 | 100 | 75 | в |
| 24 | -200 | 300 | 110 | - | - | - | 15 | 100 | 75 | г |
| 25 | 500 | -500 | 160 | 90 | 70 | 45 | - | 80 | 45 | а |
| 26 | 700 | -300 | 60 | 20 | - | - | 35 | 100 | 75 | б |
| 27 | 400 | -600 | 90 | 10 | - | - | 15 | 100 | 75 | в |
| 28 | -700 | 300 | 120 | - | - | - | 10 | 100 | 75 | г |
| 29 | 1000 | 0 | 190 | 100 | 130 | 30 | - | 95 | 50 | а |
| 30 | 800 | -200 | 100 | 20 | - | - | 25 | 100 | 75 | б |

Примечание. Рекомендуемый размер расчетной области (рис. 4.1 б, в, г) $200см \times 150см$ (на внешней границе области принять потенциал $U = 0$).

## 4.2. РАССТЕКАНИЕ ТОКОВ С ЗАЗЕМЛИТЕЛЕЙ

*Задание:* Исследовать поле одиночного заземлителя заданной геометрии и оценить влияние этого поля на человека. Для этого построить зависимости распределения потенциала вдоль поверхности земли и плотности тока вдоль оси $r$ (оси вращения) при заданной глубине залегания в однородном и неоднородном грунте с заданными проводимостями верхнего и нижнего слоя. Рассчитать значение полного тока, стекающего с поверхности заземлителя. Найденное значение тока использовать для расчета сопротивления заземления.

*Объект* одиночный заземлитель (рис. 4.1 а, б, в, г):

а) дисковый;

б) шаровой;

в) кольцевой;

г) стержневой.

*Тип задачи:* Электрическое поле постоянного тока

*Класс модели:* Осесимметричная.

*Расчетная модель задачи*

Условие симметрии в данной задаче означает равенство нулю нормальной составляющей плотности тока $(J_n = 0)$. Модель следует расположить горизонтально, поскольку в пакете *ELCUT* осью симметрии может быть только горизонтальная ось.

*Граничные условия:*

Внешние границы расчетной модели должны быть расположены таким образом, чтобы имитировать бесконечное удаление (отсутствие изменение поля в нормальном направлении к границе).

*Граничные условия:*

поверхность заземлителя – заданный потенциал $(U = U_0 = 6\ кВ)$;

бесконечно-удаленные границы – нулевой потенциал $(U = 0)$;

ось симметрии нормальная составляющая плотности тока $(J_n = 0)$;

поверхность земли $(J_n = 0)$.

*Геометрия модели:*

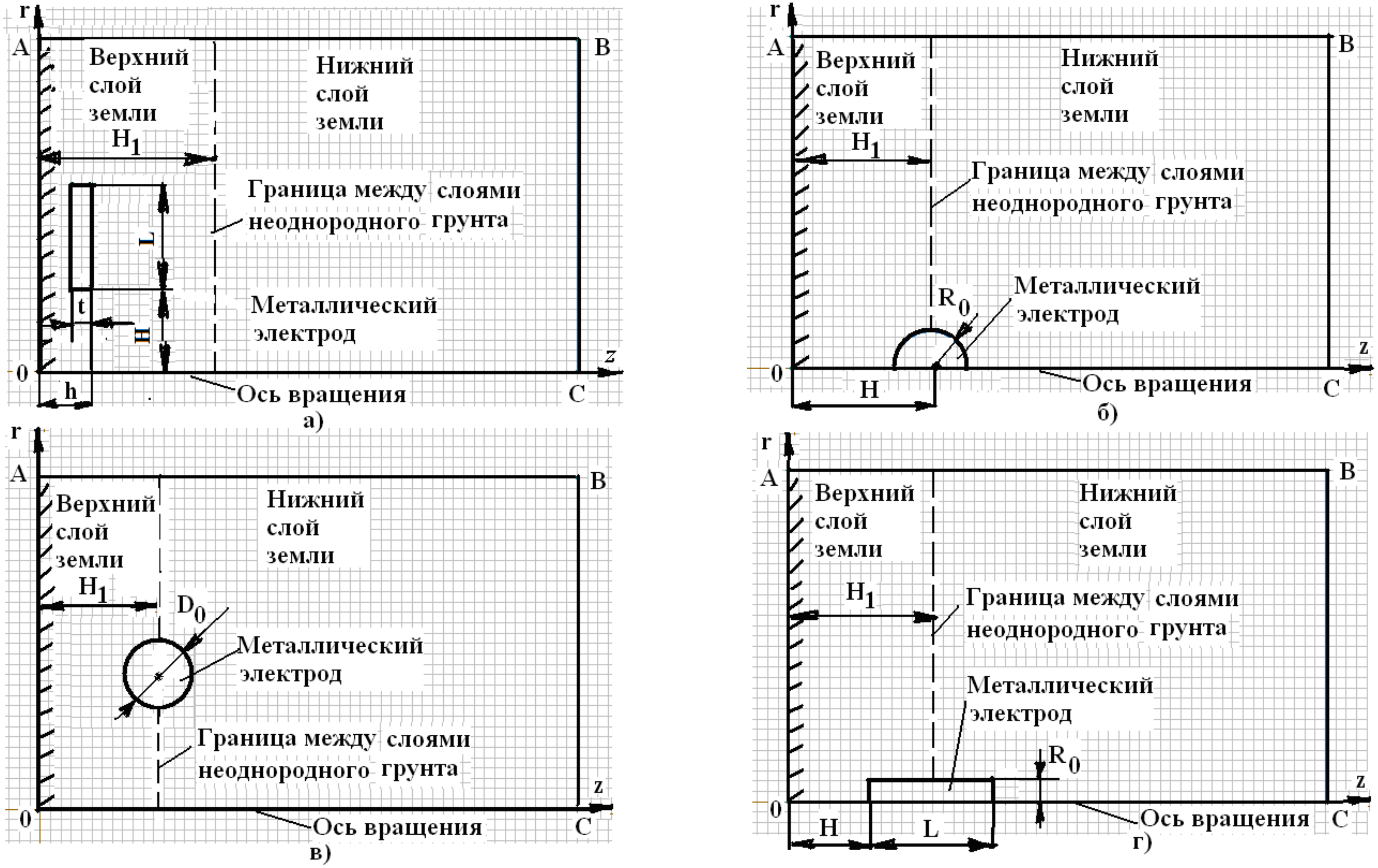



Рис. 4.2. Конструкции одиночных заземлителей в грунте: дисковый (а), шаровой (б), кольцевой (в), стержневой (г).

*Исходные данные:*

| Вариант | Размеры, см | | | | | | | Удельное сопротивление грунта, $Ом \cdot м$ | | Рис. 4.2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $H_1$ | $H$ | $L$ | $R_0$ | $D_0$ | $t$ | $h$ | $\rho_1$ | $\rho_2$ | |
| 1 | 40 | 20 | 60 | - | - | 5 | 30 | 300 | 100 | а |
| 2 | 50 | 50 | - | 10 | - | - | - | 100 | 50 | б |
| 3 | 80 | - | - | - | 10 | - | - | 20 | 50 | в |
| 4 | 30 | 20 | 10 | 8 | - | - | - | 300 | 40 | г |
| 5 | 80 | 30 | 40 | - | - | 8 | 20 | 100 | 50 | а |
| 6 | 30 | 4 | - | 8 | - | - | - | 300 | 50 | б |
| 7 | 90 | - | - | - | 5 | - | - | 40 | 20 | в |
| 8 | 60 | 40 | 20 | 6 | - | - | - | 300 | 100 | г |
| 9 | 40 | 25 | 50 | - | - | 10 | 40 | 100 | 50 | а |
| 10 | 50 | 30 | - | 6 | - | - | - | 20 | 50 | б |
| 11 | 80 | - | - | - | 15 | - | - | 300 | 40 | в |
| 12 | 30 | 20 | 10 | 10 | - | - | - | 100 | 50 | г |
| 13 | 80 | 40 | 30 | - | - | 6 | 25 | 300 | 50 | а |
| 14 | 30 | 20 | - | 10 | - | - | - | 40 | 20 | б |
| 15 | 90 | - | - | - | 8 | - | - | 300 | 100 | в |
| 16 | 60 | 40 | 20 | 5 | - | - | - | 100 | 50 | г |
| 17 | 40 | 15 | 30 | - | - | 8 | 30 | 20 | 50 | а |
| 18 | 50 | 40 | - | 5 | - | - | - | 300 | 40 | б |
| 19 | 80 | - | - | - | 12 | - | - | 100 | 50 | в |
| 20 | 30 | 20 | 10 | 8 | - | - | - | 300 | 50 | г |
| 21 | 80 | 10 | 45 | - | - | 15 | 30 | 40 | 20 | а |
| 22 | 30 | 30 | - | 10 | - | - | - | 300 | 100 | б |
| 23 | 90 | - | - | - | 4 | - | - | 100 | 50 | в |
| 24 | 60 | 30 | 30 | 6 | - | - | - | 20 | 50 | г |
| 25 | 30 | 35 | 60 | - | - | 12 | 35 | 300 | 40 | а |
| 26 | 80 | 40 | - | 15 | - | - | - | 100 | 50 | б |
| 27 | 30 | - | - | - | 6 | - | - | 300 | 50 | в |
| 28 | 90 | 70 | 20 | 10 | - | - | - | 40 | 20 | г |
| 29 | 60 | 25 | 70 | - | - | 16 | 40 | 100 | 50 | а |
| 30 | 80 | 60 | - | - | 7 | - | - | 20 | 50 | б |

Примечание. Рекомендуемый размер расчетной области модели для всех вариантов (рис. 4.2 а, б, в, г) - $1{,}5\,м \times 2{,}5\,м$.

Приближенные значения удельных сопротивлений грунтов

( $\rho_1$ - верхний слой грунта, $\rho_2$ - нижний слой грунта)

| Наименование грунта | $\rho,\quad Ом \cdot м$ |
|---|---|
| Песок | *300* |
| Суглинок | *100* |
| Глина | *50* |
| Садовая земля | *20* |
| Торф | *40* |

## 4.3. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТА ПОСТОЯННОГО ТОКА И ЕГО ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

*Задание:* Рассчитать магнитное поле электромагнита постоянного тока заданной геометрии при значениях рабочего зазора $\delta = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10$ и $12 мм$. Определить интегральные характеристики поля, а именно зависимости индуктивности $L = L(\delta)$ (инверсной индуктивности $L^{-1} = L^{-1}(\delta)$) обмотки и тягового усилия $F_{эм} = F_{эм}(\delta)$ от хода якоря. Расчет выполнить для двух вариантов:

1) без учета нелинейных свойств материала магнитопровода, принять относительную магнитную проницаемость стали $\mu'_{ст} = 1000$;
2) с учетом нелинейных свойств материала сердечника и якоря, то есть кривой намагничивания стали $B = B(H)$.

*Объект*: электромагнит постоянного тока (рис. 4.3 а, б, в, г)

а) с комбинированным якорем, торцами якоря и стопа в виде усеченного конуса;

б) с внешним притягивающимся якорем;

в) с втяжным якорем;

г) с комбинированным якорем, с плоскими торцами якоря и стопа.

*Тип задачи:* Магнитное поле постоянного тока (магнитостатическое поле).

*Класс модели:* Плоская, поле является плоскопараллельным.

*Геометрия модели:*

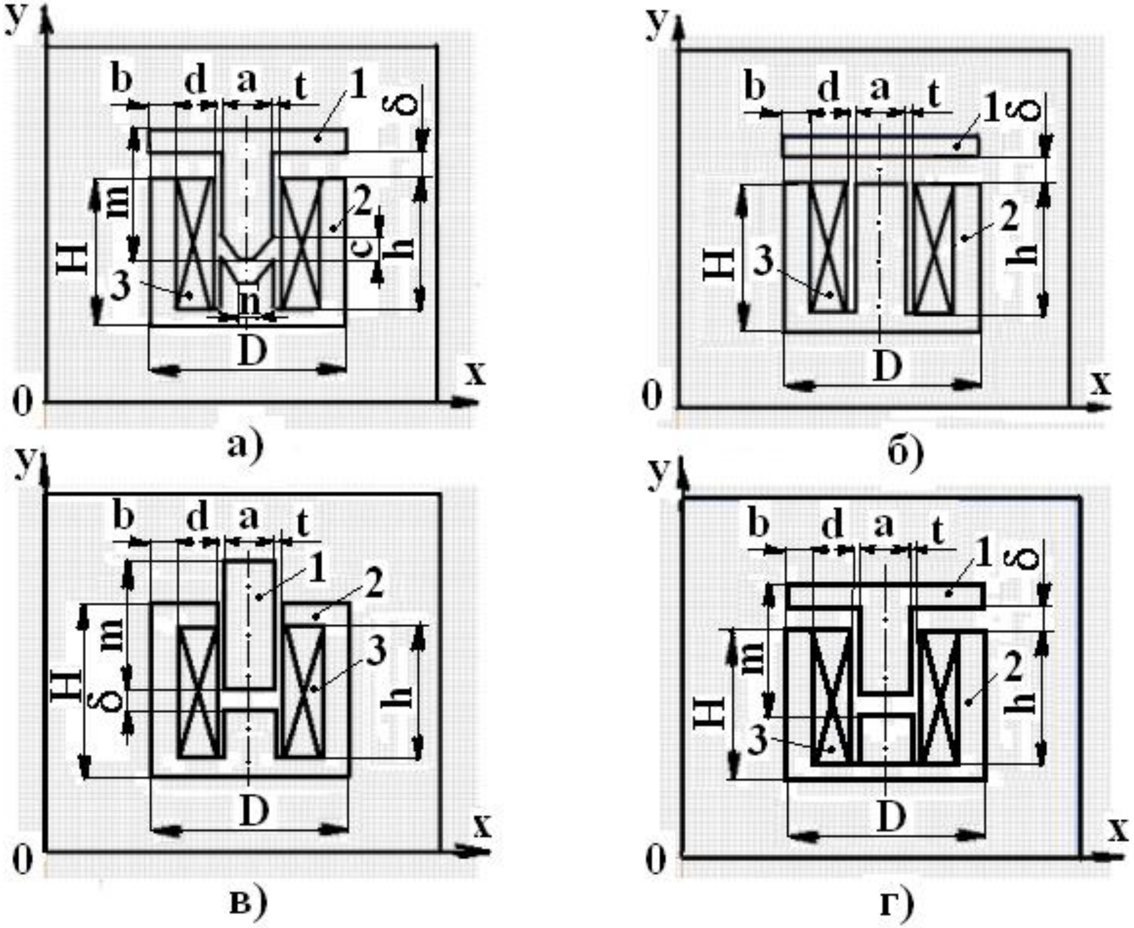



Рис. 4.3. Электромагнит постоянного тока (1 – якорь, 2 – сердечник, 3 – обмотка): а) с комбинированным якорем в форме усеченного конуса, б) с внешним притягивающимся якорем, в) с втяжным якорем, г) с комбинированным якорем и плоскими торцами якоря и стопа.

*Исходные данные:*

| Вариант | Размеры, мм | | | | | | | | | Рис. 4.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $H$ | $D$ | $a$ | $b$ | $d$ | $c$ | $n$ | $m$ | $t$ | |
| 1 | 110 | 81 | 20 | 10 | 20 | 5 | 10 | 70 | 0,5 | а |
| 2 | 140 | 104 | 36 | 18 | 15 | - | - | - | 1,0 | б |
| 3 | 120 | 65 | 24 | 12 | 8 | - | - | 50 | 0.5 | в |
| 4 | 100 | 62 | 16 | 8 | 14 | - | - | 70 | 1,0 | г |
| 5 | 130 | 112 | 30 | 15 | 25 | 10 | 20 | 95 | 1,0 | а |
| 6 | 100 | 62 | 16 | 8 | 14 | - | - | - | 1,0 | б |
| 7 | 170 | 104 | 28 | 14 | 23 | - | - | 100 | 1,0 | в |
| 8 | 160 | 73 | 22 | 11 | 14 | - | - | 95 | 0,5 | г |
| 9 | 140 | 103 | 36 | 18 | 15 | 4 | 6 | 98 | 0,5 | а |
| 10 | 120 | 66 | 24 | 12 | 8 | - | - | - | 1,0 | б |
| 11 | 110 | 81 | 20 | 10 | 20 | - | - | 60 | 0.5 | в |
| 12 | 130 | 112 | 30 | 15 | 25 | - | - | 75 | 1,0 | г |
| 13 | 150 | 100 | 26 | 13 | 23 | 7 | 14 | 113 | 1.0 | а |
| 14 | 170 | 104 | 28 | 14 | 23 | - | - | - | 1,0 | б |
| 15 | 160 | 73 | 22 | 11 | 14 | - | - | 100 | 0.5 | в |
| 16 | 140 | 104 | 36 | 18 | 15 | - | - | 80 | 1,0 | г |
| 17 | 100 | 61 | 16 | 8 | 14 | 8 | 8 | 60 | 0.5 | а |
| 18 | 160 | 74 | 22 | 11 | 14 | - | - | - | 1,0 | б |
| 19 | 120 | 65 | 24 | 12 | 8 | - | - | 70 | 0.5 | в |
| 20 | 170 | 115 | 34 | 17 | 23 | - | - | 110 | 0,5 | г |
| 21 | 120 | 66 | 24 | 12 | 8 | 10 | 14 | 80 | 1,0 | а |
| 22 | 110 | 81 | 20 | 10 | 20 | - | - | - | 1,0 | б |
| 23 | 130 | 111 | 30 | 15 | 25 | - | - | 70 | 0.5 | в |
| 24 | 160 | 114 | 36 | 18 | 20 | - | - | 100 | 1,0 | г |
| 25 | 160 | 73 | 22 | 11 | 14 | 8 | 14 | 111 | 0.5 | а |
| 26 | 130 | 112 | 30 | 15 | 25 | - | - | - | 1,0 | б |
| 27 | 100 | 61 | 16 | 8 | 14 | - | - | 50 | 0.5 | в |
| 28 | 150 | 132 | 40 | 20 | 25 | - | - | 90 | 1,0 | г |
| 29 | 170 | 104 | 28 | 14 | 23 | 10 | 14 | 114 | 1,0 | а |
| 30 | 140 | 103 | 36 | 18 | 15 | - | - | - | 0.5 | б |

Примечание. В таблице размер $m$ указан при рабочем зазоре $\delta = 0$. Для всех рассматриваемых вариантов принять плотность тока в катушке $J = 2 \cdot 10^6\ А/м^2$, коэффициент заполнения по меди $k_з = 0,6$, число витков катушки $w = 1000$.

*Расчетная модель задачи:*

Относительная магнитная проницаемость воздуха и катушки $\mu' = 1$.

Кривая намагничивания $B = B(H)$ для материала сердечника и якоря (марка стали 2211)

| $H, А/м$ | 0 | 40 | 80 | 120 | 160 | 200 | 600 | 1000 | 8000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B, Тл$ | 0 | 0,12 | 0,4 | 0,63 | 0,8 | 0,95 | 1,29 | 1,44 | 1,7 |

Рекомендуемый размер расчетной области модели для всех вариантов - $300мм \times 300мм$.

При описании свойств объекта в модели катушки с током необходимо задать намагничивающую силу катушки $F_{кат}$, предварительно рассчитав ее по формуле:

$$F_{кат} = J \cdot d \cdot h \cdot k_з .$$

Флагом сделать отметку: проводники соединены «параллельно».

Замкнутый контур для вычисления тягового усилия должен окружать якорь. Его необходимо расположить в середине воздушного зазора между якорем и сердечником. Определяя контур интегрирования, рекомендуется использовать сильное увеличение масштаба, чтобы избежать прилипания линий контура к сторонам модели.

## 4.4. ВЫТЕСНЕНИЕ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА В ШИНЕ, УЛОЖЕННОЙ В ПАЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

*Задание*: Рассчитать картину распределения тока в пазу электрической машины (для одного и двух проводников в пазу). Построить график распределения плотности тока по сечению проводников в пазу для частот *5, 50* и *400 Гц* (в качестве начала системы координат принять дно паза).

На каждой из частот с помощью мастера импеданса и мастера индуктивностей определить активное сопротивление и индуктивность проводников.

Т*ип задачи*: Магнитное поле переменного тока. Среды линейные.

*Класс задачи:* Плоская (поле плоско-параллельное).

*Объект*: один и два проводника в ферромагнитном пазу (рис. 4.4).

*Геометрия модели:*

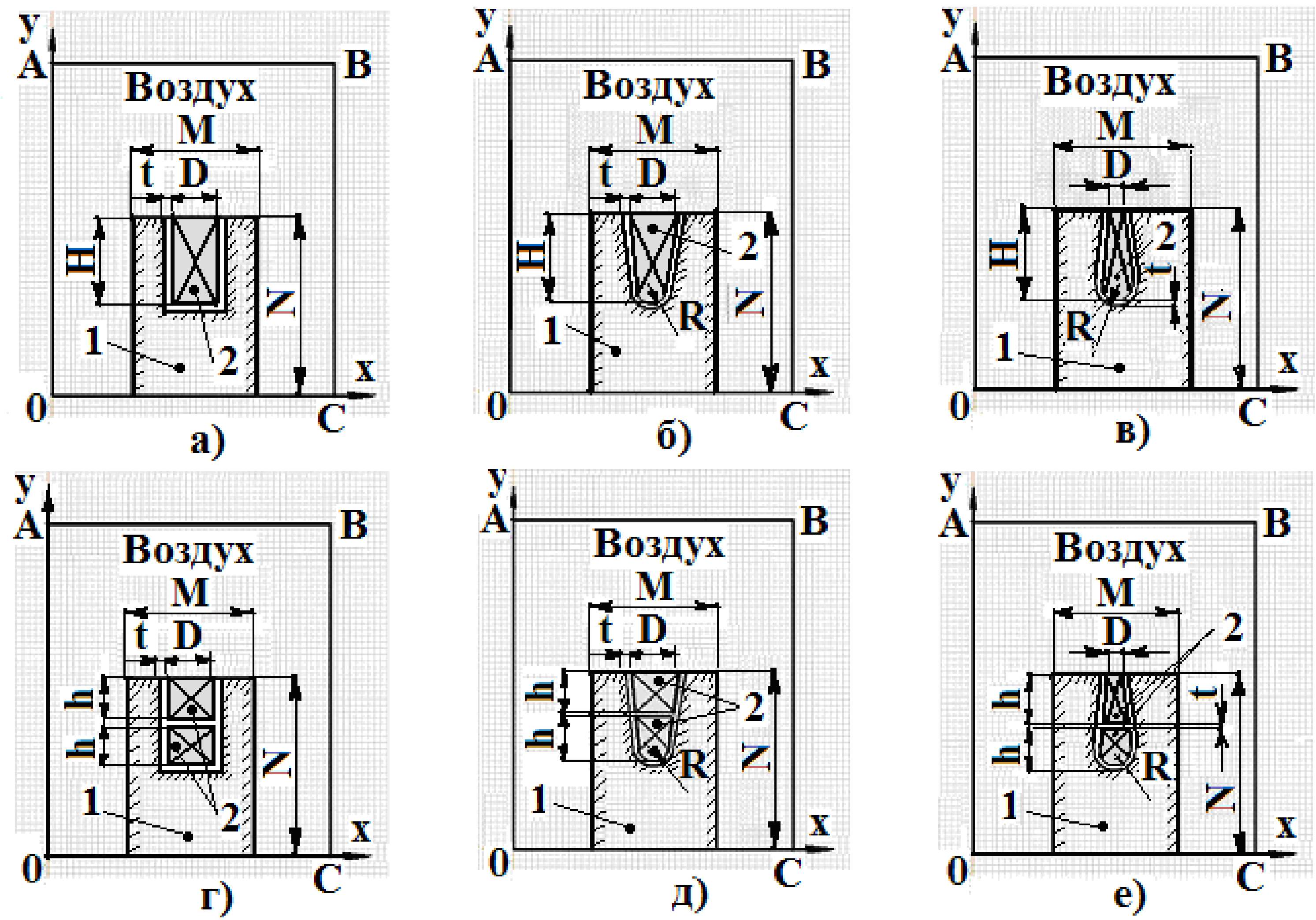



Рис. 4.4. Эскизы моделируемых ферромагнитных пазов с одним (а, б, в) и двумя (г, д, е) проводниками:

1 – шихтованный магнитопровод; 2 – один или два проводника с током в пазу

*Исходные данные:*

| Вариант | Размеры, мм | | | | | | | Ток $A$ | Тип паза рис. 4.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $H$ | $D$ | $M$ | $N$ | $R$ | $h$ | $t$ | $I_m$ | |
| 1 | 20 | 6 | 50 | 50 | - | 9,5 | 1 | 200 | а, г |
| 2 | 30 | 18 | 54 | 60 | 7 | 14 | 2 | 650 | б, д |
| 3 | 23 | 3 | 50 | 55 | 6 | 11 | 1 | 300 | в, е |
| 4 | 26 | 10 | 50 | 60 | - | 12 | 2 | 350 | а, г |
| 5 | 25 | 20 | 65 | 60 | 8 | 12 | 1 | 550 | б, д |
| 6 | 26 | 4 | 55 | 45 | 8 | 12 | 2 | 450 | в, е |
| 7 | 21 | 8 | 40 | 70 | - | 10 | 1 | 500 | а, г |
| 8 | 28 | 18 | 65 | 60 | 7 | 13 | 2 | 600 | б, д |
| 9 | 19 | 5 | 60 | 55 | 10 | 9 | 1 | 250 | в, е |
| 10 | 28 | 12 | 55 | 75 | - | 13 | 2 | 300 | а, г |
| 11 | 23 | 18 | 60 | 65 | 6 | 11 | 1 | 500 | б, д |
| 12 | 30 | 5 | 55 | 45 | 10 | 14 | 2 | 400 | в, е |
| 13 | 17 | 7 | 30 | 45 | - | 8,5 | 1 | 450 | а, г |
| 14 | 26 | 20 | 60 | 65 | 7 | 12 | 2 | 500 | б, д |
| 15 | 31 | 4 | 50 | 65 | 8 | 15 | 1 | 200 | в, е |
| 16 | 26 | 10 | 60 | 60 | - | 12 | 2 | 250 | а, г |
| 17 | 27 | 8 | 60 | 65 | 4 | 13 | 1 | 500 | б, д |
| 18 | 25 | 6 | 50 | 65 | 12 | 12 | 1 | 350 | в, е |
| 19 | 29 | 8 | 45 | 65 | - | 14 | 1 | 400 | а, г |
| 20 | 24 | 19 | 60 | 65 | 5 | 11 | 2 | 650 | б, д |
| 21 | 17 | 3 | 50 | 45 | 6 | 8 | 1 | 500 | в, е |
| 22 | 32 | 12 | 55 | 70 | - | 15 | 2 | 200 | а, г |
| 23 | 29 | 20 | 60 | 65 | 7 | 14 | 1 | 700 | б, д |
| 24 | 24 | 5 | 40 | 55 | 10 | 11 | 2 | 300 | в, е |
| 25 | 33 | 14 | 65 | 75 | - | 16 | 1 | 350 | а, г |
| 26 | 23 | 22 | 60 | 65 | 8 | 11 | 1 | 700 | б, д |
| 27 | 21 | 4 | 45 | 65 | 8 | 10 | 1 | 450 | в, е |
| 28 | 28 | 14 | 50 | 60 | - | 13 | 2 | 500 | а, г |
| 29 | 21 | 19 | 60 | 65 | 6 | 10 | 1 | 800 | б, д |
| 30 | 26 | 6 | 50 | 70 | 12 | 12 | 2 | 300 | в, е |

Примечание. Для всех рассматриваемых вариантов рекомендуемый размер расчетной области - $100мм \times 100мм$.

- относительная магнитная проницаемость стали $\mu'_{cm} = 1000$;
- относительная магнитная проницаемость медной или алюминиевой шины и воздуха $\mu' = 1$;
- удельная электропроводность материала проводника (для четных вариантов задания – медная шина; для нечетных вариантов задания – алюминиевая шина):

  для меди $\gamma_{np} = 57 \cdot 10^6 \; См/м$;

  для алюминия $\gamma_{np} = 30 \cdot 10^6 \; См/м$;
- сталь паза шихтованная, поэтому её электропроводность вдоль проводника равна $\gamma = 0$;
- при наличии в пазу двух проводников ток в них течет одного направления (в каждой шине течет ток равный $0{,}5I_m$).

*Граничные условия:*

На внешней границе $0 - A - B - C$ расчетной области (рис. 4.4) векторный магнитный потенциал $A = 0$.

## Библиографический список


1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. Учебник – 9-е изд. перераб. и доп. – М.: Гардарики. 2001. – 317 с.: ил.
2. Теоретические основы электротехники. В 3-х т. Учебник для вузов. Том 3. – 4-е изд./К.С. Демирчян, Л.Р. Нейман, Н.В. Коровкин, В.Л. Чечурин. – Спб.: Питер, 2003.
3. Сильвестр П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров – электриков: Пер. с англ. - М.: Мир, 1986.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1979. - 392 с.
5. ELCUT. Моделирование двумерных полей методом конечных элементов. Версия 5.5. Руководство пользователя. - http://www.tor.ru/elcut.