

С. С. Селюк

Численная реализация в программном комплексе
«ELCUT» математической модели для определения
коэффициентов удельной эквивалентной
теплопроводности неоднородных тел
прямоугольного сечения

Описана компьютерная модель в программном комплексе «ELCUT» для вычисления коэффициента удельной эквивалентной теплопроводности (КУЭТ) неоднородных тел в направлении осей декартовой системы координат, построенная на основе соответствующей математической модели (ММ). Проведено сравнение распределений температуры в многожильных электрических проводах, вычисленное в строгой постановке и с использованием КУЭТ.

**1. Задача вычисления КУЭТ
для прямоугольной неоднородной области**

Математическое моделирование технических устройств существенно осложняется наличием неоднородных материалов в их конструкциях. ММ можно упростить, если неоднородные конструкции заменить эквивалентными, в смысле некоторого критерия, однородными конструкциями. В данной работе предложена модель для расчёта КУЭТ в твердых неоднородных телах. Условием эквивалентности является равенство потоков тепла в неоднородной области и эквивалентной однородной области [1, 2].

Подобные исследования ранее проводились для определения интегральных характеристик процесса передачи тепла [3]. В данной работе предлагаются результаты расчётов распределения температурного поля (ТП) с использованием КУЭТ.

1.1. КУЭТ неоднородной области с включениями произвольной формы

Рассмотрим прямоугольную многосвязную область Ω размера $a \times b$. Внешнюю границу Ω обозначим $\dot{\Omega}$, внутренние границы – $\dot{\Omega}_k$ ($k=1,2,\dots,n$). Подобласти Ω_k назовём включениями в Ω . Коэффициенты удельной теплопроводности Ω и Ω_k обозначим λ и λ_k соответственно.

Неоднородную область $\Omega^0 = \Omega \cup_{k=1}^n \Omega_k$ расположим в декартовой системе координат таким образом, чтобы левый нижний угол прямоугольника находился в точке $(0,0)$. Вертикальные границы Ω^0 , при этом принадлежат прямым $x=0$, $x=a$, горизонтальные $y=0$, $y=b$.

КУЭТ-ом в направлении оси $0x$ назовём коэффициент $\lambda_x^* = const$, характеризующий способность проводить тепло у однородной и односвязной области Ω^* с границей $\dot{\Omega}^*$, совпадающей по размерам с $\dot{\Omega}$. Значение λ_x^* должно быть таким, чтобы тепловой поток Φ_x^0 , входящий в область Ω^0 через границу на прямой $x=0$, был равен соответствующему потоку Φ_x^* в области Ω^* . При этом на $\dot{\Omega}$ и $\dot{\Omega}^*$ заданы одинаковые граничные условия:

$$\frac{\partial}{\partial y} T(x,0) = \frac{\partial}{\partial y} T(x,b) = \frac{\partial}{\partial y} T^*(x,0) = \frac{\partial}{\partial y} T^*(x,b) = 0. \quad (1)$$

Условие (1) означает отсутствие теплового обмена через верхнюю и нижнюю границы областей, $T_0 \neq T_1$ – известные постоянные значения температуры на правой и левой границах $\dot{\Omega}$ и $\dot{\Omega}^*$ соответственно.

Значение коэффициента теплопроводности λ_x^* эквивалентной однородной пластины Ω^* может быть рассчитано согласно формуле [1]

$$\lambda_x^* = -\Phi_x^0 / \int_0^b \frac{\partial}{\partial x} T^*(0,y) dy. \quad (2)$$

В [1] для $T^*(x,y)$ получено аналитическое выражение:

$$T^*(x,y) = \Delta T \cdot x/a + T_0, \quad \Delta T = T_1 - T_0, \quad (3)$$

и второй вариант формулы для вычисления КУЭТ:

$$\lambda_x^* = -\Phi_x^0 \cdot a / (b \cdot \Delta T) \quad (4)$$

Повторяя вывод формул (2) и (4), с точностью до замены переменной x на переменную y и константы a на константу b получаем формулы для вычисления λ_y^* – КУЭТ в направлении оси Oy :

$$\lambda_y^* = \Phi_y^0 / \int_0^b \frac{\partial}{\partial y} T^*(x, y) dx, \quad \lambda_y^* = -\Phi_y^0 \cdot b / (a \cdot \Delta T). \quad (5)$$

1.2. КУЭТ многожильных проводов

Для практических расчётов большой интерес представляет определение эквивалентных теплопроводностей неоднородных конструкций, состоящих из проводников и диэлектриков. Такие сочетания материалов имеют место практически в любом электротехническом устройстве.

Методика, описанная в 1.1, была апробирована на примере расчёта КУЭТ протяженных прямолинейных многожильных проводов. В их поперечном сечении (рис.2, изоляция затемнена) допустима двумерная постановка задачи расчёта температурного поля [1]. Аналитическое решение краевых задач в подобных областях затруднено. Поэтому для расчётов использовался пакет компьютерного моделирования физических полей «ELCUT 5.10». Выбор обусловлен тем, что его возможности позволяют вычислять интегралы в (2) и (5).

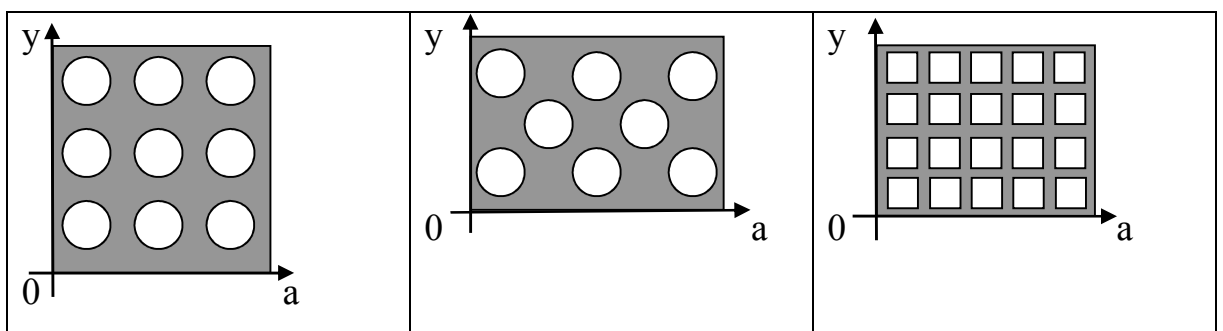


Рис. 1. Слева направо приведены: квадратно-гнездовая укладка (а), шахматная укладка (б), шины квадратного сечения (в)

Для расчётов КУЭТ каждого из вариантов укладки в программе «ELCUT» была создана задача для неоднородной области. Пример

геометрической модели для варианта А сечения провода (рис. 1) приведён на рис. 2.

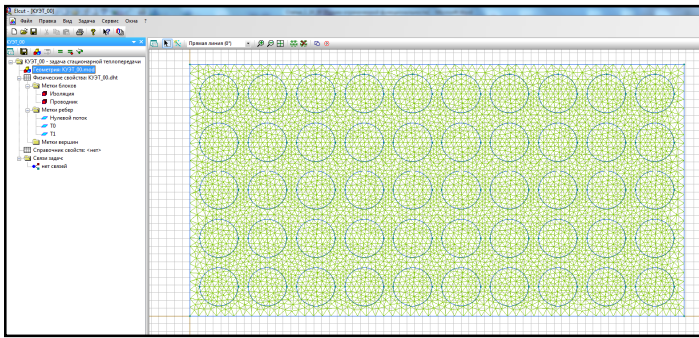


Рис. 2. Геометрическая модель «ELCUT» для квадратно-гнездовой укладки проводников (6156 узлов конечно-элементного разбиения)

Размеры области Ω^0 :
 $a = 12,75$ мм , $b = 6,5$ мм .
 Диаметр провода (включения) 1 мм . Расстояние между проводами, а также между проводом и границей равно 0,25 мм . Коэффициент удельной теплопроводности

изоляции равен 0,3 Вт/(К · М) , проводника (медь) – 389,6 Вт/(К · м) .

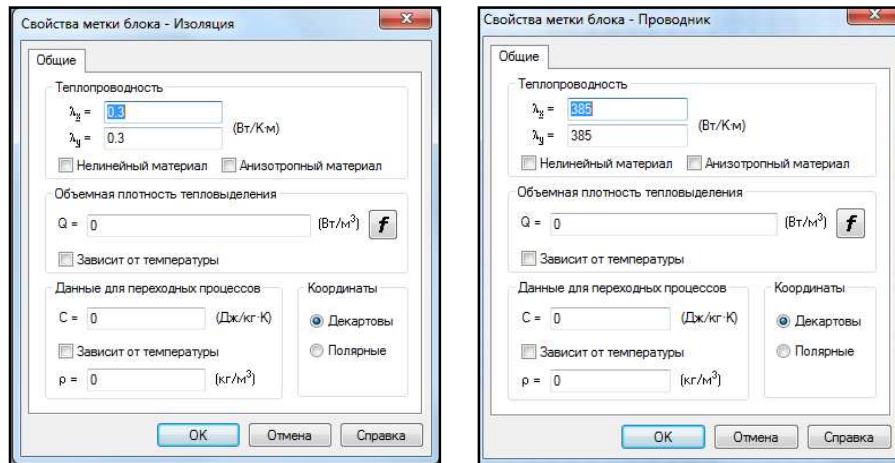


Рис. 3. Свойства меток ребер геометрической модели

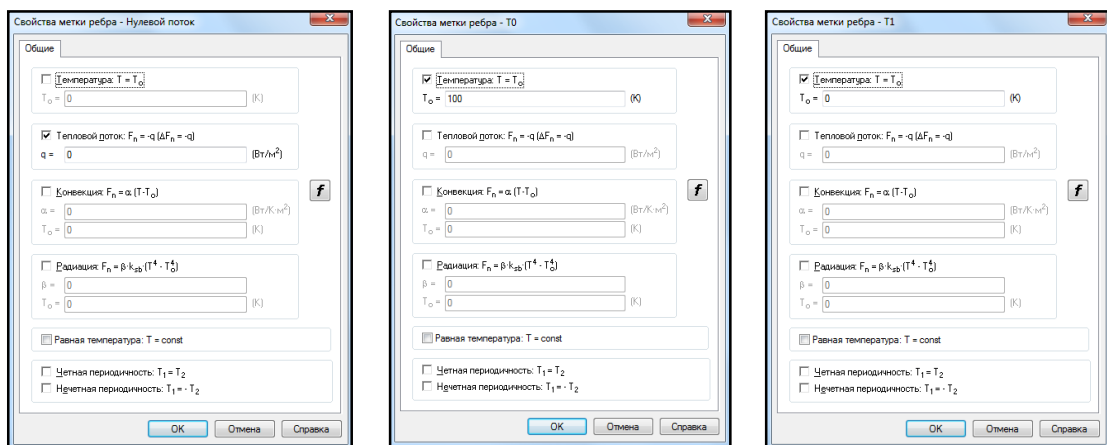


Рис. 4. Свойства меток ребер геометрической модели

В компьютерной модели физические свойства элементов расчётной области реализованы с помощью меток (рис. 3, рис. 4):

«Изоляция» – блок, соответствующий электро-изоляционному материалу;

«Проводник» – блок, соответствующий проводящему включению;

«Нулевой поток» – ребро нулевым граничным условием для плотности потока тепла (однородное условие Неймана для температуры);

«T0» – ребро с условием Дирихле (для проведённых расчётов $T = 100$ К);

«T1» – ребро с условием Дирихле (для проведённых расчётов $T = 0$ К).

Размерность температуры при задании граничных условий не влияет на значение КУЭТ. При необходимости её можно считать заданной и в градусах Цельсия, и в градусах Кельвина. Требуется только, чтобы на ребрах с метками T0 и T1 она была различной, обеспечивая, тем самым, поток тепла вдоль оси абсцисс. Картина стационарного температурного поля в неоднородной области, приведена на рис. 5. Тепловой поток 44,491 Вт рассчитан через левую границу (контур) Ω^0 .

Для вычисления $\int_0^b \frac{\partial}{\partial n} T^*(0, y) dy$ необходимо в задаче «ELCUT» для неоднородной области всем блокам присвоить одну и ту же метку, с безразлично каким коэффициентом удельной теплопроводности. В результате «ELCUT» решает краевую задачу для уравнения Лапласа, что обеспечивает вычисление необходимого значения интеграла.

Картина стационарного температурного поля в однородной области, приведена на рис. 6. Поверхностный интеграл от $grad(T)$, равный $50,98 \text{ K} \cdot \text{м}$, вычислен по левой границе Ω^* (контур выделен на рисунке). Заметим, что аналитическое значение данного интеграла, округлённое до второго знака после запятой, тождественно совпадает с аналитическим значением:

$\int_0^b \frac{\partial}{\partial x} (\Delta T \cdot x/a + T_0) dy = b \cdot \Delta T / a = 50,98$. В таблице 1 приведены результаты

расчётов КУЭТ для всех вариантов укладки. Перед дробной чертой записаны значения коэффициентов, для которых интегралы в (2) и (5)

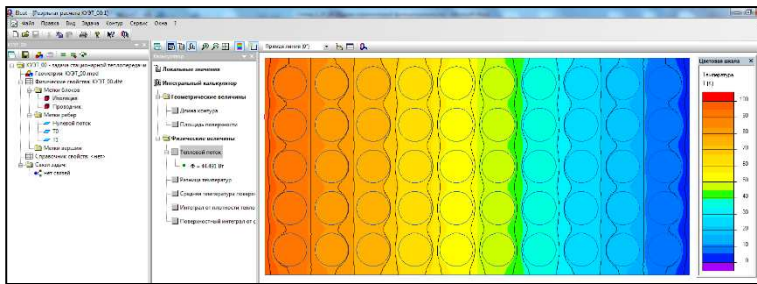


Рис. 5. Картина температурного поля в неоднородной области (практически все изотермы искривлены)

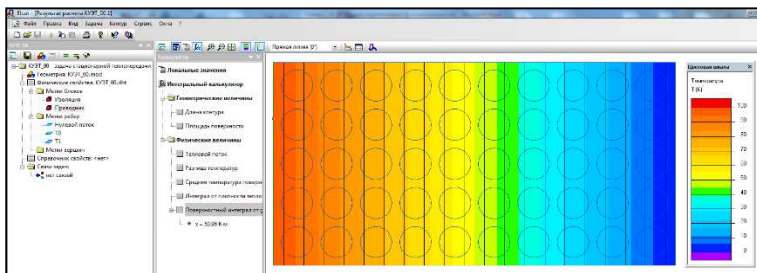


Рис. 6. Картина температурного поля в однородной области

вычислены с помощью калькулятора «ELCUT». За дробной чертой – значения коэффициентов, для расчёта которых использовались аналитические значения интегралов. Как видно из таблицы, различия между КУЭТ для этих случаев начинаются в четвертом знаке после запятой. Это свидетельствует о высокой

точности расчётов температурного поля и вычисления его интегральных характеристик в «ELCUT».

Таблица 1. КУЭТ в Вт/(К·м) (численное/аналитическое значение)

$\lambda_{\text{провода}} = 389,6$ $Вт/(К \cdot м)$ $\lambda_{\text{изоляции}} = 0,3$ $Вт/(К \cdot м)$	Варианты укладки (рис. 1)		
	а	б	в
λ_x^*	0,873 / 0,8732	0,753 / 0,7526	0,925 / 0,9254
λ_y^*	0,851 / 0,8513	0,779 / 0,7793	0,898 / 0,8982

При расчётах распределения ТП в Ω^* теплопроводящие свойства среды задавались тензором $\tilde{\lambda}^* = \text{diag}(\lambda_x^*, \lambda_y^*)$.

2. Вычислительные эксперименты

Геометрическая модель расчётной области, выбранной в качестве примера для апробации математической модели в ПК «ELCUT», приведена на рис. 7. Целью расчётов была проверка допустимости использования

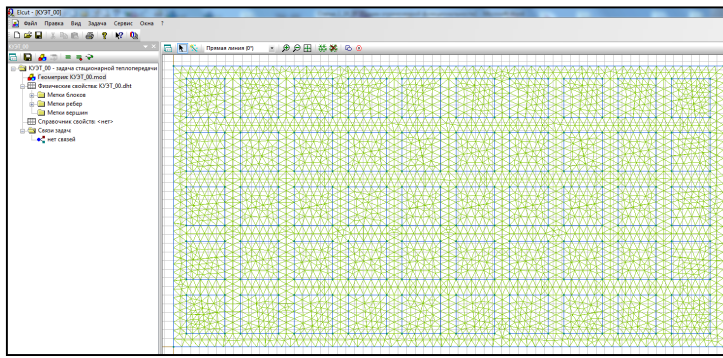


Рис. 7. Сечение исследуемого провода

КУЭТ для определения не только потоков тепла (критерий эквивалентности), но и сравнение распределения ТП в Ω^0 и Ω^* .

2.1. Стационарное распределение температуры с условиями второго и третьего рода на границах

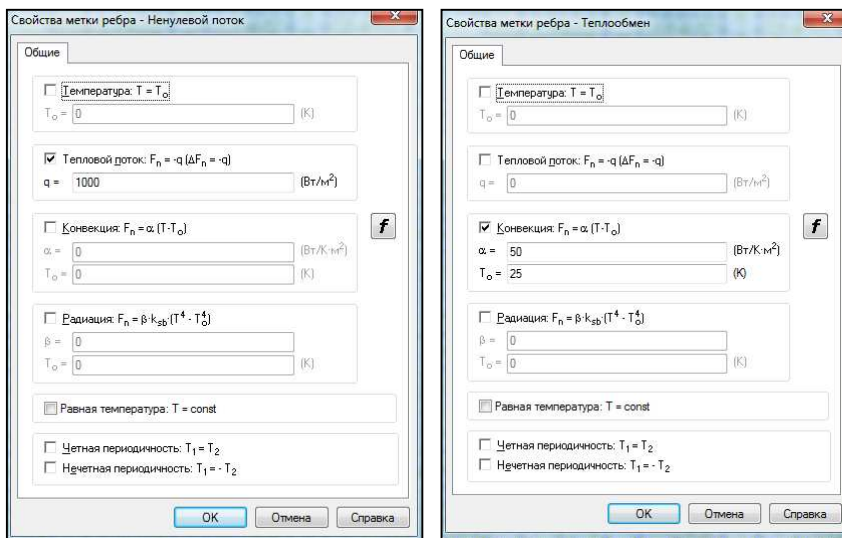


Рис. 8. Свойства меток левого и правого рёбер геометрической модели: слева (а) задан поток тепла; справа (б) задан теплообмен

На правой и левой границах областей Ω^0 и Ω^* были заданы, не применявшиеся при нахождении КУЭТ, неоднородные граничные условия второго и третьего рода (рис. 8). Верхняя и нижняя

границы теплоизолированы, через левую границу поступает поток тепла (рис. 8, а), на правой границе – теплообмен по закону Ньютона (рис. 8, б).

Картины ТП в областях Ω^0 и Ω^* приведены на рис.9. Зоны равных температур представляют собой вертикальные полосы. На оси симметрии $y = b/2$ в обеих областях заданы контуры, вдоль которых производилось сравнение температур. Зависимость температуры вдоль контура в Ω^0 и Ω^* приведена на рис. 10.

Расстояние между кривыми оценивалось по метрике пространства непрерывных функций. Как видно из рисунка, ближе к краям контура в области Ω^* наблюдаются колебания температуры. Максимум модуля

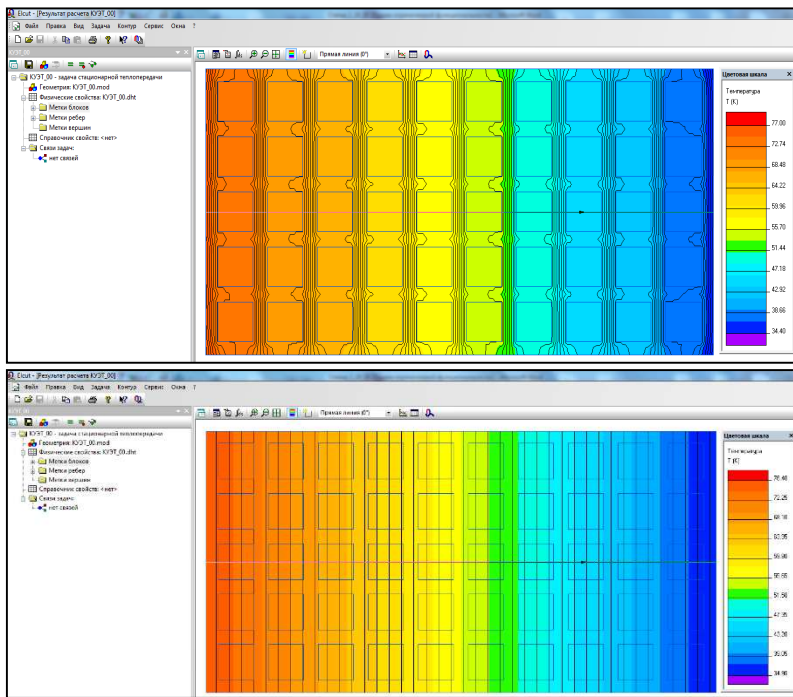


Рис. 9. Картина температурного поля: вверху (а) неоднородная область; внизу (б) эквивалентная однородная область

разности между значениями T и T^* достигнут именно на этих участках. Его значение не превысило 2°C , (относительная погрешность менее 2 %). Для качественного сравнения распределения температурных полей в Ω^0 и Ω^* такое отклонение температур можно считать удовлетворительным.

Стационарное распределение температуры в случае с выделением тепла в проводниках и условиями третьего рода на границах

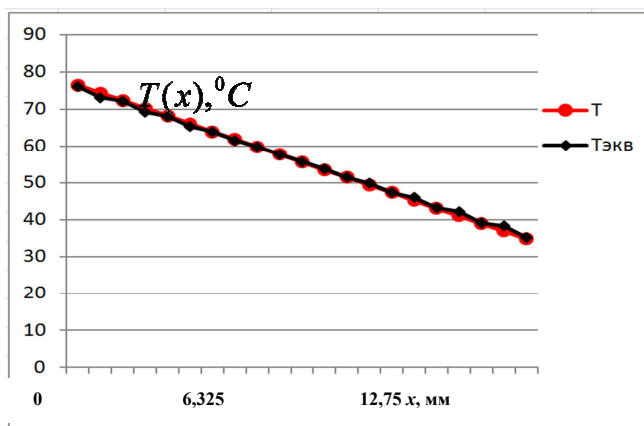


Рис.10. Изменение температуры вдоль контура в неоднородной и эквивалентной областях

На границах Ω^0 и Ω^* задавались условия третьего рода (рис. 8, б). В проводниках действуют источники тепла. В эквивалентной области источники тепла действуют на местах проводников исходной области. Свойства меток блоков приведены рис. 11.

Картины ТП в Ω^0 и Ω^* изображены на рис. 12 и рис. 13. Зоны равных температур имеют сложные изогнутые границы. Максимум температуры достигается в центре расчётной области. Медные шины прогрелись равномерно. Средняя температура каждой из них, рассчитанная с помощью интегрального калькулятора, совпадает с локальной с точностью до

третьего знака после запятой. В электрической изоляции между соседними шинами наблюдаются перепады температур до 5°C.

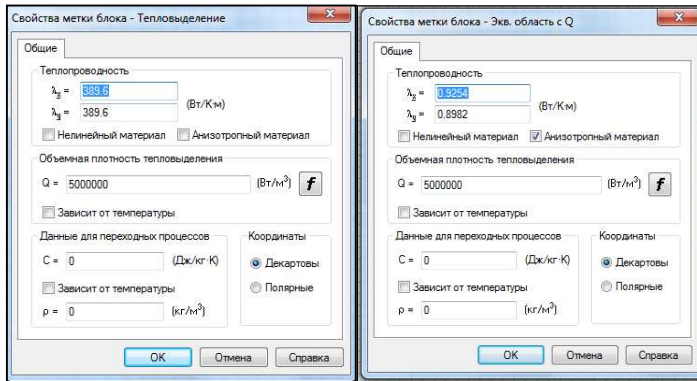


Рис. 11. Свойства меток блоков с источниками тепла: слева (а) неоднородная область; справа (б) эквивалентная область

В эквивалентной области зоны одинаковой температуры имеют границы, напоминающие эллипс или его отрезки. Качественная же аналогия просматривается. Области с высокой температурой также располагаются в центре. К границам Ω^0 и Ω^* она снижается.

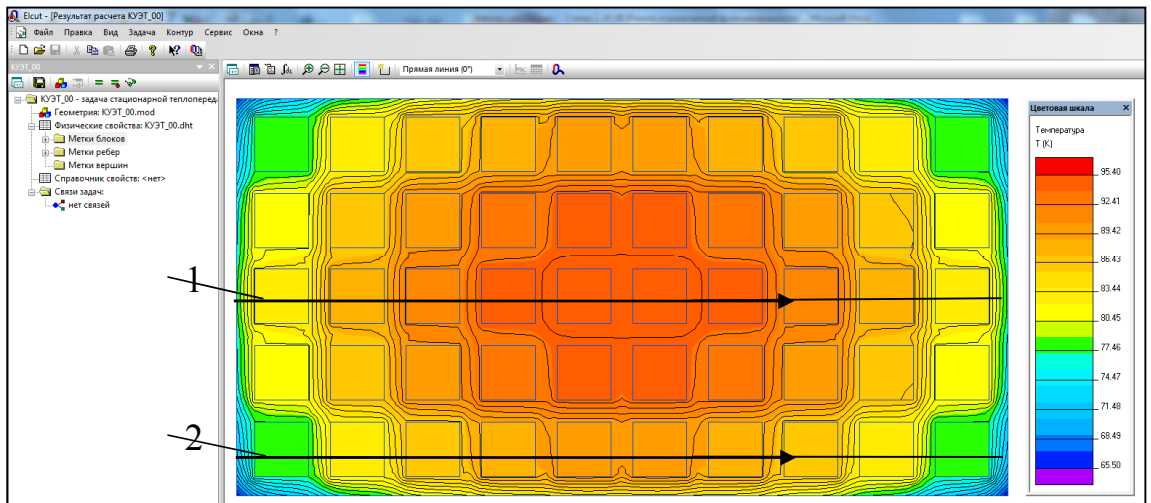


Рис.12. Распределение температуры в неоднородной области

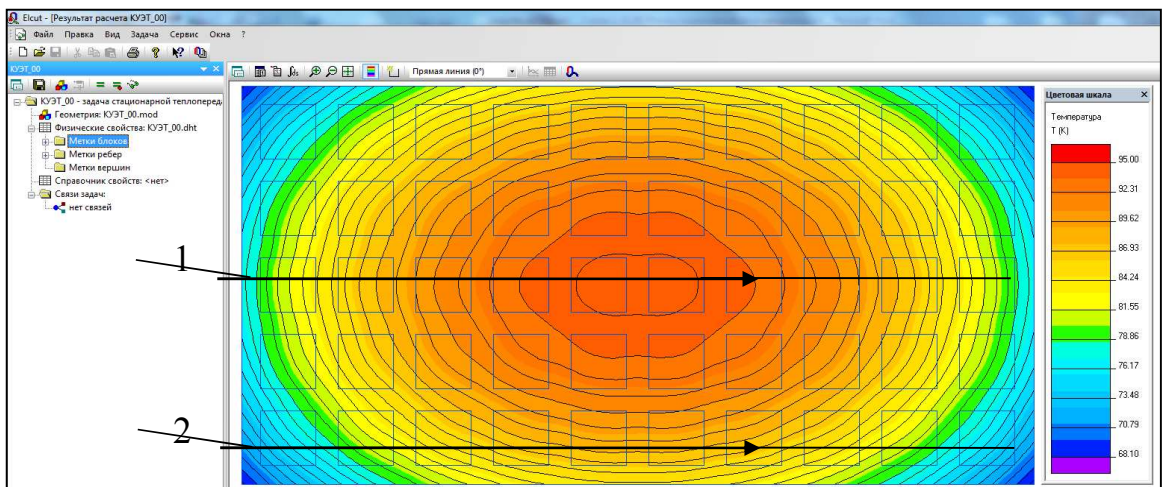


Рис. 13. Распределение температуры в эквивалентной области с источниками тепла

Исследование распределения ТП показали, что во всех точках Ω^0 и Ω^* с одинаковыми координатами температура в неоднородной области больше, чем в эквивалентной однородной. В таблице 2 приведены расчётные значения T и T^* вдоль контуров 1 и 2 в Ω^0 (рис. 12) и Ω^* (рис. 13), а так же $\Delta T = |T - T^*|$ – абсолютная, а $\delta T = \Delta T / |T^*|$ – относительная погрешности T .

Таблица 2. Значения температуры вдоль контуров в неоднородной и эквивалентной однородной областях с источниками тепла

№	x, мм	Контур 1				Контур 2			
		$T, ^\circ C$	$T^*, ^\circ C$	$\Delta T, ^\circ C$	$\delta T, \%$	$T, ^\circ C$	$T^*, ^\circ C$	$\Delta T, ^\circ C$	$\delta T, \%$
0	0	77,44	77,15	0,28	0,37	71,59	70,75	0,84	1,19
1	0,64	82,67	80,84	1,83	2,27	77,46	74,19	3,27	4,40
2	1,28	83,91	83,75	0,16	0,20	78,58	76,93	1,65	2,14
3	1,91	87,84	86,59	1,25	1,44	82,57	79,58	3,00	3,77
4	2,55	89,01	88,69	0,32	0,37	83,55	81,57	1,98	2,43
5	3,19	91,65	90,77	0,87	0,96	86,27	83,50	2,77	3,31
6	3,83	92,58	92,13	0,46	0,50	86,99	84,79	2,21	2,60
7	4,46	94,14	93,49	0,65	0,70	88,67	86,07	2,60	3,02
8	5,10	94,68	94,15	0,54	0,57	88,92	86,68	2,24	2,58
9	5,74	95,38	94,84	0,54	0,57	89,85	87,32	2,53	2,90
10	6,38	95,36	94,80	0,56	0,59	89,54	87,30	2,24	2,57
11	7,01	95,37	94,82	0,55	0,58	89,85	87,32	2,54	2,91
12	7,65	94,64	94,12	0,51	0,55	88,90	86,66	2,24	2,58
13	8,29	94,13	93,46	0,67	0,72	88,66	86,03	2,63	3,06
14	8,93	92,49	92,08	0,41	0,45	86,89	84,75	2,14	2,53
15	9,56	91,63	90,71	0,92	1,02	86,25	83,44	2,81	3,37
16	10,2	88,87	88,62	0,25	0,28	83,43	81,50	1,93	2,37
17	10,8	87,82	86,50	1,32	1,52	82,55	79,49	3,06	3,85
18	11,4	83,72	83,65	0,07	0,09	78,40	76,84	1,56	2,03
19	12,1	82,65	80,72	1,93	2,40	77,42	74,08	3,34	4,51
20	12,8	77,20	77,01	0,19	0,24	71,33	70,63	0,70	0,99
Max		97,38	94,84	1,93	2,4	89,85	87,32	3,34	4,5

В нижней строке таблицы выделены максимальные по столбцам значения соответствующих величин. Погрешности в точках первого контура не превышают $2^\circ C$ – абсолютная, $2,5 \%$ – относительная, что совпадает с результатами 2.1. Наибольшее различие между T и T^* наблюдается в точках второго контура, расположенных в углах расчётной области. Но и в них значения погрешностей не превосходят $3,5^\circ C$ и $4,5 \%$, соответственно. Графики T и T^* , построенные по данным таблицы 1, приведены на рис. 14.

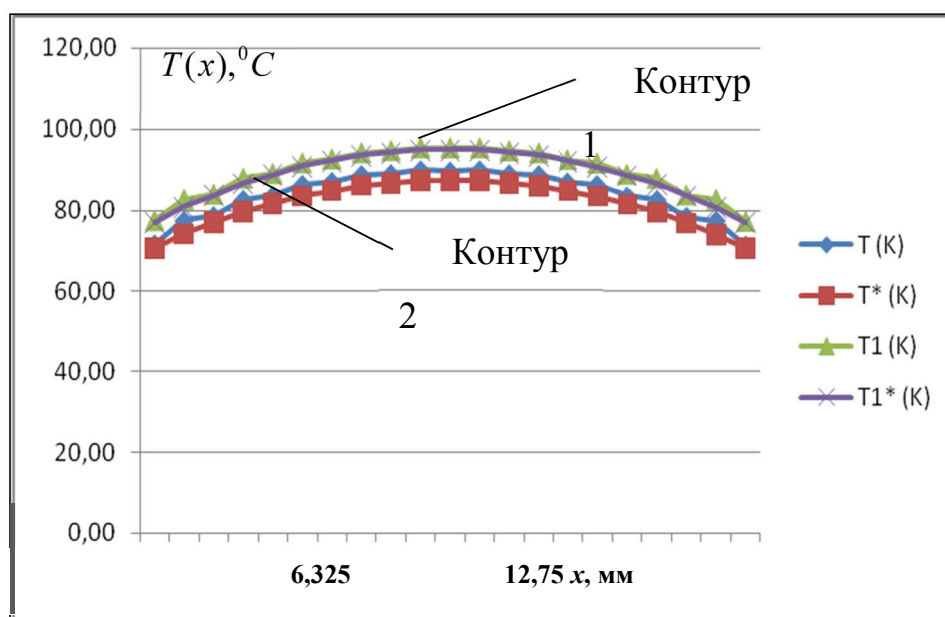


Рис.14. Зависимости температуры вдоль контуров в неоднородной и эквивалентной областях с источниками тепла

Выводы

1. Интегральный калькулятор «ELCUT» с высокой точностью (до второго знака после запятой) вычисляет поверхностные интегралы от температуры; это обеспечивает возможность его применения при расчётах интегральных характеристик ТП в электротехнических устройствах;
2. КУЭТ многожильных проводов, исследованных в работе, не превышает $1 \text{ Вт}/(\text{К}\cdot\text{м})$; однородные области, эквивалентные сечениям таких проводов можно считать теплоизолирующими;
3. расчётные значения T^* являются нижней границей для T ; их можно использовать при качественном анализе теплопередачи в неоднородных электротехнических конструкциях.

Литература

1. Никифоров А. Н., Селюк С. С. Определение коэффициентов эквивалентной теплопроводности неоднородной пластины // Математическое моделирование и информационные технологии: сб. науч. ст. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). Новочеркасск: Ред. журн. «Изв. вузов. Электромеханика», 2007. С.48-56. (Приложение к журналу)

2. Никифоров А.Н., Селюк С.С. К вопросу определения коэффициентов эквивалентной теплопроводности неоднородных тел // Математическое моделирование и информационные технологии: сб. науч. ст. Юж.-Рос. гос. техн. ун-т (НПИ). Новочеркасск: Ред. журн. «Изв. вузов. Электромеханика», 2010. С.34-43. (Приложение к журналу)

3. Борисенко А.И., Данько В.Г., Яковлев А.И. Аэродинамика и теплопередача в электрических машинах. М.: Энергия, 1974. 560 с.

Об авторе

Селюк Сергей Степанович, Южно-Российский государственный технический университет (Новочеркасский политехнический институт)