

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный медицинский университет» Министерства здравоохранения Российской Федерации Кафедра судебной медицины

Г.В. Недугов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Учебное пособие для ординаторов, обучающихся по специальности 31.08.10 «Судебно-медицинская экспертиза»

> Казань Издательство «Бук» 2022

Учебное пособие утверждено ЦКМС ФГБОУ ВО СамГМУ Минздрава России (протокол № 6 от «27» апреля 2022 г.)

Рецензенты:

Сергеев Владимир Вячеславович, доктор медицинских наук, профессор (Самарский государственный медицинский университет) Федорина Татьяна Александровна, доктор медицинских наук, профессор (Самарский государственный медицинский университет)

Недугов, Герман Владимирович.

Н42 Моделирование посмертного теплообмена методом конечных элементов : учебное пособие для ординаторов, обучающихся по специальности 31.08.10 «Судебномедицинская экспертиза» / Г. В. Недугов; ФГБОУ ВО «Самарский гос. мед. ун-т» Мва здравоохранения Рос. Федер. — Казань : Бук, 2022. — 120 с. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-00118-955-8

В учебном пособии рассмотрены принципы конечно-элементного моделирования охлаждения мертвого тела. Обоснован приоритет метода конечных элементов при решении судебно-медицинских задач определения давности наступления смерти. Перед изложением основного материала кратко освещены базовые понятия теории теплообмена. В пособии подробно охарактеризован алгоритм конечно-элементного моделирования посмертного теплообмена, предполагающий создание задачи, задание геометрии и теплофизических свойств модели, а также начального и граничных условий теплообмена, построение сетки конечных элементов, запуск процесса решения задачи и анализ его результатов. Численное моделирование посмертного теплообмена подробно осуществлено на многочисленных примерах с помощью бесплатно распространяемого приложения ELCUT 6.5 Student российского производства, не предъявляющего высоких системных требований к компьютеру и не требующего наличия у оператора специальной математико-инженерной подготовки.

Учебное пособие предназначено для подготовки кадров высшей квалификации по программам ординатуры по специальности 31.08.10 «Судебно-медицинская экспертиза», составлено в соответствии с требованиями действующего Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования подготовки кадров высшей квалификации в ординатуре по специальности 31.08.10 «Судебно-медицинская экспертиза» и требованиями рабочей программы учебной дисциплины «Судебная медицина», утвержденной ЦКМС ФГБОУ ВО СамГМУ Минздрава России, а также может быть полезным судебномедицинским экспертам.

> УДК 340.62:343.148.23(075.8) ББК 58.1:67.531я73

ISBN 978-5-00118-955-8

© Недугов Г. В., 2022
 © ФГБОУ ВО СамГМУ Минздрава России, 2022



Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Samara State Medical University»» of the Ministry of Healthcare of the Russian Federation Department of Forensic Medicine

G.V. Nedugov

MODELING OF POSTMORTEM HEAT TRANSFER BY THE FINITE ELEMENT METHOD

Textbook for residents studying in the specialty 31.08.10 "Forensic medical examination"

> Kazan Buk 2022

The textbook was approved by the CCMS of the FSBEI HE SamSMU MOH (protocol No. 6 of April 27, 2022)

Reviewers:

Sergeev Vladimir Vyacheslavovich, Professor of the Department of Medical Law and Bioethics of Samara State Medical University PhD, Professor Fedorina Tatyana Alexandrovna, Head of the Department of general and clinical pathology: pathological anat-omy and pathological physiology of Samara State Medical University PhD, Professor

Nedugov, German Vladimirovich.

N42 Modeling of post-mortem heat transfer by the finite element method: a textbook for residents studying in the specialty 31.08.10 "Forensic Medical Examination" / G. V. Nedugov; FSBEI HE "Samara State Medical University" of the Ministry of Healthcare of the Russian Federation — Kazan: Buk, 2022. — 120 p. — Text : unmediated.

ISBN 978-5-00118-955-8.

The textbook discusses the principles of finite element modeling of cooling of a dead body. The priority of the finite element method in solving forensic problems of determining the postmortem interval is justified. Before presenting the main material, the basic concepts of the theory of heat transfer are briefly highlighted. The textbook describes in detail the algorithm of finite element modeling of mortal heat transfer, which involves creating a problem, specifying the ge-ometry and thermal properties of the model, as well as the initial and boundary conditions of heat exchange, constructing a grid of finite elements, starting the process of solving the problem and analyzing its results. Numerical simulation of postmortem heat transfer has been carried out in detail using numerous examples using the Russian-made ELCUT 6.5 Student application distrib-uted for free, which does not impose high system requirements on a computer and does not re-quire the operator to have special mathematical and engineering training.

The textbook is intended for the training of highly qualified personnel under residency programs in the specialty 31.08.10 "Forensic medical examination", compiled in accordance with the requirements of the current Federal State Educational Standard of higher education for the training of highly qualified personnel in the residency in the specialty 31.08.10 "Forensic Medical Examination" and the requirements of the work program of the discipline "Forensic Medicine" approved by the CCMS of the FSBEI HE SamSMU MOH, and may also be useful to forensic medical experts.

UDC 340.62:343.148.23(075.8)

ISBN 978-5-00118-955-8

© Nedugov G.V., 2022 © FSBEI HE SamSMU MOH, 2022

оглавление

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ	7
ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ	
ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА	14
§ 1.1. Температурное поле	14
§ 1.2. Тепловой поток	18
§ 1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности	19
§ 1.4. Краевые условия для процессов теплопроводности	21
§ 1.5. Радиационный теплообмен	23
§ 1.6. Краевые задачи теплопроводности и методы их решения.	
Метод конечных элементов	24
§ 1.7. Современные прикладные программные комплексы	
конечно-элементного анализа	26
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО	
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ	28
§ 2.1. Создание задачи	28
§ 2.2. Задание геометрии конечно-элементной модели	31
§ 2.3. Задание физических параметров и граничных условий	37
§ 2.4. Решение задачи и анализ его результатов	44
ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО	
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ	52
§ 3.1. Создание задачи	52
§ 3.2. Задание физических параметров и краевых условий	57
§ 3.3. Решение задачи и анализ его результатов	61
ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО	
ОХЛАЖДЕНИЯ В СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА.	69
§ 4.1. Моделирование посмертного теплообмена в условиях	
изменяющейся внешней температуры	69
§ 4.2. Моделирование посмертного охлаждения при гипер- и	
гипотермическом вариантах танатогенеза	73
§ 4.3. Моделирование посмертной гипертермии	77
§ 4.4. Моделирование различных граничных условий	
теплообмена	82
ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО	
ОХЛАЖДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕСИММЕТРИЧНОГО	0.1
ΠΑΥΑJΙΦΗΟΙ Ο ΤΕΜΠΕΡΑΙ ΥΡΗΟΙ Ο ΠΟЛΧ	91
§ 5.1. Нахождение температурного поля головы при	01
ооолочечных внутричеренных кровоизлияниях	91

§ 5.2. Нахождение температурного поля головы при	
церебральных ушибах	97
§ 5.3. Нахождение температурного поля головы при	
внутрижелудочковых кровоизлияниях	104
§ 5.4. Нахождение температурного поля головы при открытой	
проникающей черепно-мозговой травме	109
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ	114
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	115
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	117

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

Обозначения:

С-теплоемкость, Дж/К;

 P_{BV} – мощность излучения абсолютно черного тела в вакууме, Вт;

P_{RV} – мощность излучения реального тела в вакууме, Вт;

 P_{RE} – мощность излучения реального тела во внешней среде с температурой T_a , Вт;

Q - количество теплоты, Дж;

S – площадь поверхности, м²;

T – температура, °С (К);

 T_0 - начальная температура тела, °C;

 T_a – температура внешней среды, °С;

 T_{a0} – начальная температура внешней среды, °С;

 T_s – температура поверхности тела, °C;

а - коэффициент температуропроводности, m^2/c ;

c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К);

grad *T* - градиент температуры, $^{\circ}C/_{M}$;

k – постоянная охлаждения в законе охлаждения Ньютона-Рихмана и уравнении Marshall-Hoare;

p – константа температурного плато в уравнении Marshall-Hoare;

q – плотность теплового потока, BT/M^2 ;

 q_v – объемная плотность внутренних источников тепла в теле, Вт/м³;

r – радиальная координата полярной системы;

t – ДНС, ч;

x, *y*, *z* – координаты (абсцисса, ордината и аппликата) декартовой системы в пространстве;

 α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К);

 β – почасовая скорость изменения внешней температуры, °С/ч;

є - коэффициент относительной излучательной способности;

 λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

 ρ – плотность, кг/м³;

 σ – постоянная Стефана-Больцмана, равная 5,67 · 10⁻⁸ Вт/(м² · K⁴);

Сокращения:

ВЖК – внутрижелудочковое кровоизлияние;

ДНС – давность наступления смерти;

МКЭ – метод конечных элементов;

ЧМТ – черепно-мозговая травма.

введение

На современном этапе развития судебной медицины основным методом решения существующих научно-практических задач становится математическое моделирование изучаемых физических и биологических процессов. Одной из таких важных задач судебной медицины и экспертной практики, решение которой возможно только с помощью методов математического моделирования, является термометрическое определение давности наступления смерти (ДНС).

Применительно к задаче определения ДНС можно выделить три основные группы существующих математических моделей охлаждения трупа. Первые две группы составляют относительно несложные математические модели остывания поверхности и ядра трупа, основанные на законе Ньютона-Рихмана охлаждения поверхности физических тел и на феноменологическом законе Marshall-Hoare охлаждения ядра мертвого тела. Однако указанные математические модели характеризуются ограниченностью условий для своего использования и ресурсов для модификации. В частности, эти модели не пригодны при таких сложных условиях теплообмена, как комбинация различных условий охлаждения для разных областей тела, наличие внешних источников тепла, например, инсоляции, непостоянная температура внешней среды или нелинейный характер ее динамики. Кроме того, феноменологическая модель Marshall-Hoare и ее многочисленные разновидности отражают лишь внешнее сходство своей формы с процессом охлаждения ядра трупа, истинные физические законы которого не отражены в самих моделях. По изложенным причинам источником дальнейшего совершенствования тепловых методов определения ДНС в судебной медицине остается лишь третья группа весьма сложных математических моделей охлаждения мертвого тела, основанных на теории теплообмена.

Первая математическая модель теплообмена человека была разработана американским врачом и клиническим исследователем Н.Н. Pennes. Предложенное им в 1948 г. дифференциальное уравнение позволяло рассчитывать прижизненное распределение температур человеческого предплечья. В рамках данной модели предплечье рассматривалось в виде цилиндра, а передача тепла осуществлялась конвекцией циркулирующей крови и испарением влаги с поверхности кожи, теплопроводностью и тепловым излучением с наличием внутреннего источника выделения тепла метаболической природы.

Исследование Н.Н. Pennes имело фундаментальный характер и легло в основу сотен работ по переносу тепла в живом организме. Выведенное им дифференциальное уравнение получило название «The Pennes bio-heat equation» (биотепловое уравнение Пеннеса). Статья 1948 г., в которой это исследование было представлено, стала одной из самых цитируемых из когда-либо опубликованных журналом прикладной физиологии и была вновь напечатана в нем спустя 50 лет с момента ее первой публикации.

В последующем физиологи разработали большое количество биотепловых математических моделей, направленных на устранение отдельных недостатков уравнения Н.Н. Pennes. Сначала во всех этих моделях морфология человеческого тела была схематичной, а не анатомической, состоящей из цилиндрических сегментов, представляющих руки, предплечья, голову, шею, грудь, живот, таз, бедра, ноги и ступни. Каждый такой сегмент состоял из костного ядра и концентрических слоев мышц, подкожно-жировой клетчатки и кожи. Со временем эти дифференциальные уравнения биотеплообмена становились все более сложными, включали активные и пассивные системы терморегуляции. Функциональные отношения между органами становились детализированными и все более точными. С годами геометрия тела человека в указанных математических моделях теплообмена эволюционировала до реалистичной топографии, получаемой с помощью 3D-лазерного сканирования.

Возможность определения ДНС на основе математического моделирования теплообмена закономерно привлекла внимание судебных медиков. Уже в 1958 г. К. Seller аппроксимировал геометрию человеческого тела бесконечным цилиндром и получил аналитическое решение задачи нестационарного теплопереноса при охлаждении трупа в условиях постоянной температуры внешней среды. В своей работе К. Seller также показал, что в модели бесконечного цилиндра кривая охлаждения намного сильнее зависит от радиуса цилиндра, чем от любых других параметров. Однако в своем исследовании К. Seller не затронул вопрос координаты прямой кишки, являвшейся диагностической точкой.

Позднее А.Е. Joseph и Е. Schickele показали, что бесконечный цилиндр является вполне допустимой моделью, охлаждение которой хорошо согласуется с охлаждением человеческого тела, если в модели точно указана координата прямой кишки. Проанализировав данные компьютерной томографии 10 пациентов с подозрением на опухолевый процесс малого таза, К. Нігаіwa с коллегами предложили в 1980 г. формулу расчета радиальной координаты прямой кишки, в соответствии с которой

$$X = \frac{L_2}{L_1},$$

где L₁ – расстояние между поверхностями спины и живота по срединной линии; L₂ – расстояние между центром прямой кишки и по-верхностью спины по срединной линии. При этом нормаль к поверхности тела, по которой осуществляются измерения, должна пересекать срединную линию на 10-15 см выше анального отверстия, что соответствует уровню расположения головки бедренной кости. В среднем искомый размер по данным выборки из 10 пациентов составил 0,27 со стандартным отклонением 0,05.

вил 0,27 со стандартным отклонением 0,05.
Затем группа К. Нігаіwa обратилась к данным G.S.W. De Saram,
G. Webster и N. Kathirgamatamby, опубликовавших в 1956 г. результаты выполненной стандартизированной динамической ректальной термометрии 37 трупов казненных по приговору суда заключенных.
Из указанной базы данных группой К. Нігаіwa было отобрано 28 серий динамической ректальной термометрии на протяжении первых 12 ч посмертного периода, в которых первое измерение было прове-дено не позднее 30 минут от наступления смерти. Приняв данное значение термометрии за начальную ректальную температуру, группа К. Нігаіwa провела компьютерные расчеты в рамках предложенной ими математической модели, используя литературные данные по теплофизическим свойствам тканей человеческого тела.

Изменяя величину коэффициента теплоотдачи, К. Hiraiwa с соавторами добивались совпадения модельной и реальной кривых охлаждения. Подобным методом они установили значения коэффициента теплоотдачи в каждом исследованном наблюдении, а также оценили влияние радиуса цилиндра, измеряемого на уровне бедер, на кривую охлаждения и показали отсутствие значимого влияния на по-

следнюю колебаний температуры внешней среды величиной до 2 °С. В дальнейшем группа К. Нігаіwа в экспериментах на кроликах осуществила проверку построенной математической модели охлаждения, использовав в качестве диагностических точек прямую кишку и поверхностные ткани. В результате было установлено хорошее соответствие теоретических кривых охлаждения как ядра, так и поверхности трупа реальным данным, в т.ч. и в условиях изменяющейся температуры внешней среды. Также японские исследователи экс-периментально определили некоторые теплофизические параметры тканей человека и животных, а именно теплопроводность иссечен-ной кожи трупа человека и температуропроводность тканей кролика. Затем коллектив японских судебных медиков, включавший Ү.

Ohno, M. Kajiwara и T. Mukai, разработал на основе аппроксимации

бесконечным цилиндром математическую модель охлаждения трупа новорожденного, реализовав ее в формате компьютерной программы. В литературе данная математическая модель получила известность под названием «метод Ohno» (Ohno's method). Сравнительное тестирование показало, что метод Ohno, хотя и основывается на грубом приближении геометрии тела новорожденного, не уступает в точности определения ДНС ни методу Henssge, ни своему аналогу, предназначенному для трупов взрослых лиц.

Общим перечисленных и других решений задач нестационарного теплопереноса при охлаждении трупа являлся их аналитический характер. Полученные математические модели основывались на довольно грубых приближениях геометрии тела человека и его внутренней структуры однородными телами простой геометрической формы в условиях постоянной температуры внешней среды. К тому времени решения указанного класса задач уже были получены специалистами по математической физике. Судебным медикам оставалось только выбрать моделируемую часть тела и определить ее теплофизические свойства, задать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени и подобрать готовое решение краевой задачи для искомых условий охлаждения трупа. Вариантов выбора геометрических приближений моделируемой анатомической области имелось всего два: цилиндр либо шар. Поскольку внимание специалистов в тот период времени было обращено в основном на температуру ядра трупа, прежде всего ректальную, то основным анатомическим объектом моделирования было выбрано туловище, а модельным геометрическим телом канонической формы – цилиндр.

В целом разработанные математические модели указанного типа, с одной стороны, являлись слишком грубыми приближениями реального теплообмена и учитывали ограниченное количество индивидуальных особенностей охлаждения, а с другой, были слишком сложными для практического применения. Поэтому дальнейшее развитие указанные подходы к определению ДНС получили на основе численных методов решения краевой задачи теплопроводности с использованием компьютерных технологий и 3D-моделирования. В качестве численных процедур решения использовались методы конечных разностей и конечных элементов.

Одна из первых трехмерных конечно-элементных моделей охлаждения человеческого тела была предложена в 2005 г. германскими судебными медиками G. Mall и W. Eisenmenger. Построенная ими масштабируемая модель состояла из 9804 кубических элементов и 12503 узлов, из которых 8328 элемента и 10154 узла приходилось только на человеческое тело, а остальные – на его ложе.

В отличие от феноменологических уравнений Marshall-Hoare и C. Henssge конечно-элементная модель G. Mall и W. Eisenmenger непосредственно основывалась на физических законах теплообмена и в принципе могла быть применена к любой нестандартной ситуации охлаждения. Она также выгодно отличалась и от аналитических вариантов решения краевой задачи теплопроводности, которые сводили сложную геометрию человека к элементарным геометрическим телам, а его многокомпонентный тканевый состав заменяли однородным материалом.

Конечно-элементная модель G. Mall и W. Eisenmenger позволяла учитывать не только особенности формы и строения человеческого тела, но и наличие и характер одежды, а также теплопередачу излучением и конвекцией. Теплопередача конвекцией могла быть рассчитана не только при естественной, но и при принудительной конвекции в зависимости от реального движения воздуха или жидкости. Также являлось возможным оценивание влияния на процесс охлаждения внешних источников теплового излучения и внутренних источников суправитальной активности.

В последующем G. Mall и W. Eisenmenger помимо обсуждения физических параметров, подлежащих регистрации и этапов настройки конечно-элементного анализа, представили описание пяти случаев практического применения построенной математической модели при определении ДНС. Среди них имелись наблюдения с посмертным изменением положения тела, а также с его перемещением в другое место с иными условиями охлаждения. Во всех случаях конечноэлементная модель показала хорошие результаты определения ДНС.

В дальнейших своих исследованиях германские авторы с помощью конечно-элементной модели охлаждения оценили влияние на погрешности определения ДНС таких факторов, как особенности ложа трупа и повышение или понижение начальной температуры тела. Согласно полученным результатам детальное представление индивидуальной анатомии не является необходимым для точного оценивания ДНС. При условии адекватной фиксации общих объемов тканей с преобладающим водным или жировым составом и их общей локализации геометрическое разрешение модели практически не влияет на точность определения ДНС, по крайней мере, для профиля ректальной температуры. На основании этого можно сделать вывод, что в ходе конечно-элементного анализа охлаждения трупа нет необходимости в обеспечении значительной сегментации и использовании сетки с высоким разрешением. Данное обстоятельство позволяет применять для определения ДНС довольно грубые модели, а в крайних случаях использовать просто однородное тело с подходящими усредненными тепловыми свойствами. Напротив, решающее значение имеют динамика внешней температуры и теплофизические характеристики тканевого состава тела.

Дальнейшее развитие методов моделирования посмертного теплообмена связано с выбором в качестве объектов для математического описания иных анатомических образований, в т.ч. и поверхностных тканей. Первоначальный подход, ориентированный на моделирование температурного поля туловища и профилей ректальной температуры, был сопряжен с рядом затруднений, связанных с выраженной вариабельностью размерных характеристик и тканевого состава этой части тела. Более перспективной для моделирования посмертного охлаждения оказалась голова и ее анатомические структуры. Это объясняется простотой и незначительной вариативностью ее геометрии, очень близкой к такому каноническому телу, как шар. Кроме того, голова человека состоит из небольшого количества относительно равномерно распределенных слоев, а головной мозг, занимающий всю полость мозгового черепа, представляет собой в высокой степени однородную структуру.

В целом использование конечно-элементного анализа позволяет преодолеть проблему моделирования сложных начальных и граничных условий, а также сложной геометрии и внутренней структуры тела. Не вызывает сомнений, что в ближайшем будущем именно этот метод и построенные на его основе математические модели будут иметь приоритетное значение при термометрическом определении ДНС. Поэтому целью настоящего учебного пособия является освещение базовых понятий теплообмена и рассмотрение принципов конечно-элементного моделирования охлаждения мертвого тела.

Учебное пособие предназначено для подготовки ординаторов по специальности 31.08.10 «Судебно-медицинская экспертиза» и соответствует ФГОС ВО – подготовка кадров высшей квалификации по программам ординатуры по специальности 31.08.10 «Судебномедицинская экспертиза». Изучение материалов пособия направлено на формирование у ординаторов общепрофессиональной компетенции:

 ОПК-1. Способен использовать информационнокоммуникационные технологии в профессиональной деятельности и соблюдать правила информационной безопасности.

ГЛАВА 1. ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПЕРЕДАЧИ ТЕПЛА

§ 1.1. Температурное поле

Теплообмен представляет собой перенос энергии, происходящий между телами (средами), имеющими различную температуру. В природе существуют три элементарных способа передачи тепла: тепловое излучение (радиационный теплообмен), конвекция и теплопроводность (кондукция). Сложный теплообмен включает перенос тепла всеми тремя способами или их сочетаниями.

Тепловое излучение – это процесс распространения тепловой энергии с помощью электромагнитных волн. Все тела с температурой выше абсолютного нуля обладают собственным тепловым излучением, а его интенсивность зависит от температуры тела.

Конвекция – вид теплообмена, при котором перенос тепловой энергии осуществляется перемещением объемов жидкости или газа в пространстве из области с одной температурой в область с другой.

Теплопроводность представляет собой процесс распространения тепловой энергии при непосредственном соприкосновении отдельных частиц тела, имеющих различные температуры. Теплопроводность может иметь место только при условии, что в различных точках тела (или системы тел) температура неодинакова. Передача тепла теплопроводностью в твердом теле сопровождается изменением его температурного поля.

Температурное поле – это совокупность значений температуры для всех точек изучаемого пространства для каждого момента времени. В расчетах теплообмена используют ортогональную систему координат (декартову, цилиндрическую или сферическую).

В зависимости от числа координат различают трехмерное, двумерное, одномерное и нульмерное (однородное) температурные поля.

Температурное поле, которое изменяется с течением времени, называют нестационарным. Если температурное поле остается неизменным во времени, то его именуют стационарным.

Например, для декартовой системы координат математическим выражением температурного поля является формула

$$T = f(x, y, z, t),$$

где *x*, *y*, *z* – координаты точки в пространстве. Для нестационарного температурного поля выполняется

$$\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0.$$

Наоборот, при установившемся тепловом режиме теплопроводности, присущему стационарному температурному полю,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

В этом случае температура является функцией одних только пространственных координат:

$$T = f(x, y, z).$$

Поскольку в обоих названных случаях температура представляет собой функцию трех координат, то температурное поле является трехмерным. Двумерное поле описывается формулами:

$$T = f(x, y, t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

а в одномерном поле температура есть функция только одной координаты:

$$T = f(x,t), \quad \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0.$$

Нульмерное температурное поле в зависимости от наличия изменений во времени может быть нестационарным, для которого выполняются

$$T = f(t), \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

или стационарным, для которого имеют место

$$T = const$$
, $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

Для цилиндрической системы координат температурное поле определяется формулой

$$T = f(r, \varphi, z, t),$$

где r – радиальная, φ – угловая и z – аксиальная координаты точки в пространстве. Преобразование координат от цилиндрических к декартовым осуществляется согласно закону

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Цилиндрическая система координат является расширением полярной, представляющей собой разновидность двумерной системы координат. На практике часто бывает удобнее температурное поле сферических тел с осевой симметрией представлять в виде двумерной модели, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя координатами - полярным углом и полярным радиусом.

$$T = f(r, \varphi, t).$$

Для сферической системы координат температурное поле описывается выражением

$$T = f(r, \theta, \varphi, t),$$

где r – расстояние до начала координат, а θ и φ – зенитный и азимутальный углы. При этом зенитным будет угол между радиусом, соединяющим точку в пространстве с началом координат, и осью z, а азимутальным – угол между проекцией данного радиуса на плоскость xy и осью x. Переход от сферических координат к декартовым производится по формулам:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta. \end{cases}$$

Если соединить точки тела, имеющие одинаковую температуру, можно получить поверхность равных температур, называемую изотермической. Так как одна и та же точка тела не может одновременно иметь различные температуры, то изотермические поверхности не пересекаются. В нестационарных процессах изотермические поверхности перемещаются в пространстве.

Температура внутри тела изменяется только в направлениях, пересекающих изотермические поверхности. При этом наибольший перепад температуры на единицу длины происходит в направлении нормали к изотермической поверхности. Указанный перепад характеризуется градиентом температуры.

Градиент температуры есть вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры и численно равный производной от температуры по этому направлению, т. е.

grad
$$T = \vec{e}_n \frac{\partial T}{\partial n}$$
,

где n – нормаль к изотермической поверхности, \vec{e}_n – единичный вектор, направленный по нормали в сторону возрастания температуры. Отсюда градиент температуры численно равен первой производной температуры по нормали к изотермической поверхности.

Градиент можно представить векторной суммой трех векторов, направленных по осям координат. Составляющие градиента по осям

декартовых координат в трехмерном пространстве равны соответствующим частным производным:

grad
$$T = \vec{e}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial T}{\partial z}$$
,

где \vec{e}_x , \vec{e}_y , \vec{e}_z – ортогональные между собой векторы единичной длины, направленные по координатным осям (орты). Поскольку векторный дифференциальный оператор, компоненты которого являются частными производными по координатам, обозначается символом ∇ (оператор набла или Гамильтона), то

grad
$$T = \nabla T$$
.

Применительно к полям, в т.ч. и температурному, оператор набла называют оператором градиента.

В цилиндрической системе координат градиент температурного поля имеет координаты

grad
$$T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial \varphi}\vec{e}_{\varphi} + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z$$
,

где $\vec{e}_r, \vec{e}_{\varphi}, \vec{e}_z$ – орты в цилиндрической системе координат.

В сферической системе координат градиент температурного поля имеет координаты

$$\operatorname{grad} T = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r \cdot \sin \psi} \cdot \frac{\partial T}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \psi} \vec{e}_{\psi},$$

где $\vec{e}_r, \vec{e}_{\varphi}, \vec{e}_{\psi}$ – орты в сферической системе координат.

Скалярная величина температурного градиента $\partial T / \partial n$ не одинакова для различных точек изотермической поверхности. Она больше там, где расстояние Δn между изотермическими поверхностями меньше. В направлении убывания температуры величина $\partial T / \partial n$ отрицательна.

Существует также понятие напряженности температурного поля, определяемое как

$$E = -grad T$$
.

Вектор Е называется вектором напряженности температурного поля.

Единицами измерения температуры являются градусы Цельсия или Кельвина. Перевод значений температуры из одной шкалы в другую осуществляется по формулам:

 $T, K = T, ^{\circ}C + 273, 15;$ $T, ^{\circ}C = T, K - 273, 15.$

Для шкал Цельсия и Кельвина перепад температур не зависит от системы единиц измерения температуры

 ΔT , K = ΔT , °C, T.e. 1 K = 1 °C.

Количество теплоты или просто теплота есть количество энергии, которую получает или теряет тело в процессе теплообмена с окружающей средой. Количество теплоты принято обозначать символом Q, единицей его измерения в СИ является джоуль (Дж), а в технической системе единиц – калория (кал):

1 Дж = 1 кг·м²/с² = 1 Вт·с $\approx 0,239$ кал; 1 кал $\approx 4,187$ Дж.

Перенос теплоты теплопроводностью может происходить только при условии, что в различных точках тела температурное поле неоднородно. Плотность теплового потока (или удельный тепловой поток) в произвольной точке тела определяется как количество теплоты, проходящее в единицу времени через единицу площади изотермической поверхности:

$$q = (-\vec{e}_n) \frac{dQ}{dSdt},$$

где q – плотность теплового потока, BT/M^2 ; dQ/dt - количество теплоты, проходящее в единицу времени, или скорость теплового потока, Дж/с; S – площадь изотермической поверхности, M^2 ; $(-\vec{e}_n)$ - единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в сторону уменьшения температуры.

Направлен тепловой поток по нормали к изотермической поверхности, но противоположно температурному градиенту. Линии, касательные к которым совпадают с направлением вектора теплового потока, называются линиями теплового тока.

Для протяженных тел с произвольным, но постоянным по длине поперечным сечением определяют также линейную плотность теплового потока, отнесенную к длине тела (q_l , Bт/м). Тепловой поток, отнесенный к объему тела, называется объемной плотностью теплового потока (q_v , Bт/м³).

В 1807 г. французский ученый Фурье предположил, что тепловой поток через элемент изотермической поверхности пропорционален значению температурного градиента в заданной точке:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T$$
,

где λ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности, Вт/(м·К).

Коэффициент теплопроводности λ есть количество теплоты, проходящее в единицу времени при перепаде температуры в один градус на единице длины нормали. Значение коэффициента теплопроводности зависит от температуры, а в анизотропных телах – от направления теплового потока и свойств материала.

§ 1.3. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Рассматривая баланс тепла для единицы объема тела с учетом всех его составляющих и градиентного закона переноса тепла, Фурье в 1814 г. вывел дифференциальное уравнение теплопроводности, которое легло в основу ее аналитической теории. Физический смысл данного уравнения заключается в том, что оно устанавливает связь между пространственным распределением температуры и ее изменением по времени.

Вид дифференциального уравнения теплопроводности зависит от выбора системы координат. Например, в декартовой системе координат уравнение теплопроводности примет вид

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v, \tag{1}$$

где x, y, z – пространственные координаты, q_v – мощность внутренних объемных источников тепла в теле, Bт/м³, c – удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); ρ – плотность, кг/м³.

Предполагая независимость физических свойств вещества от температуры и направления теплового потока (c, λ , ρ , q_{ν} , = *const*), выражение (1) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c\rho} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c\rho} \,. \tag{2}$$

Если обозначить

$$\frac{\lambda}{c\rho} = a,$$

И

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T$$

где *а* - коэффициент температуропроводности, M^2/c ; $\nabla^2 T$ - оператор Лапласа в декартовой системе координат, то уравнение (2) примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}.$$
(3)

При отсутствии внутренних источников тепла в теле ($q_v = 0$) формула (3) упрощается до

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T \,.$$

Выражение $\nabla^2 T$ может быть преобразовано для цилиндрической и сферической систем координат. В цилиндрических координатах выражение $\nabla^2 T$ имеет вид

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

а в сферических -

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \mu} \left[\left(1 - \mu^2 \right) \frac{\partial T}{\partial \mu} \right] + \frac{1}{r^2 \left(1 - \mu^2 \right)} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2},$$

где $\mu = \cos \theta$.

Коэффициент температуропроводности *а* пропорционален скорости распространения изотермической поверхности. Следовательно, его физический смысл заключается в том, что он характеризует скорость изменения температуры. Иными словами, скорость изменения температуры в любой точке тела будет тем больше, чем больше коэффициент температуропроводности. Поэтому, при прочих равных условиях, выравнивание температур во всех точках пространства будет происходить быстрее в том теле, которое характеризуется большим коэффициентом температуропроводности.

Величина, обратная коэффициенту температуропроводности, характеризует инерционные свойства тела в отношении распространения температурного поля. Одной из наиболее теплоинерционных сред является вода.

Величина коэффициента температуропроводности зависит от температуры, а также природы вещества. Поэтому теплофизические характеристики (коэффициенты теплопроводности, температуропроводности и удельная теплоемкость) можно считать постоянными только в качестве приближения.

Дифференциальное уравнение теплопроводности в общем случае имеет бесконечное множество решений. Для получения единственного решения, характеризующего конкретный процесс, необходимо дать его описание, т.е. задать следующие параметры: геометрические размеры и форму тела, его физические свойства: теплоемкость, плотность, коэффициенты теплопроводности и температуропроводности, закон распределения внутренних источников теплоты в заданной расчетной области тела при их наличии, а также краевые условия, которые задают температурное поле в заданной расчетной области в начальный момент времени (начальное условие) и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия).

§ 1.4. Краевые условия для процессов теплопроводности

Краевые условия представляют собой составляющую условий однозначности для процессов теплопроводности и включают в себя совокупность начального и граничного условий.

Начальные условия актуальны при рассмотрении нестационарных процессов и состоят в задании закона распределения температуры внутри тела в начальный момент времени.

Простейшим видом начальных условий являются безградиентные начальные условия с равномерным распределением температуры в начальный момент времени

$$T(x, y, z, 0) = T_0 = const.$$

В других случаях начальные условия могут быть заданы кон-кретной функцией

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

или представительным набором числовых значений температурного поля.

Граничные условия теплообмена необходимо задавать как на внешней поверхности тела (внешние граничные условия), так и на внутренней границе (внутренние граничные условия) расчетной области при ее расположении внутри тела.

В расчетах теплообмена применяют четыре типа граничных условий, которые называют родами. Граничные условия первого и второго родов могут быть внешними и внутренними, а граничные условия третьего рода – только внешними. Граничные условия четвертого рода представляют собой внутренние граничные условия для системы твердых тел.

Граничное условие первого рода задает распределение температуры поверхности тела как функцию координат и/или времени:

$$T_s(x, y, z, t) = f(x, y, z, t),$$

где *T_s* – температура поверхности тела.

В простейшем случае температура поверхности тела считается постоянной на протяжении всего процесса теплообмена:

$$T_S = const$$
.

Подобная ситуация может быть, например, реализована при искусственном поддержании постоянной температуры.

Граничное условие второго рода состоит в задании распределения плотности теплового потока на границах тела и ее изменения во времени:

$$q = f(x, y, z, t),$$

где *q* – плотность теплового потока на границе расчетной области.

Простейший случай граничного условия второго рода состоит в постоянстве плотности теплового потока.

Граничное условие третьего рода задает температуру внешней среды, окружающей тело, и закон теплообмена между внешней средой и поверхностью тела, в качестве которого используется закон охлаждения Ньютона-Рихмана:

$$q_s = \alpha (T_s(x, y, z, t) - T_a(t)),$$

где q_s – плотность теплового потока на поверхности тела, Вт/м²; α – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, Вт/(м²·K); T_a – температура внешней среды, К.

В этом случае количество тепла, передаваемого в единицу времени с единицы площади поверхности тела во внешнюю среду с температурой T_a в процессе охлаждения прямо пропорционально разности температур между поверхностью тела и внешней средой.

Коэффициент теплоотдачи равен количеству тепла, отдаваемого или получаемого единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и окружающей средой в 1°. При нестационарном конвективном теплообмене величина коэффициента теплоотдачи зависит от теплофизических свойств тела и непрерывно изменяется с течением времени. В качестве приближения допустимо считать коэффициент теплоотдачи постоянным, не зависящим от температуры, и одинаковым для всей поверхности тела.

Граничное условие четвертого рода соответствуют теплообмену соприкасающихся твердых тел с разными теплофизическими свойствами, когда температура соприкасающихся поверхностей одинакова, а также конвективному теплообмену тела с жидкостью:

$$T_{s1}(x, y, z, t) = T_{s2}(x, y, z, t), \qquad \lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial n}\right)_{S1} = \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial n}\right)_{S2}.$$

Поскольку граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену поверхности рассматриваемого тела с поверхностью другого тела, его называют также стыковым условием или условием сопряжения.

Встречаются и другие более сложные граничные условия. К таковым, например, относятся комбинированные граничные условия, разные для различных частей тела, или меняющиеся во времени, а также граничные условия для движущихся тел или для тел с подвижными границами и др.

Постановка краевых условий является необходимым и часто самым ответственным этапом математического моделирования теплообмена.

§ 1.5. Радиационный теплообмен

Радиационный теплообмен может быть задан в качестве дополнительного к конвективному теплообмену внешнего граничного условия. Любое тело с температурой выше абсолютного нуля обладает собственным тепловым излучением, интенсивность которого зависит от температуры тела. Основные законы теплового излучения получены для состояния термодинамического равновесия и являются законами излучения идеального абсолютно черного тела. Абсолютно черным называется тело, которое полностью поглощает всю падающую на него энергию, ничего не пропуская и не отражая.

В соответствии с законом Стефана-Больцмана полная мощность излучения абсолютно черного тела в вакууме составляет

$$P_{BV} = \sigma S T^4, \tag{4}$$

где P_{BV} – мощность теплового потока, Вт; σ – постоянная Стефана-Больцмана, равная 5,67·10⁻⁸ Вт/(м²·K⁴); S – площадь излучающей поверхности, м²; T – температура тела, К. Мощность теплового излучения P_{RV} реального тела определяется введением в (4) коэффициента относительной излучательной способности ε :

$$P_{RV} = \varepsilon \sigma S T^4.$$
⁽⁵⁾

Если тело остывает не в вакууме при температуре 0 К, а во внешней среде с температурой T_a , то формула (5) для постоянной внешней температуры должна быть записана как

$$P_{RE} = \varepsilon \sigma S \left(T^4 - T_a^4 \right). \tag{6}$$

Если $P_R(t)$ обозначить мощность теплового излучения в момент времени t в процессе охлаждения тела с излучающей поверхностью S при стандартных условиях со снижением температуры от T_0 до T_a , то кумулятивные потери тепловой энергии $E_R(t)$, обусловленные тепловым излучением, равны

$$E_{R}(t) = \int_{0}^{t} P_{R}(t') dt',$$
(7)

где переменную t в подынтегральном выражении заменяет знак t'.

Принимая во внимание (6) и закон охлаждения Ньютона-Рихмана поверхности тела, выражение (7) следует записать как

$$E_R(t) = \varepsilon \sigma S \int_0^t \left(\left[(T_0 - T_a) e^{-kt'} + T_a \right]^4 - T_a^4 \right) dt'.$$

Потери за счет теплового излучения за промежуток времени Δt характеризуются формулой

$$\Delta E_R(t) = E_R(t) - E_R(t - \Delta t).$$

§ 1.6. Краевые задачи теплопроводности и методы их решения. Метод конечных элементов

Полученное дифференциальное уравнение теплопроводности, а также начальное и граничное условия определяют краевую задачу теплопроводности. Найти решение данной задачи означает решить дифференциальное уравнение и найти поле температур в теле, т.е. вывести функцию распределения температуры в заданной точке тела в любой момент времени T(x, y, z, t). Данная функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению, а также начальному и граничному условиям. В курсе математической физики доказывается теорема единственности решения, из которой следует, что если некоторая функция T(x, y, z, t) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности, начальному и граничному условиям, то она является единственным решением данной краевой задачи теплопроводности.

Выбор метода решения и используемого для этого математического аппарата зависит от типа конкретной задачи теплообмена. Трудоемкость решения последней в первую очередь определяется принадлежностью ее к классам линейных или нелинейных задач. В нелинейных задачах теплообмена дополнительно учитывают зависимость теплофизических свойств вещества от температуры, нелинейный характер условий теплообмена на границе тела и начальных условий и др.

Трудоемкость решения задачи теплообмена также зависит от ее размерности. Различают нуль-, одно-, дву- или трехмерные постановки задачи. При постановке задачи необходимо учитывать и систему координат (декартовая, полярная, цилиндрическая или сферическая система), в которой записывают уравнения теплообмена.

В зависимости от наличия изменчивости температурного поля во времени все задачи теплообмена делятся на стационарные и нестационарные. Кроме того, задачи теплообмена подразделяют на внутренние и внешние.

К внутренним относят задачи расчета температурных полей и тепловых потоков в твердых телах, формируемых в процессе теплопроводности. Внешними задачами теплообмена называют задачи расчета температурных полей и тепловых потоков в текучей среде, окружающей твердое тело, в процессе конвективного или радиационно-конвективного теплообмена.

Наконец, в зависимости от заданных (входных) и искомых (выходных) параметров задачи теплообмена подразделяют на прямые и обратные. В прямых задачах по заданным условиям однозначности определяют поле температур и тепловые потоки. В обратных задачах теплообмена по известному из эксперимента температурному полю определяют одно из условий однозначности.

Методы решения краевой задачи теплопроводности весьма сложны и являются предметом изучения математической физики. Все методы, использующие для решения средства математического анализа и вычислительной математики, подразделяют на аналитические и численные. Аналитические методы подразделяют на точные и приближенные. Точные аналитические методы дают решения в виде алгебраических функций. Приближенные аналитические методы предусматривают преобразование или упрощение исходной точной постановки задачи. Численные решения всегда являются приближенными. Наиболее часто для решения задач теплообмена численными методами используют метод конечных разностей и метод конечных элементов (МКЭ).

МКЭ является наиболее эффективным методом решения задач теплообмена и стал доступен благодаря широкому распространению компьютерных технологий. Идея МКЭ состоит в том, что любое непрерывное распределение физической переменной в расчетной области, включая температурное поле T(x, y, z, t), можно аппроксимировать набором кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Это позволяет в расчетах вместо сплошной среды с бесконечным числом степеней свободы использовать совокупность простых элементов, имеющих конечное число степеней свободы и связанных между собой в узловых точках.

В каждом из элементов произвольно задается пробная функция в максимально простой форме. В простейшем случае это полином первой степени. Каждая функция отлична от нуля только в окрестности одного узла и равна нулю вне своего элемента. Значения функций в узлах неизвестны и выражаются через значения аппроксимирующих функций в узлах элементов. В результате составляется система линейных алгебраических уравнений, количество которых равно количеству неизвестных значений в узлах. Чем большим количеством элементов разбиения характеризуется конечно-элементная модель, тем точнее приближение ее решений к моделируемому процессу. Количество элементов разбиения ограничивается только возможностями ЭВМ. Итогом является достижение требуемой точности. Если заданная точность не достигается, то нужно перерешать задачу с уточненными параметрами или более мелким разбиением пока требуемый результат не будет получен.

§ 1.7. Современные прикладные программные комплексы конечно-элементного анализа

В настоящее время существует большое количество программных продуктов по компьютерному моделированию, основанных на МКЭ и предназначенных для решения широкого круга физических и инженерных задач: механики деформируемого твердого тела, теплообмена, гидродинамики и электродинамики. Как правило, это весьма сложные и дорогостоящие программные комплексы, обладающие большими возможностями и позволяющие моделировать процессы из разных областей физических явлений.

Бесспорным лидером на рынке подобных программ остается пакет ANSYS. О популярности данного программного комплекса свидетельствует огромное количество легальных пользователей из более сотни стран мира. В число клиентов компании ANSYS входят практически все крупнейшие промышленные корпорации мира: BMW, Boeing, Caterpillar, Daimler-Chrysler, FIAT, Ford, General Electric, Lockheed Martin, Mitsubishi, Shell, Volkswagen-Audi и др. Программный комплекс ANSYS является одной из наиболее мощных конечноэлементных расчетных систем в мире. В числе других передовых численных расчетных систем следует назвать программные комплексы COMSOL, ABAQUS и ADINA.

Недостатки указанных программ являются следствием их больших возможностей. К их числу следует отнести сложность в освоении, большую стоимость и высокие требования к оборудованию.

ELCUT – это мощный современный комплекс программ российского производства для конечно-элементного моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач. Система программ ELCUT позволяет осуществлять расчеты электрического и магнитного полей, температурного поля и механической прочности.

Основные плюсы программного комплекса ELCUT: русскоязычный интерфейс, простота освоения, широкие аналитические возможности комплекса и высокая степень автоматизации всех операций. С помощью ELCUT возможно быстро сформулировать задачу, описав геометрию, свойства сред, источники поля и граничные условия, а также решить данную задачу с высокой точностью. Имеется возможность проанализировать полученное решение с помощью средств цветной графики и сохранить результаты в форме, пригодной для подготовки отчетов или для дальнейшего анализа. Можно вычислять различные интегральные величины на заданных пользователем линиях, поверхностях или объемах. Редактор геометрии в программе ELCUT позволяет легко и быстро описать геометрию модели. Фрагменты исследуемой модели можно импортировать из системы AutoCAD или других систем проектирования. Допускается как автоматическое, так и удобное ручное управления густотой сетки конечных элементов. Специальная технология, включенная в редактор модели, позволяет автоматически создавать гладкую сетку. Геометрическим объектам присваиваются метки, с помощью которых задаются граничные условия и нагрузки, не зависящие от сетки. Эти условия затем могут быть изменены в любое время.

Таким образом, ELCUT позволяет решать сложные задачи расчета полей и теории упругости на персональных компьютерах, не прибегая к помощи больших ЭВМ или рабочих станций.

Существуют две версии ELCUT: коммерческая профессиональная и некоммерческая (бесплатная) студенческая. Последняя отличается от профессиональной наличием ограничения на число узлов сетки (не более 255) и, следовательно, отсутствием возможности построения трехмерных моделей, которые можно создавать в профессиональной версии путем вытягивания двумерных моделей или путем импорта геометрии. В остальном функциональность и интерфейс указанных версий совпадают.

Недостатками программного комплекса ELCUT являются двумерный тип геометрических моделей и отсутствие выбора между типами конечных элементов (используются только треугольные элементы).

При решении задач теплообмена ELCUT может выполнять линейный и нелинейный стационарный и нестационарный температурный анализ в плоской и осесимметричной постановке. При постановке задач доступны следующие возможности.

Свойства сред: ортотропные материалы с постоянной теплопроводностью, изотропные материалы с теплопроводностью, зависящей от температуры, материалы с теплоемкостью, зависящей от температуры.

Источники поля: постоянные и зависящие от температуры объемные источники тепловой мощности, конвективные и радиационные источники, мощность джоулевых потерь, импортированная из электрических и магнитных задач.

Граничные условия: заданная температура, заданный тепловой поток на границе, условия радиационного и конвективного теплообмена, а также поверхности с постоянной, заранее неизвестной температурой.

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

§ 2.1. Создание задачи

Одним из этапов математического моделирования посмертного теплообмена является предварительное нахождение прижизненного температурного поля тела человека, которое представляет собой начальное условие посмертного теплообмена и необходимо для постановки соответствующей краевой задачи теплопроводности. Поскольку указанное поле является стационарным, то найти распределение температуры в теле в момент смерти человека означает решить задачу стационарного теплопереноса. Алгоритм решения данной задачи предполагает выполнение следующих этапов:

1) выбор моделируемой области тела и создание задачи;

2) задание геометрии модели и построение сетки конечных элементов;

3) задание теплофизических свойств модели;

4) задание граничных условий;

5) решение задачи и анализ результатов счета.

Наиболее удобной для конечно-элементного моделирования областью тела является голова, геометрия которой очень близка к такому телу, как многослойный шар с равномерным распределением слоев однородной структуры. Благодаря наличию осевой симметрии этот шар может быть представлен одним квадрантом сечения, проходящего через его центр. Это позволяет свести решаемую задачу к классу двумерных, значительно упростив создание модели и расчеты без потерь их точности. Построение расчетной модели стационарного теплопереноса в ELCUT осуществляется следующим образом.

После запуска программы в разделе меню «Файл» выбирается команда «Создать задачу...». В открывшемся диалоговом окне «Создание задачи» вводится «Имя файла задачи: Стационарное температурное поле головы». По умолчанию предлагается путь, например, «Создать в папке: D:\Математическое моделирование охлаждения трупа\ELCUT» (рис. 1). С помощью кнопки «Далее» открывается окно «Свойства задачи – Стационарное температурное поле головы. pbm», в котором в текстовых полях с нередактируемыми выпадающими списками выбираются тип задачи (теплопередача стационарная), класс модели (осесимметричная), единицы длины (миллиметры), координаты (полярные) и тип расчета: прикидочный, обычный или прецизионный (рис. 2).

оздание задачи	×
Введите имя и расположение новой задачи, или выберите нужную папку, пользуясь кнопкой Обзор.	
Имя файла задачи:	
Стационарное температурное поле головы	
Создать в папке: Обзор	
D:\/Математическое моделирование охлаждения трупа \	
Использовать существующую задачу как образец Сделать новую задачу как копию образца	
Выберите задачу -	
Стационарное температурное поле головы.pbm - задача стационарно 💛	

Рисунок 1. Создание задачи стационарного теплопереноса.

Типы расчета отличаются своей точностью. Наиболее высокая точность достигается в случае выбора прецизионного, наименьшая - прикидочного типов расчета.

Закладка «Связь задач» на этапе построения стационарного температурного поля пока не используется.

Нажатие кнопки «Готово» позволяет закончить выполнение первого этапа построения расчетной модели, после чего в окне описания задачи появляется сообщение (рис. 3):

Стационарное температурное поле головы. pbm – задача стационарной теплопередачи.

Геометрия: Стационарное температурное поле головы.mod.

Физические свойства: Стационарное температурное поле головы.dht.

Справочник свойств: <нет>.

Связи задач: нет связей.

После этого приступают к выполнению этапа задания геометрии конечно-элементной модели.

бщие Связа	задач	
Тип задачи:	Теплопередача стационарная 🗸 🗸	Единицы длины Миллиметры У
Класс модел Осесиммет	и ричная 🗸	Координаты Полярные ~
		Расчет Прецизионный
Файлы Геометрия:		d l
Свойства:	Стационарное температурное поле головы.dh	t
Справочник:		
Папка: D	Математическое моделирование охлаждения	πovna\ELCUT

Рисунок 2. Ввод параметров задачи стационарного теплопереноса.



Рисунок 3. Окно описания задачи стационарного теплопереноса.

§ 2.2. Задание геометрии конечно-элементной модели

При моделировании температурного поля головы хорошим приближением геометрии ее мозгового отдела является полусфера, состоящая из четырех равномерно распределенных однородных слоев с различными теплофизическими свойствами [1, 2]. Указанные слои полусферы образуют кожно-мышечный лоскут, кости свода черепа, ликвор субарахноидального пространства и головной мозг (рис. 4). Ввиду наличия осевой симметрии и изотропности свойств слоев полусферы расчетную область в данном случае целесообразно представить одним квадрантом наибольшего сечения полусферы, проходящего через его центр (рис. 5).

Построение двумерной геометрической модели головы в ELCUT начинается с выбора в меню «Правка» команды «Геометрическая модель» или двойного щелчка мыши по элементу «Геометрия: Стационарное температурное поле головы.mod» в окне описания задачи (см. рис. 3), после чего открывается окно модели.

Затем приступают к добавлению вершин путем выбора в меню «Правка» команды «Добавить вершину...», приводящего к появлению окна с текстовыми полями для введения координат вершин (рис. 6). Первая вершина с координатами r = 0 мм и $\varphi = 0^{\circ}$ соответствует центру полусферы и началу координат. Остальные вершины являются метками границ слоев полусферы, толщина которых должна быть определена при исследовании трупа. Согласно литературным данным анатомические слои, образующие полусферу, в среднем имеют следующую толщину: кожно-апоневротический лоскут – 5 мм, череп – 5 мм, ликвор – 2 мм, мозг – 86 мм. Поэтому радиальная координата данных вершин равна соответственно 98, 93, 88 и 86 мм. Угловая координата этих вершин, лежащих на оси *x*, равна 0°, а на оси *y* - 90°.

В норме прижизненное температурное поле головного мозга является стационарным и однородным за исключением его поверхностного слоя вариативной толщины, в котором наблюдается монотонное снижение интрацеребральной температуры [1, 2]. В этой связи при моделировании стационарного температурного поля головы целесообразно внутри мозгового слоя выделять два подслоя: глубинный и поверхностный, характеризующиеся одинаковым строением и схожими теплофизическими свойствами, но отличающиеся распределением температур. Средняя толщина указанных слоев мозга взрослого человека составляет 69 и 17 мм [2]. Для выделения в задаваемой геометрической модели этих дополнительных слоев требуется добавление двух вершин с радиальной координатой r = 69 мм.



Рисунок 4. Схематический срез головы вдоль линии, отмеченной звездочками (по D.A. Nelson и S.A. Nunneley [1]).



Рисунок 5. Схематическая двумерная геометрическая модель головы в полярных координатах (по D.A. Nelson и S.A. Nunneley [1]). Считается, что тепловой поток через основание полусферы равен нулю.



Рисунок 6. Диалоговое окно «Добавление вершин» с текстовыми полями для введения их полярных координат.

После добавления всех вершин следует соединить их прямыми и дугами окружности. Для этого в меню «Правка» нужно поставить галочку напротив пункта «Режим вставки». После этого можно соединять вершины, последовательно выбирая в растворе дуги растворы новых ребер «Прямая линия (0°)» и «Четверть круга (90°)». В результате получаем контур расчетной схемы (рис. 7). Нажатием специальной кнопки можно изменить масштаб модели таким образом, чтобы расчетная схема заняла окно модели целиком.



Рисунок 7. Двумерная геометрическая модель головы.

Таким образом, расчетная схема состоит из 5 блоков, каждый из которых представляет собой модель одного из 5 актуальных анатомических слоев головы, а также из 11 вершин и 15 соединяющих их ребер. Далее производится построение сетки конечных элементов путем нажатия кнопки с соответствующей командой. Студенческая версия ELCUT имеет ограничение на количество узлов сетки – не более 255. В случае превышения при автоматическом построении сетки указанного числа узлов появляется окно с соответствующим уведомлением. Обычно превышение узлов отмечается при построении сетки в моделях, состоящих из трех и более блоков. В этих случаях приходится прибегать к ручному построению сетки.

Для этого необходимо в контекстном меню блока выбрать команду «Свойства». В появившемся окне «Свойства выделенных объектов» следует переключить шаг дискретизации с автоматического на ручной и указать в активированном текстовом поле соответствующее число (рис. 8). Затем в контекстном меню нужно последовательно выбрать команды «Построить сетку» и «Во всех блоках» или «В блоках без сетки». Программа выполнит построение сетки с выбранным шагом дискретизации во всех блоках (рис. 9).

Свойства выделенных объектов	х
Блок Статистика Метка Блок Статистика Метка Сар (нет) Brain CSF Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp CSF Scalp CSF Scalp CSF Scalp CSF Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp Scalp	
45 узлов	4
ОК Отмена Справк	a

Рисунок 8. Ручной выбор шага дискретизации при построении сетки конечных элементов в блоке Scalp. Количество узлов сетки, построенной в данном блоке с выбранным шагом дискретизации, равно 45.



Рисунок 9. Схема расчетной области с построенной с выбранным шагом дискретизации сеткой из 230 конечных элементов треугольной формы.

Шаг дискретизации в студенческой версии ELCUT нужно стараться минимизировать с таким расчетом, чтобы общее количество узлов сетки было наибольшим, но не превышало 255. Для пятислойной двумерной модели головы оптимальный шаг дискретизации, позволяющий достичь построения сетки из 230 треугольных элементов, равен 7.

Проверить статистику расчетной схемы можно путем выделения любого блока и выбора в контекстном меню команды «Свойства». В появившемся окне «Свойства выделенных объектов» следует выбрать закладку «Статистика».
§ 2.3. Задание физических параметров и граничных условий

Необходимым элементом моделирования прижизненного температурного поля головы является задание таких теплофизических свойств ее тканей, как коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность. Перечисленные параметры большинства актуальных биотканей установлены и приведены в специальной литературе (табл. 1). В качестве теплопроводности ликвора предложено учитывать указанный коэффициент для воды.

В ELCUT физические параметры задачи вводятся последовательно через метки блоков и задаются отдельно для каждой метки блока. Для создания меток блока нужно в окне задач, которое по умолчанию прикреплено к левой границе главного окна ELCUT, выделить папку «Метки блоков» и в открывшемся контекстном меню выбрать команду «Создать метку». Заданная двумерная геометрическая модель головы включает 5 блоков, представляющих собой глубинные и поверхностные отделы головного мозга, ликвор субарахноидального пространства, свод черепа и кожно-апоневротический лоскут. Из них теплофизические свойства глубинных и поверхностных отделов мозга идентичны. Поэтому в рамках построенной геометрической модели необходимо создать 4 метки с именами: Brain, CSF, Scull и Scalp (рис. 10).

Затем следует привязать каждый блок геометрической модели к определенной метке через диалоговое окно «Свойства выделенных объектов», выбирая из выпадающего текстового поля «Метка» соответствующее имя (см. рис. 8). Задание свойств блока производится после создания соответствующей метки блока. Для этого в окне задач нужно выделить требуемую метку блока и в открывшемся диалоговом окне «Свойства метки блока» последовательно задать теплопроводность, удельную теплоемкость и плотность материала блока (рис. 11). Данную операцию следует выполнить для каждой метки блока, созданной в рамках построенной геометрической модели.

Параметр	Скальп	Череп	Ликвор*	Мозг	Кровь
λ , Bt/(M·K)	0,34	1,16	0,618	0,503	0,54
<i>с</i> , Дж/(кг·К)	4000	2300	4174	3700	3800
ρ, KΓ/M ³	1000	1500	1003	1050	1050
Примеча	ние – Для	я ликвора	приведен	ы значени	ия тепло-
проволности	и теплоем	кости вол	ы при темг	ературе 3	0 °C.

Таблица 1. Теплофизические свойства тканей головы [1-3]



Рисунок 10. Окно задач модели стационарного температурного поля.

ELCUT позволяет учитывать возможную зависимость коэффициента теплопроводности материала от температуры. При необходимости нужно отметить поле «Нелинейный материал» и в появившемся окне «Редактирование кривой» заполнить таблицу со значениями коэффициента теплопроводности при разных температурах.

Граничные условия задаются с использованием меток ребер и вершин. Для создания меток ребер нужно в окне задач выделить папку «Метки ребер» и выбрать в контекстном меню команду «Создать метку». Задача стационарного температурного поля головы предполагает создание 5 меток ребер, задающих условия теплообмена на границах блоков (см. рис. 10): DSBB (между глубинными и поверхностными отделами мозга), BCSF (между мозгом и субарахноидальным пространством), CSFSB (между субарахноидальным прочерепом), (между черепом странством И SSB И кожноапоневротическим лоскутом), SAB (между кожей и внешней средой).

Затем следует привязать каждое из 5 указанных ребер к определенной метке через диалоговое окно «Свойства выделенных объектов», выбирая из выпадающего текстового поля «Метка» соответствующее имя (см. рис. 8).



Рисунок 11. Задание свойств блока «Brain».

Кроме этого заданная геометрическая модель содержит еще 10 ребер с отсутствием теплового потока через указанные поверхности. Такое граничное условие второго рода называется однородным, устанавливается по умолчанию на всех ребрах, составляющих внешнюю границу модели и на которых явно не указано иное граничное условие, и употребляется на плоскостях симметрии, если ввиду симметричности геометрии и источников тепловыделения задача решается только на части области. Создавать метки для ребер с однородными граничными условиями не требуется. Граничные условия задаются после создания актуальных меток ребер путем выделения метки и выбора в контекстном меню команды «Свойства». Граничные условия для данной метки нужно задать в открывшемся диалоговом окне «Свойства метки ребра» (рис. 12).

Свойства метки ребра - DSBB	×
Общие	
\mathbf{V} Температура: T = T _o T _o = 37.2 (°С)	
П Тепловой <u>п</u> оток: F _n = -q (ΔF _n = -q) q = 0 (Вт/м ²)	
$\Box Конвекция: Fn = \alpha (T-To)\alpha = 0 (BT/K·м2)To = 0 (°C)$	f
$\Box \underline{P}_{advaquus:} F_n = \beta \cdot k_{sb} \cdot (T^4 - T_0^4)$ $\beta = 0$ $T_o = 0$ (°C)	
Pавная температура: T = const	
☐ <u>Ч</u> етная периодичность: T ₁ = T ₂ ☐ Н <u>е</u> четная периодичность: T ₁ = - T ₂	
ОК Отмена С	іправка

Рисунок 12. Задание свойств метки ребра «DSBB».

ELCUT позволяет задавать следующие граничные условия для меток ребер: температуру, тепловой поток, конвекцию, радиацию, равную температуру (см. рис. 12).

В норме прижизненное температурное поле глубинных отделов головного мозга является стационарным и однородным. Для отражения данного условия в задаче стационарного теплопереноса следует в свойствах метки ребра DSBB задать граничное условие первого рода с постоянной краниоэнцефальной температурой (см. рис. 12). Целесообразно также в точке начала координат создать метку вершины и задать для нее аналогичное граничное условие.

Для создания метки вершины нужно в окне задач выделить папку «Метки вершин» и выбрать в контекстном меню команду «Создать метку». После этого в окне задач появляется новая метка, которую следует переименовать, например, в «Начало координат». Затем необходимо привязать вершину в начале координат к данной метке через диалоговое окно «Свойства выделенных объектов», выбирая из выпадающего текстового поля «Метка» имя «Начало координат».

Граничные условия для созданной метки вершины задаются путем выбора в ее контекстном меню команды «Свойства». Вершина в задаче расчета температурного поля может иметь известное значение температуры или представлять собой линейный источник тепла. В рассматриваемой задаче стационарного теплопереноса следует в открывшемся диалоговом окне «Свойства метки ребра» активировать текстовое поле температуры и ввести в него числовое значение, идентичное таковому для метки ребра DSBB (рис. 13).

Несмотря на свою однородность и стационарный характер, температура глубинных отделов мозга, как внутрижелудочковая, так и паренхиматозная, является непрерывной случайной величиной, определяемой результирующим влиянием локальной выработки метаболического тепла, интенсивности мозгового кровотока и температуры артериальной крови [4-7]. Установлено, что температура глубинных отделов мозга может варьировать в пределах от 35 до 39 °C, с наибольшей вероятностью принимая какое-либо значение из числового отрезка от 37,2 до 38,2 °C [8-13]. Правильный выбор данного значения температуры оказывает определяющее влияние на точность результатов моделирования теплообмена. Для последующего сравнения результатов определения ДНС на основе двойной экспоненциальной модели С. Henssge и построенной конечно-элементной модели посмертного теплообмена целесообразно в качестве стационарной прижизненной краниоэнцефальной температуры на ребре DSBB и вершине «Начало координат» указать 37,2 °С (см. рис. 12 и 13).



Рисунок 13. Задание свойств метки вершины «Начало координат».

В поверхностном слое мозга толщиной примерно 17 мм наблюдается монотонное снижение интрацеребральной температуры, степень которого зависит от температуры поверхностных тканей головы (рис. 14). Поэтому прижизненная температура поверхности мозга является более изменчивым показателем и может варьировать от 24 до 38 °C, в среднем составляя 34-37 °C [2, 14, 15]. В рамках построенной модели поверхностный слой мозга состоит из двух блоков, наружный из которых имитирует субарахноидальное пространство. Поэтому целесообразно задать на ребре BCSF температуру величиной 35,5 °C, а на ребре CSFSB- 35 °C.

При задании на остальных ребрах граничного условия первого рода нужно учесть следующее. Перепад температур между поверхностью кожи головы и сводом черепа составляет не менее 3 °C, между поверхностями свода черепа – 1 °C. Соответственно на ребрах SSB и SAB следует задать температуры, равные 34 и 31 °C (см. рис. 14). На этом геометрическая и физическая идеализация задачи завершена. На этапе анализа результатов конечно-элементной модели заданное распределение температур может быть скорректировано.



Рисунок 14. Температура тканей головы у взрослых и детей в зависимости от радиальной координаты (по L. Zhu, C. Diao [2]).

§ 2.4. Решение задачи и анализ его результатов

Перед запуском процесса решения рекомендуется проверить исходные данные. Для того, чтобы задача могла быть решена, должны быть выполнены следующие условия:

- заданы тип задачи, класс модели, точность расчета и прочие свойства задачи;

- геометрическая модель имеет законченный характер с построенной сеткой конечных элементов и метками;

- определены физические свойства каждой метки, использованной в модели;

- решена задача-источник, если рассматриваемая задача использует результат ее решения в качестве исходных данных.

При соответствии введенных исходных данных выбранной расчетной модели производится запуск процесса решения задачи. Для этого нужно выбрать позицию «Решить: Стационарное температурное поле головы.pbm» в меню «Задача» или в контекстном меню в окне описания задачи. Можно пропустить это действие и прямо выбрать позицию «Картина поля» в меню «Задача» или контекстном меню. Во время решения задачи специальный индикатор позволяет наблюдать за продвижением процесса решения задачи.

Для решения линейных задач стационарного теплопереноса ELCUT использует итерационный метод сопряженных градиентов с предобуславливанием матрицы по методу декомпозиции области. Это позволяет получить высокую скорость решения при почти линейной зависимости необходимого количества итераций от количества узлов сетки. Критерием завершения итерационного процесса служит достижение заданной точности решения.

В профессиональной версии ELCUT доступно автоматическое улучшение построенной сетки на основе ранее полученных результатов решения задачи на грубой сетке конечных элементов. Возможность автоматически измельчать сетку в областях с сильно неоднородным полем практически исключает необходимость задавать шаг дискретизации вручную. Адаптивное улучшение сетки доступно для всех представленных в ELCUT типов задач.

Анализ решения начинается с того, что ELCUT открывает новое окно, в котором изображается картина вычисленного температурного поля (рис. 15). По умолчанию температурное поле изображается методом, наиболее адекватным типу решенной задачи. ELCUT позволяет настраивать картину поля путем выбора команды «Свойства картины поля» в меню «Вид».



Рисунок 15. Окно результатов решения задачи стационарного температурного поля головы.

При настройке картины поля доступны следующие форматы графического представления: изотермы, векторы (градиент температуры, тепловой поток), цветная карта (температура, градиент температуры, тепловой поток, прочие величины). Также доступно наложение на картину поля сетки конечных элементов.

Для выбора необходимого вида визуализации нужно отметить соответствующий флажок (рис. 16). Можно использовать всю палитру средств визуализации поля, произвольно комбинируя их между собой. Если не выбран ни один из видов, на экране будут нарисованы только контуры геометрической модели. В этом же диалоговом окне можно указать пределы изменения физической величины и число цветов, используемых при построении цветной карты.

Свойства картины поля			×
Изотермы	Шar:	∘⊂	ОК
	Опорное:	∘⊂	Применить
			Отмена
Векторы:	Масштаб:		Справка
Градиент температуры G	Шаг сетки:	MM	Совет
• Тепловой поток F			
 Цветная карта: Температура Градиент температуры Тепловой поток Прочие величины 	ература Т	Число цветов Максимум: 37.3 Минимум: 30.9	: 20 ∘⊂ ∘⊂
Конечные элементы			

Рисунок 16. Параметры картины температурного поля, используемые по умолчанию.

Средства анализа картины поля позволяют задать контур интегрирования, которым называется направленная ломаная линия, состоящая из отрезков прямых и дуг окружностей (включая ребра модели). Добавлять линии к контуру можно двумя способами: с помощью мыши или путем ввода координат его концевых точек.

Для ручного добавления нужно сначала выбрать команду «Добавить (Линия/Ребро/Блок)» из меню «Контур» или контекстного меню, а затем перемещать мышь с нажатой левой кнопкой от начала к концу будущей линии. Для реализации второго способа надо выбрать команду «Ввод линий...» из меню «Контур» или команду «Ввод линий контура...» контекстного меню. Каждая из этих команд открывает диалоговое окно с полями для ввода радиальной и угловой координат начальной точки контура и поле с выпадающим нередактируемым списком доступных типов линий контура (рис. 17). Нажатие кнопки «Начальная точка» открывает аналогичное диалоговое окно для ввода координат конечной точки контура (рис. 18).



Рисунок 17. Диалоговое окно для ввода полярных координат начальной точки и выбора вида линии контура.



Рисунок 18. Диалоговое окно для ввода полярных координат конечной точки линии контура. Радиальная координата конечной точки в данном случае равна суммарной толщине всех блоков геометрической модели.

Контуры в ELCUT необходимы для расчетов значений физических величин и распределения поля вдоль контура. В рассматриваемой задаче стационарного теплопереноса актуальность представляет распределение температурного поля вдоль нормали ко всем ребрам геометрической модели, проведенной от начала координат (рис. 19).

Выбор команд «График» или «Таблица» из меню «Вид» или контекстного меню позволяет представить распределение температуры по заданному контуру соответственно в виде термограммы (рис. 20) или таблицы (рис. 21).



Рисунок 19. Картина температурного поля с добавленной линией контура.



Рисунок 20. Термограмма по линии контура.

📄 Таблица Результат расчета Стационарное температурно 💼 💷 💌								
	р (мм)	ф(град)	T (°C)	G (K/M)	F (Вт/м ²)	λ (Вт/К м)		
N	0	0	37.2	1.65188e-10	8.30898e-11	0.503		
N	8.16667	45	37.2	5.51769e-11	2.7754e-11	0.503		
N	16.3333	45	37.2	2.27155e-11	1.14259e-11	0.503		
\mathbf{N}	24.5	45	37.2	3.71511e-11	1.8687e-11	0.503		
N	32.6667	45	37.2	2.58902e-11	1.30228e-11	0.503		
N.,	40.8333	45	37.2	1.83848e-11	9.24755e-12	0.503		
$ \mathbf{x} $	49	45	37.2	6.08878e-12	3.06266e-12	0.503		
$ \mathbf{N} $	57.1667	45	37.2	1.63639e-11	8.23105e-12	0.503		
N.,	65.3333	45	37.2	1.93451e-11	9.73056e-12	0.503		
N	73.5	45	36.6907	106.818	53.7295	0.503		
X	81.6667	45	35.8788	93.1165	46.8376	0.503		
X	89.8333	45	34.6285	200.333	232.387	1.16		
>	98	45	31	591.62	201.151	0.34		

Рисунок 21. Таблица физических параметров по линии контура.

Таблица, генерируемая ELCUT по умолчанию, при решении задач стационарного теплопереноса содержит 17 физических параметров и большее количество строк. Физические параметры представлены температурой, векторами градиента температуры и плотности теплового потока, а также теплопроводностью.

С помощью команд «Столбцы...» и «Строки...», выбираемых в меню «Вид» или контекстном меню, открываются диалоговые окна, позволяющие редактировать столбцы (рис. 22) и строки (рис. 23) таблицы. В частности, возможно выбирать необходимые физические и геометрические параметры (столбцы) для включения в таблицу, регулировать распределение точек (строк таблицы) вдоль контура, добавлять дополнительные точки (строки таблицы) на указанном расстоянии от начала контура.

Выбрав команду «Локальные значения» в меню «Вид» или в контекстном меню окна картины поля, можно также получить значения физических величин, характеризующих температурное поле в указанной точке (рис. 24).



Рисунок 22. Окно редактирования свойств столбцов таблицы физических параметров по линии контура.

Строки таблицы Х
Табуляция контура длиной 98 мм, состоящего из 1 сегментов.
Шаг 8.1667 (мм)
Включать концы сегментов
Число строк: 13
Для всего контура
О На каждом сегменте
ОК Отмена Справка

Рисунок 23. Окно редактирования свойств строк таблицы физических параметров по линии контура.



Рисунок 24. Окно значений физических величин, характеризующих температурное поле в конечной точке контура.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

§ 3.1. Создание задачи

Наступление смерти сопровождается выключением механизмов поддержания температурного гомеостаза, вследствие чего температурное поле тела человека становится нестационарным. Поэтому найти температурное поле мертвого тела в процессе его охлаждения означает решить задачу нестационарного теплопереноса. Алгоритм ее решения предполагает выполнение стандартной последовательности действий, включающей создание задачи, задание геометрии и теплофизических свойств модели, а также граничных условий и построение сетки конечных элементов.

Особенностью моделирования посмертного теплообмена является его базирование на результатах решения задачи стационарного теплопереноса, в рамках которого уже была выбрана моделируемая область тела и заданы ее геометрия и теплофизические свойства, а также найдено начальное распределение температур. По этой причине файл геометрической модели для обеих указанных задач должен быть общим. С учетом этого расчетная модель нестационарного теплопереноса в ELCUT строится следующим образом.

Создание задачи нестационарного теплопереноса выполняется шаблонно с помощью соответствующей команды. В открывшемся диалоговом окне вводится «Имя файла задачи: Нестационарное температурное поле головы» и выбирается его путь. По умолчанию предлагается создать файл задачи в той же папке, в которой располагаются файлы задачи стационарного теплопереноса (рис. 25). Чтобы не задавать заново геометрию и теплофизические свойства модели, следует отметить команду «Сделать новую задачу как копию образца» и оставить в активированном поле выбираемую программой по умолчанию задачу «Стационарное поле головы» (см. рис. 25).

С помощью кнопки «Далее» открывается новое окно с уже выбранными свойствами задачи. Из них следует изменить тип задачи на теплопередачу нестационарную и оставить без изменений класс модели, единицы длины, координаты и тип расчета (рис. 26). По умолчанию ELCUT предлагает создание новых файлов геометрии модели и ее теплофизических свойств. Для последующего задания связи задач в качестве файла геометрии следует указать файл «Стационарное температурное поле головы. mod» из задачи стационарного теплопереноса (см. рис. 26).

Создание за	дачи	×
Q.	Введите имя и расположение новой задачи, или выберите нужную папку, пользуясь кнопкой Обзор.	
	Имя файла задачи:	
	Нестационарное температурное поле головы	
	Создать в папке: Обзор	
	D:\Математическое моделирование охлаждения трупа\	
	Использовать существующую задачу как образец Использовать существующую задачу как копию образца Выберите задачу -	
	Стационарное температурное поле головы.pbm - задача стационарно \vee	
	< Назад Далее > Отмена Справка	

Рисунок 25. Создание задачи нестационарного теплопереноса.

Для задания связи задач нестационарного и стационарного теплопереноса необходимо перейти на закладку «Связь задач» в диалоговом окне «Свойства задачи» и выбрать в выпадающем списке «Тип данных» пункт «Распределение температуры» (рис. 27). Далее следует либо ввести имя файла задачи-источника (Стационарное температурное поле головы.pbm) в поле «Задача», либо нажать кнопку «Обзор» и выбрать это имя в списке существующих задач. После заполнения данного поля нужно нажать кнопку «Добавить» для добавления указанной связи в список источников данных (см. рис. 27).

До запуска процесса решения любой нестационарной задачи необходимо задать временные параметры, перейдя в окне свойств задачи на закладку «Временные параметры».

Создание задач	и	×
Ô.	Выберите тип и другие параметры новой зада Можете также изменить имена файлов, в кот сохранены геометрическая модель и физичес	чи. орых будут жие свойства.
		Единицы длины
Тип задачи:	Теплопередача нестационарная 🗸	Миллиметры 🗸
Класс модел	и	Координаты
Осесимметр	миная 🗸	Полярные ~
		Расчет
		Прецизионный ~
Файлы		
Геометрия:	Стационарное температурное поле головы.mod	
Свойства:	Нестационарное температурное поле головы.db	nt
Справочник:		
Папка: D:	\Математическое моделирование охлаждения тр	pyna\ELCUT
	< Назад Далее > 0	тмена Справка

Рисунок 26. Ввод параметров задачи нестационарного теплопереноса.

В поле «Интегрировать по времени до:» следует указать длину посмертного временного интервала, в течение которого требуется просчитать распределение температур в расчетной области. Расчет всегда начинается с нулевого момента времени. Учитывая, что при охлаждении трупа выравнивание краниоэнцефальной и внешней температур наблюдается обычно через 24 ч после смерти, именно этот промежуток времени, выраженный в секундах, целесообразно указывать в качестве актуального расчетного периода (рис. 28).

В поле «с шагом:» нужно указать величину шага интегрирования. Этот временной параметр контролирует точность вычислений. Последняя выше при уменьшении величины шага. Рекомендуется начинать с большой длины шага, затем постепенно уменьшая ее.

бщие	Связь задач	Временные параметры			
Источн	ики данных:	Данные из других	задач		
Pacnp	еделение темг	пературы: Стационарное	температурн	удали Удалит	4ТЬ Ь ВСё
Реда	ктируемая ссь	ілка			
Тип ,	данных: Рас	спределение температур	ы ∨	Обнов	ить
Зада	ча: Ста	щионарное температурно	ое поле голов	Обзо	p
Врем	19:]	
Дета	іли:	K.	~		
			ОК	Отмена	Справка

Рисунок 27. Задание связи задач нестационарного и стационарного теплопереноса.

Если отметить команду «Автоматический выбор шага интегрирования», то шаг интегрирования по времени вычисляется самой программой.

Поле «Запоминать решение каждые:» служит для указания шага времени, с которым будет вестись запись результатов в файл результатов. Шаг записи должен быть не меньше, чем шаг интегрирования.

В поле «Начиная с момента:» указывается момент времени, с которого начинается запись результатов в файл результатов. Если ввести в поле ноль, то запись начнется с начального состояния задачи, т.е. с момента наступления смерти человека.

Поле «Начальная температура:» предназначено для ввода значения температуры модели в начальный (нулевой) момент времени. Начальную температуру можно задать числовой константой или формулой от координат.

Временные параметры	×
Здесь Вы можете задать временные параметры для новой задачи.	
Интегрирование по времени	
Интегрировать по времени до: 86400 (c)	
с шагом: 600 (с)	
Автоматический выбор шага интегрирования	
Вывод решения в файл	
Запоминать решение каждые: 600 (с)	
Начиная с момента 0 (с)	
Начальная температура: (°С)	
< Назад Готово Отмена Спра	вка

Рисунок 28. Окно задания временных параметров задачи нестационарного теплопереноса.

Если начальная температура не задана, она считается равной нулю. Несмотря на то, что синтаксис формул в ELCUT позволяет задавать функции начальной температуры от полярных координат, в приложении декартовы и полярные координаты принимаются в качестве констант, равных нулю. Поэтому фактически можно задавать начальную температуру лишь как функцию от времени. Именно по этой причине следует стационарное температурное поле расчетной области принимать в качестве начального распределения температур путем задания связи задач нестационарного и стационарного теплопереноса. В этом случае температура, импортированная из связанной задачи, имеет более высокий приоритет независимо от того, что указано в поле «Начальная температура» (см. рис. 28).

§ 3.2. Задание физических параметров и краевых условий

Благодаря наличию связи задач выполнять построение геометрической модели задачи нестационарной теплопередачи не требуется, поскольку она уже задана путем использования соответствующего файла задачи стационарного теплопереноса (см. рис. 26). Аналогичным образом можно скопировать и все теплофизические свойства модели, указав в поле «Свойства:» меню «Свойства задачи» соответствующий файл задачи стационарного теплопереноса с расширением .dht. Однако в этом случае данный файл становится общим для обеих задач, а вместе с теплофизическими свойствами модели будут скопированы и ее граничные условия. Поскольку граничные условия для стационарной и нестационарной теплопередач различны, внесение каких-либо изменений в общий файл физических свойств отразится в расчетных областях обеих задач и приведет к изменению начального условия задачи нестационарного теплопереноса.

Поэтому лучше скопировать файл «Стационарное поле головы. dht» и сохранить его в той же папке, но под другим именем, например, «Нестационарное поле головы. dht», а затем указать путь к нему в свойствах задачи (см. рис. 26). Данный прием позволяет скопировать физические свойства и граничные условия задачи стационарного теплопереноса с возможностью последующего их редактирования. Также возможно задать физические параметры задачи путем их последовательного копирования для каждой метки блоков, ребер и вершины из задачи стационарного теплопереноса.

Таким образом, начальное температурное поле головы и теплофизические характеристики ее тканей задаются путем использования файлов геометрии и свойств из решенной задачи стационарного теплообмена, при этом файл свойств копируется и не должен быть общим. На следующем этапе задаются граничные условия.

Граничные условия задаются на уже созданных 5 метках ребер и 1 метке вершины. На всех 4 метках внутренних ребер следует снять флажок с граничного условия первого рода и не задавать никаких иных граничных условий. Если на этих метках задать граничное условие второго рода с нулевым тепловым потоком или граничное условие равных температур, то результаты решения задачи будут идентичными таковым при отсутствии каких-либо отметок.

Вместе с тем, необходимо на метке внешнего ребра задать граничное условие третьего рода, обозначающее конвективный теплообмен, протекающий по закону Ньютона-Рихмана. Температуру внешней среды примем постоянной и равной 10 °C (рис. 29). Коэффициент теплоотдачи воздуха в условиях естественной конвекции составляет от 5 до 25 Вт/($m^2 \cdot K$). В качестве приближения положим коэффициент теплоотдачи равным 6 Вт/($m^2 \cdot K$), постоянным и одинаковым для всей поверхности ребра (см. рис. 29).

Свойства метки ребра - SAB	×
Общие	
$T_{o} = 0$ (°C)	
П Тепловой <u>п</u> оток: F _n = -q (ΔF _n = -q) q = 0 (Вт/м ²)	
	f
$ \begin{array}{ c c c } \hline \Box & \underline{P}_{a} \\ \hline \Box & \underline{P}_{a} \\ \hline \beta = & \underline{0} \\ \hline T_{o} = & \underline{0} \\ \hline \end{array} $	
 Равная температура: T = const Цетная периодичность: T₁ = T₂ П Нечетная периодичность: T₁ = - T₂ 	
ОК Отмена С	îправка

Рисунок 29. Задание свойств метки внешнего ребра модели.

В случаях, когда охлаждение трупа протекает в условиях изменяющейся температуры внешней среды, ELCUT позволяет в текстовое поле внешней температуры, обозначаемое символом T_o, вместо числовых значений вводить формулы, описывающие зависимость внешней температуры от ДHC. Наличием аналогичной опции характеризуется и текстовое поле, предназначенное для ввода значений коэффициента конвективной теплоотдачи.

Помимо естественной и принудительной конвекции на внешнем ребре модели возможно также одновременно или раздельно задавать и радиационный теплообмен, протекающий согласно формуле (6). Для этого потребуется ввести в соответствующие поля значения внешней температуры и коэффициента поглощения поверхности.

Коэффициент поглощения, обозначаемый в ELCUT буквой β , численно равен коэффициенту относительной излучательной способности ε . В температурных диапазонах при посмертном охлаждении трупа относительная излучательная способность кожи человека близка к таковой абсолютно черного тела ($\varepsilon = 1$), по мнению разных исследователей составляя от 0,95 до 1 с медианой $\varepsilon = 0,98$ [16].

Количественная оценка вклада теплового излучения в теплопотери при охлаждении трупа осуществлена в 1998 г. G. Mall, M. Hubig, G. Beier и W. Eisenmenger [16]. Согласно полученным ими данным теплопотери за счет теплового излучения в первый час после смерти составили примерно от 200 кДж для тел с ростом 165 см и массой 50 кг в условиях охлаждения при постоянной температуре 20 °C до 600 кДж для тел ростом 185 см и массой 100 кг в условиях охлаждения при постоянной температуре 5 °C. В следующие 7-18 ч посмертного периода указанные теплопотери составляют около 100 кДж/ч [16].

Диалоговое окно свойств метки вершины «Начало координат» позволяет задать наличие внутреннего источника тепла, которое имеет место при охлаждении трупа (рис. 30). Гипотеза о выделении в трупе энергии была выдвинута F. Lundquist еще в 1956 г. [17]. Тогда же было оценено количество теплоты, выделяемое за счет посмертного метаболизма гликогена и некоторых других биохимических процессов [17]. Однако полученные оценки учитывали только отдельные аспекты посмертного теплообмена. Суммарная оценка всех источников суправитальной активности в трупе была произведена на основе уравнения теплового баланса лишь в цикле исследований группы G. Mall [16, 18-20]. Последняя для трупа ростом 175 см и массой 75 кг при температуре внешней среды 5 °C составила до 500 кДж [18, 19].



Рисунок 30. Задание свойств метки вершины «Начало координат».

При задании радиационного теплообмена и суправитальной выработки тепловой энергии следует учесть ряд моментов.

Во-первых, на практике очень сложно измерить суммарную плотность теплового потока от всех источников суправитальной активности, расположенных в пределах рассматриваемой геометрической модели, а также описать ее зависимость от длительности постмортального периода.

Во-вторых, согласно данным литературы теплопотери при охлаждении мертвого тела за счет радиации примерно равны суммарному количеству тепловой энергии, производимой всеми внутренними источниками суправитальной активности.

С учетом изложенного целесообразно не учитывать на внешнем ребре расчетной области радиационные теплопотери, а на метке вершины «Начало координат» - наличие внутреннего источника тепловой энергии, полагая их взаимное количественное равенство (см. рис. 29 и 30).

На этом геометрическая и физическая идеализация задачи нестационарного теплообмена завершена.

§ 3.3. Решение задачи и анализ его результатов

Для того, чтобы задача могла быть решена, должны быть заданы свойства задачи, полностью построена геометрическая модель с сеткой конечных элементов и метками, определены физические свойства каждой метки, использованной в модели, и решена связанная с текущей задача стационарного теплопереноса. При соответствии введенных исходных данных указанным условиям производится запуск процесса решения задачи.

В качестве первого результата ELCUT предлагает картину вычисленного температурного поля в конечной точке актуального постмортального периода, заданного в окне временных параметров задачи нестационарного теплопереноса (рис. 31).



Рисунок 31. Картина температурного поля головы через 24 ч после наступления смерти при постоянной внешней температуре 10 °C.

При настройке свойств картины поля доступны различные форматы графического представления, а также пределы изменения физической величины и число цветов, используемых при построении цветной карты (см. напр. рис. 32).

Анализируя картину поля, можно с помощью мыши или путем ввода координат концевых точек задать контур интегрирования и получить распределение температурного поля по заданному контуру в виде таблиц или графиков температуры, градиента температуры, теплового потока в конкретные моменты постмортального интервала, установленного при задании временных параметров расчетной модели. В рассматриваемой задаче интерес представляет распределение температурного поля вдоль прямолинейного контура от начала координат до внешнего ребра модели (рис. 33, 34).



Рисунок 32. Векторное поле градиента температур в расчетной области.



Рисунок 33. Термограмма по линии контура через 24 ч после смерти.

Т	📄 Таблица Результат расчета Нестационарное темпер 💼 💷 💌							
11	8640	D	• 🐨 🗠	_	_			
	р (мм)	ф(град)	T (°⊂)	G (К/м)	F (Вт/м ²)	λ (Вт/К·м)		
N	0	0	11.331	0.93307	0.469334	0.503		
\mathbf{N}	8.16667	45	11.3238	1.20019	0.603695	0.503		
N.	16.3333	45	11.3099	2.17368	1.09336	0.503		
N.	24.5	45	11.2882	3.20908	1.61417	0.503		
N	32.6667	45	11.2582	4.12676	2.07576	0.503		
N.	40.8333	45	11.2208	5.02279	2.52647	0.503		
N.	49	45	11.1752	5.95975	2.99775	0.503		
N.	57.1667	45	11.1237	6.7715	3.40607	0.503		
N	65.3333	45	11.0658	7.44765	3.74617	0.503		
N	73.5	45	11.0018	8.09081	4.06968	0.503		
N.	81.6667	45	10.9333	8.62926	4.34052	0.503		
N .	89.8333	45	10.8739	3.91834	4.54528	1.16		
<u>></u>	98	45	10.7925	13.9859	4.75522	0.34		

Рисунок 34. Таблица физических параметров по линии контура через 24 ч после смерти.

С помощью команды «Локальные значения», запускаемой из меню «Вид» или из контекстного меню окна картины поля, можно также получить значения физических величин, характеризующих температурное поле в любой точке с заданными координатами в заданный момент времени (рис. 35).

Для нестационарных задач в ELCUT присутствует возможность анализировать графики изменения температуры и других физических величин в заданной точке поля во времени. Для построения термограммы в точке начала координат нужно выбрать команду «График по времени» в меню «Вид» при открытой картине температурного поля. Запуск данной команды из контекстного меню поля построит график во времени для точки, указанной мышью.



Рисунок 35. Окно значений физических величин, характеризующих температурное поле в точке, расположенной на внешнем ребре геометрической модели головы, спустя 24 ч после наступления смерти. Термограммы в других точках поля строятся после указания их декартовых координат в диалоговом окне «Кривые на графике во времени, вызываемом путем запуска команды «Свойства графика» из его контекстного меню или меню «Вид» (рис. 36). В окне графика во времени одновременно могут быть показаны кривые для нескольких точек температурного поля. Чтобы добавить точку, нужно щелкнуть мышью по первой строчке в списке, а затем ввести координаты точки в соответствующие поля сверху и нажать кнопку «Добавить». Выделив точку в списке, можно изменить ее координаты, а также включить и выключить те физические величины, которые нужно показать на графике.



Рисунок 36. Диалоговое окно задания координат точек температурного поля при построении графиков изменения температуры и иных физических величин во времени. На рисунке заданы координаты точки начала координат и точки внешнего ребра модели, лежащей на оси абсцисс. Задание координат новой точки сопровождается построением соответствующей термограммы (рис. 37). Изменение температуры и иных физических величин в точке поля во времени может быть представлено в форме таблицы, каждая строка которой соответствует определенному моменту модельного времени (рис. 38). Окно таблицы с данными для точки начала координат открывается выбором команды «Таблица во времени» из контекстного меню графика.

Создать таблицу можно и без предварительного построения термограммы. Для этого нужно выбрать команду «Таблица во времени» в меню «Вид» или в контекстном меню температурного поля. В первом случае таблица открывается для точки начала координат, во втором – для точки, указанной мышью. При необходимости декартовы координаты любой точки поля могут быть указаны в соответствующих полях в верхней строке таблицы (см. рис. 38).

Обязательным этапом построения любой конечно-элементной модели охлаждения трупа является проверка ее валидности. Последняя обычно осуществляется двумя методами. Первый из них заключается в оценке сходимости кривых охлаждения, полученных с помощью конечно-элементной модели и классической двойной экспоненциальной модели с общепризнанной валидностью [21]. Второй метод заключается в сравнении модельной кривой охлаждения с реальной, полученной путем термометрии одного или нескольких мертвых тел. Из них в технически проще осуществим первый метод.

Валидной феноменологической моделью посмертной динамики краниоэнцефальной температуры в условиях постоянной температуры внешней среды является уравнение С. Henssge:

$$\frac{T-T_a}{37,2-T_a} = 1,135e^{-0,127t} - 0,135e^{-1,07t},$$

где *T* – краниоэнцефальная температура, °С; *T_a* – температура внешней среды, °С; *t* – ДНС, ч [22]. Охлаждение поверхностных тканей тела протекает в соответствии с законом Ньютона-Рихмана

$$T = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt},$$

где T_0 – начальная температура тела, °С; k – коэффициент пропорциональности, связанный с коэффициентом теплоотдачи формулой $k = \alpha S / C$, где C – теплоемкость тела, Дж/К.

Сравнение термограмм валидных моделей для заданных условий охлаждения (внешняя температура постоянна и равна 10 °C, начальная краниоэнцефальная температура равна 37,2 °C, а начальная поверхностная – 31 °C) с термограммами конечно-элементной модели показало их хорошую сходимость (рис. 39, 40). На этом процесс моделирования завершен.



Рисунок 37. Кривые охлаждения в точке начала координат и точке на внешнем ребре геометрической модели.

🛃 Таблица во і	времени Резу	льтат расчета	Нестационар	ное температ	урное поле го	оловы.pbm:4		- • ×
🔁 + X= 0		Y=	d		ж 🗇 🔤 🛙		_	_
Время (с)	T (°C)	G (К/м)	Gr (К/м)	Gj (К/м)	F (Вт/м2)	Fr (Вт/м2)	Fj (Вт/м2)	I (Вт/К-м) 🔦
0	37.2	0	0	0	0	0	0	0.503
600	37.1963	0.125242	0.0725957	0.102057	0.062997	0.0365156	0.0513345	0.503
1200	37.1794	0.561879	0.325582	0.457934	0.282625	0.163768	0.230341	0.503
1800	37.1366	1.40039	0.811253	1.14147	0.704395	0.40806	0.57416	0.503
2400	37.0562	2.59045	1.50034	2.11173	1.30299	0.754669	1.0622	0.503
3000	36.9307	3.99883	2.31559	3.26017	2.01141	1.16474	1.63987	0.503
3600	36.7575	5.4812	3.17339	4.46913	2.75704	1.59622	2.24797	0.503
4200	36.5373	6.9229	4.00739	5.64512	3.48222	2.01572	2.8395	0.503
4800	36.2739	8.24961	4.77461	6.72749	4.14956	2.40163	3.38393	0.503
5400	35.9719	9.42204	5.4524	7.68416	4.73929	2.74256	3.86513	0.503
6000	35.6368	10.4259	6.03256	8.50345	5.24425	3.03438	4.27723	0.503
6600	35.274	11.2629	6.51605	9.18659	5.66523	3.27758	4.62086	0.503
7200	34.8888	11.9433	6.909	9.74211	6.00749	3.47523	4.90028	0.503
7800	34.4856	12.4821	7.22	10.1821	6.2785	3.63166	5.12158	0.503
8400	34.0687	12.8956	7.45853	10.5198	6.48647	3.75164	5.29145	0.503
9000	33.6415	13.2	7.63401	10.7685	6.63958	3.83991	5.41656	0.503
9600	33.2072	13.4105	7.75528	10.9407	6.74551	3.90091	5.50316	0.503
10200	32.7685	13.5412	7.83038	11.0476	6.81124	3.93868	5.55696	0.503 🗸

Рисунок 38. Таблица физических параметров процесса охлаждения в точке начала координат.



Рисунок 39. Кривые охлаждения мозга в точке начала координат в соответствии с моделью Henssge и построенной моделью теплообмена.



Рисунок 40. Кривые охлаждения поверхности головы в соответствии с законом Ньютона-Рихмана при k = 0,135189 и построенной моделью теплообмена.

ГЛАВА 4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ В СЛОЖНЫХ УСЛОВИЯХ ТЕПЛООБМЕНА

§ 4.1. Моделирование посмертного теплообмена в условиях изменяющейся внешней температуры

Температура внешней среды является приближенно постоянной лишь при наступлении смерти в закрытом помещении. В остальных случаях процесс охлаждения мертвого тела неминуемо протекает в условиях изменяющейся внешней температуры. Конечно-элементная модель посмертного теплообмена позволяет учесть данное обстоятельство при задании граничного условия третьего рода.

В подобных случаях ELCUT позволяет в поле внешней температуры, обозначаемое символом T₀, вместо числовых значений вводить формулы, описывающие зависимость внешней температуры от ДНС. Предварительно необходимо описать посмертную динамику внешней температуры какой-либо функцией, а затем ввести ее в соответствующее поле в окне свойств метки внешнего ребра.

Формулы следует вводить в соответствии с принятым в ELCUT синтаксисом. Синтаксис формул очень прост и состоит из чисел, арифметических операций, разделителей, встроенных функций и констант, а также переменных. Дробную часть чисел в формулах следует отделять точкой. Знаки арифметических операций аналогичны таковым в Excel и других приложениях:

- сложение (+);

- вычитание (-);
- умножение (*);
- деление (/);
- возведение в степень (^).

Поскольку синтаксис ELCUT определяет декартовы и полярные координаты точек расчетной области как константы, значения которых равны нулю, то фактически возможно вводить лишь функции, содержащие в качестве переменной только показатель ДНС, обозначаемый буквой *t*. При этом точкой начала отсчета ДНС является момент наступления смерти человека (t = 0), а сам посмертный период измеряется в секундах. Например, положим, что в рассматриваемой задаче охлаждение тела протекает в условиях линейно изменяющейся со скоростью 0,5 °C/ч внешней температуры, причем значение последней в момент наступления смерти равно 10 °C. Тогда для учета этого условия в поле граничного условия третьего рода следует ввести формулу $T_a = 10 + 0.5 * t/3600$ (рис. 41).

Свойства метки ребра - SAB	×
Общие	
$\Box \text{ Температура: T = T_o}$ $T_o = 0 \qquad (*C)$	
П Тепловой <u>п</u> оток: F _n = -q (ΔF _n = -q) q = 0 (Вт/м ²)	
	f
$\Box \underline{P}_{adhauha:} F_{n} = \beta \cdot k_{sb} \cdot (T^{4} - T_{o}^{4})$ $\beta = \boxed{0}$ $T_{o} = \boxed{0}$ (°C)	
Равная температура: T = const	
□ <u>Ч</u> етная периодичность: T ₁ = T ₂ □ Н <u>е</u> четная периодичность: T ₁ = - T ₂	
ОК Отмена С	правка

Рисунок 41. Задание посмертной динамики внешней температуры в свойствах метки внешнего ребра геометрической модели в виде формулы.

После завершения физической идеализации задачи нужно заново запустить процесс ее решения. Новые результаты решения будут учитывать линейную динамику внешней температуры и ее скорость.

В поле внешней температуры в окне свойств метки внешнего ребра могут быть введены не только линейные уравнения, но и функциональные зависимости иной формы, в частности, полиномы. В данном примере линейная форма изменений внешней среды выбрана для последующего сопоставления кривой охлаждения конечно-элементной модели с таковой валидных математических моделей.

В условиях линейно изменяющейся внешней температуры феноменологическое уравнение Marshall-Hoare охлаждения глубоких тканей трупа принимает вид

$$\begin{split} T &= T_{a0} + \beta \bigg(t - \frac{1}{k} \bigg) + \bigg(T_0 - T_{a0} + \frac{\beta}{k} \bigg) e^{-kt} + \frac{k}{k - p} \times \\ & \times \bigg(\bigg(T_0 - T_{a0} - \frac{\beta (kt - pt - 1)}{k - p} \bigg) e^{-pt} - \bigg(T_0 - T_{a0} + \frac{\beta}{k - p} \bigg) e^{-kt} \bigg), \end{split}$$

где T_{a0} – температура внешней среды в момент наступления смерти, °C; β – почасовая скорость изменения внешней температуры, °C/ч; k – постоянная охлаждения, p – постоянная температурного плато, T_0 – температура ядра тела в момент наступления смерти человека [23]. Для краниоэнцефальной температуры согласно методу C. Henssge значения констант охлаждения и температурного плато составляют k = 0.127 и p = 1.07

$$k = 0,127$$
 и $p = 1,07$.

Закон охлаждения Ньютона-Рихмана в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды описывается формулой

$$T(t) = T_{a0} + \beta t - \frac{\beta}{k} + \left(T_0 - T_{a0} + \frac{\beta}{k}\right) e^{-kt},$$
(12)

где обозначения те же [23].

В рамках построенной конечно-элементной модели охлаждение тканей головы протекает в следующих условиях: внешняя температура растет со скоростью 0,5 °C/ч, начальная внешняя температура равна 10 °C, начальная краниоэнцефальная - 37,2 °C, а начальная поверхностная – 31 °C. Сравнение кривых охлаждения глубоких и поверхностных тканей тела, полученных на основе приведенных валидных моделей, в условиях линейно изменяющейся внешней температуры с термограммами конечно-элементной модели показало их хорошую сходимость (рис. 40, 41). На графиках линейный тренд внешней температуры условно продолжен на всю длину расчетного посмертного интервала. Следует отметить, что после выравнивания температур тканей головы и внешней среды нагрев поверхностных тканей из-за смены градиента температур и направления теплового потока отстает от температуры воздуха.



Рисунок 42. Кривые охлаждения мозга в точке начала координат в соответствии с моделью Henssge и построенной моделью теплообмена.



Рисунок 43. Кривые охлаждения поверхности головы в соответствии с законом Ньютона-Рихмана при k = 0,1208356 и построенной моделью теплообмена.
§ 4.2. Моделирование посмертного охлаждения при гипери гипотермическом вариантах танатогенеза

Следующий проблемный аспект моделирования посмертного охлаждения, чреватый ошибками определения ДНС, связан с отклонениями реальной начальной температуры различных тканей тела от их средних значений, заданных в конечно-элементной модели. В зависимости от величины и знака указанных отклонений различают гипер-, нормо- и гипотермический варианты танатогенеза.

Гипертермический вариант танатогенеза был известен еще Н. Rainy и J.W. Burman, обнаружившим его проявления как в поверхностных, так и в глубоких тканях трупа [24, 25]. Впоследствии на большой выборке наблюдений было показано, что данный вариант умирания наблюдается в 10% случаев насильственной смерти, в частности, при острых отравлениях функциональными ядами, асфиксии и механической травме [26]. В случаях ненасильственной смерти данный вариант танатогенеза обычно бывает вызван наличием каких-либо инфекционных заболеваний.

Гипотермический вариант танатогенеза встречается менее часто и характерен для смерти от гипотермии [27]. Диагностика нестандартных вариантов умирания обычно возможна по результатам исследования трупа и является противопоказанием к использованию некоторых математических моделей определения ДНС, в частности, метода Henssge [27].

Начальная краниоэнцефальная температура также является случайной величиной, определяемой результирующим влиянием метаболического и гемоциркуляторного факторов, а также температуры артериальной крови [4-7]. В этой связи, например, понижение начальной краниоэнцефальной температуры, помимо переохлаждения, наблюдается также при умирании в результате массивной кровопотери. При черепно-мозговой травме, геморрагических инсультах и инфарктах мозга, наоборот, как правило, отмечаются как локальное, так и системное повышение краниоэнцефальной температуры [28-32]. По этой причине использование в рамках построенной конечно-элементной модели какого-либо одного постоянного значения начальной краниоэнцефальной температуры является дополнительным источником погрешностей определения ДНС.

Количественное влияние различных отклонений начальной температуры от заданного значения на кривую охлаждения, протекающего согласно закону Marshall-Hoare, оценивается в рамках модели косвенного измерения. Согласно данной модели в уравнении

$$\frac{T-T_a}{T_0-T_a} = \frac{p}{p-k}e^{-kt} - \frac{k}{p-k}e^{-pt}$$

искомый показатель ДНС представляет собой неявно заданную функцию пяти независимых переменных: текущей и начальной краниоэнцефальной температуры, температуры внешней среды, постоянных охлаждения и температурного плато. Поэтому предельная абсолютная погрешность определения ДНС равна сумме произведений частных производных преобразованной функции Marshall-Hoare по каждой независимой переменной на их предельные абсолютные погрешности:

$$\Delta_t = \sum_{i=1}^5 \left| \frac{\partial t}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i} ,$$

где Δ_t - абсолютная погрешность определения ДНС, ч; Δ_{x_i} - предельная абсолютная погрешность *i*-й величины, выраженная в соответствующих единицах измерения, а $\partial t / \partial x_i$ - частные производные по переменной x_i неявной функции

$$\frac{p}{p-k}e^{-kt} - \frac{k}{p-k}e^{-pt} - Q = 0,$$

где Q – безразмерная температура, определяемая как

$$Q = \frac{T - T_a}{T_0 - T_a}.$$

Отсюда следует уравнение индивидуального вклада ошибок оценки каждого из пяти исходных показателей в итоговую погрешность определения ДНС:

$$\Delta_t^i = \left| \frac{\partial t}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right|,$$

где Δ_t^i - предельная абсолютная ошибка определения ДНС, обусловленная влиянием погрешности измерения исходного показателя x_i .

Подставляя в данное уравнение соответствующие частные производные, найденные С. Henssge эмпирические значения констант охлаждения и температурного плато, а также рекомендованное им значение начальной краниоэнцефальной температуры, окончательно находим парциальное влияние ошибок отклонений начальной краниоэнцефальной температуры от заданного значения на погрешность определения ДНС:

$$\Delta_t^{T_0} = \left| -\Delta_{T_0} \frac{6,939Q}{(37,2-T_a)(e^{-1,07t} - e^{-0,127t})} \right|.$$

Из полученной формулы следует, что ошибка определения ДНС, обусловленная отклонениями начальной краниоэнцефальной температуры от 37,2 °С, прямо пропорциональна безразмерной температуре и температуре внешней среды (рис. 44). Также она связана сложной зависимостью с ДНС. Однако, поскольку последняя находится в практически функциональной зависимости от безразмерной температуры, то ее собственное влияние на погрешность определения ДНС можно не учитывать.

Метода аналитического оценивания влияния отклонений реальной начальной температуры различных геометрических блоков от ее средних значений, заданных в конечно-элементной модели, не существует. Однако данную оценку можно выполнить экспериментально. Для этого решенная на предыдущем этапе задача нестационарного теплопереноса была решена еще дважды: при гипер- и гипотермическом вариантах танатогенеза. Для моделирования указанных вариантов было изменено начальное распределение температур в различных тканях головы, заданное в связанной с рассматриваемой задаче стационарного теплопереноса. В частности, для моделирования гипертермического типа танатогенеза на метках вершины и ребер были заданы температуры, превышавшие на 1 °C таковые для нормотермического типа. Для моделирования гипотермического типа танатогенеза на указанных метках, наоборот, были заданы температуры на 1 °C меньше, чем для нормотермического типа (табл. 2).

Сравнение кривых охлаждения головного мозга в точке начала координат, полученных для различных вариантов танатогенеза, показало, что отклонения начальной краниоэнцефальной температуры от 37,2 °С оказывают заметное влияние на оценку ДНС только в первые 4 ч после смерти. Спустя 4 ч влияние указанных отклонений на величину погрешности определения ДНС резко уменьшается, а после 12 ч практически исчезает (рис. 45). Таким образом, характер зависимости погрешностей определения ДНС от ошибок оценки начального распределения температур для конечно-элементной и феноменологической моделей одинаков.

Вариант	Вершина	Ребра				
танатогенеза	(r = 0)	DSBB	BCSF	CSFSB	SSB	SAB
Гипертермический	38,2	38,2	36,5	36	35	32
Нормотермический	37,2	37,2	35,5	35	34	31
Гипотермический	36,2	36,2	34,5	34	33	30

Таблица 2. Начальное распределение температур на метках геометрической модели связанной задачи стационарного теплопереноса, °С



Рисунок 44. Парциальная зависимость предельной относительной ошибки определения ДНС от безразмерной температуры и погрешностей оценки начальной краниоэнцефальной температуры при $T_a = 10$ °C.



Рисунок 45. Кривые охлаждения мозга в точке начала координат при различных значениях начальной краниоэнцефальной температуры.

§ 4.3. Моделирование посмертной гипертермии

Гипертермический танатогенез следует отличать от повышения температуры тела в первые часы после смерти. Единичные наблюдения посмертной гипертермии присутствуют в первых базах данных ректальной и аксиллярной температуры, собранных Н. Rainy и J.W. Burman [24, 25]. Однако пристальное внимание на этот феномен впервые обратил G.M. Hutchins в исследовании динамики ректальной температуры у 20 взрослых пациентов перед и после наступления смерти [33]. При этом у 11 пациентов в первые 3 ч после смерти наблюдалось повышение ректальной температуры в среднем на 0,5 и максимально до 1,3 °C (рис. 46). В 2017 г. группа чешских авторов описала наблюдение аномального повышения аксиллярной температуры в течение 1,5 ч после констатации смерти с 37,6 до 40,1 °C [34].

Единственной гипотезой, объясняющей феномен посмертной гипертермии, в настоящее время считается наличие в теле внутренних источников выделения тепловой энергии метаболического или бактериального генеза на фоне низкой теплоотдачи [33, 34]. Между тем, феномен посмертной гипертермии может быть объяснен с позиций теории теплообмена без использования гипотезы о внутренних источниках теплоты. Так, посмертное повышение температуры поверхности тела при отсутствии внутренних источников выделения тепловой энергии возможно при следующих условиях:

1) наличие и достаточная выраженность градиента температуры между поверхностью и подлежащими тканями тела, т.е. температура глубоких тканей должна быть существенно выше температуры поверхностных;

2) небольшая величина перепада температуры между поверхностью тела и внешней средой;

3) небольшой коэффициент конвективной теплоотдачи.

Нетрудно заметить, что указанные условия выполняются при нахождении мертвого тела в закрытом отапливаемом помещении с отсутствием естественной или принудительной вентиляции. Дополнительно способствуют реализации феномена посмертной гипертермии наличие одежды на трупе или выбор в качестве диагностической точки не открытых участков тела, а подмышечной впадины или каких-либо полостей, сообщающихся с внешней средой (носовые ходы, наружные слуховые проходы).

Феномен посмертной гипертермии по отношению к поверхностным тканям головы можно получить и в рамках построенной конечно-элементной модели посмертного теплообмена (рис. 48).



Рисунок 46. Значения предсмертной и посмертной ректальной температуры у 20 пациентов по данным G.M. Hutchins [33].



Рисунок 47. Результаты измерения предсмертной и посмертной аксиллярной температуры у пациента по данным Т. Vojtíšek и соавт. [34]. Крупными точками обозначены результаты измерений, пунктиром – предполагаемая прижизненная, а штрихами – посмертная температура.



Рисунок 48. Кривые охлаждения поверхности кожи головы с начальной температурой, равной 31 °C, при коэффициенте конвективной теплоотдачи $\alpha = 4$ Вт/(м²·K) в зависимости от внешней температуры.

Для этого достаточно в задаче нестационарного теплопереноса на внешнем ребре модели задать меньшее значение коэффициента конвективной теплоотдачи для воздуха. При этом выраженность и продолжительность посмертной гипертермии для открытых участков кожи головы будет зависеть еще и от температуры внешней среды. При нулевых или отрицательных температурах внешней среды феномен посмертной гипертермии будет отсутствовать независимо от выраженности конвективной теплоотдачи (см. рис. 48).

Построенная конечно-элементная модель также объясняет возможное развитие феномена посмертной гипертермии и в более глубоких тканях тела. Для этого необходимо выполнение условий:

1) максимальное начальное значение температурного поля тела наблюдается в центре его симметрии (в точке начала координат);

2) выраженный градиент температуры между центром симметрии тела и его поверхностью, а также периферическими тканями;

3) небольшая величина перепада температуры между поверхностью тела и внешней средой;

4) небольшой коэффициент конвективной теплоотдачи.

Данный комплекс условий похож на предыдущий, однако дополнительно содержит условие значительности градиента температуры между центром симметрии тела и его поверхностью. В этой связи в качестве начального температурного поля на метках ребер модели в связанной задаче стационарного теплопереноса зададим иные значения температуры, присущие тканям головы при понижении температуры артериальной крови (см. рис. 14). В частности, при сохранении прежней однородной температуры глубоких отделов головного мозга на ребре BCSF зададим температуру величиной 31 °C, а на ребрах CSFSB, SSB и SAB – температуру 30, 25 и 23 °C.

После нахождения нового начального температурного поля в задаче нестационарного теплопереноса на внешнем ребре модели зададим внешнюю температуру 20 °C, а значение конвективной теплоотдачи примем равным 4 Вт/(м²·K). После этого решим задачу заново.

Задание подобных краевых условий вызывает развитие ярко выраженного феномена посмертной гипертермии поверхности тела, распространяющегося и на подлежащие ткани (рис. 49). По мере уменьшения радиальной координаты выраженность феномена в заданных условиях посмертного охлаждения снижается. При этом на уровне эпи- и субдурального пространства в первые 20 минут посмертного периода сначала наблюдается снижение температуры, затем сменяющееся ее умеренным ростом с незначительным превышением своей начальной величины. Процесс охлаждения поверхности мозга происходит аналогично, однако слабая выраженность посмертной гипертермии не позволяет мозгу нагреться до начальной температуры после ее первоначального снижения (см. рис. 49).

Посмертная гипертермия субповерхностных тканей объясняется тем, что при заданных краевых условиях в начале посмертного периода тепловой поток максимален в поверхностных слоях мозга при небольшой его величине в остальных тканях (рис. 50). Превышение количества поступающей в поверхностные ткани тепловой энергии над тепловыми потерями приводит к нагреванию первых (см. рис. 50). Если добиться понижения начальной температуры поверхности тела ниже температуры внешней среды, то феномен посмертной гипертермии распространяется и на поверхностные слои мозга.

Для ректального температурного профиля посмертная гипертермия также возможна, поскольку торс человека приближенно представляет собой конечный многослойный цилиндр, и данная диагностическая точка является периферическим слоем по отношению к центру симметрии этого цилиндра, характеризующегося максимальной температурой.



Рисунок 49. Кривые охлаждения для точек, расположенных на ребрах модели с различными радиальными координатами.



Рисунок 50. Термограммы и тепловой поток вдоль радиуса модели в различные моменты времени после наступления смерти.

§ 4.4. Моделирование различных граничных условий теплообмена

В отличие от феноменологических математических моделей конечно-элементные модели принципиально позволяют учитывать практически любые условия охлаждения. Одним из наиболее сложных аспектов моделирования охлаждения трупа является комбинация нескольких граничных условий, наблюдающаяся, например, при его одновременном нахождении в двух средах.

В качестве примера моделирования данного аспекта рассмотрим решенную ранее задачу нестационарного теплопереноса в более сложных условиях. Допустим, голова трупа находится наполовину в воздухе, а наполовину в водоеме с той же температурой воды, равной 10 °C. Разделение двух сред проходит по срединной линии тела.

Для решения подобной задачи необходимо в качестве геометрической модели использовать полусферу с теми же блоками и ребрами. Для этого нужно выделить все блоки геометрической модели и выбрать в контекстном меню или меню «Правка» команду «Дублировать выделенное». В открывшемся диалоговом окне следует отметить метод размножения «Симметрия» и указать угол в 90°, оставив задаваемые по умолчанию координаты точки на оси (рис. 51).

Размножение объектов	×		
Метод О Перенос О Поворот О Симметрия	ОК Отмена Справка		
Точка на оси:			
δ _c = 0	(MM)		
φ _c = 0	(град)		
Угол: 90	(град)		

Рисунок 51. Окно размножения объектов с выбранными параметрами.

В результате дублирования первоначальная геометрическая модель из квадранта преобразуется в полукруг. В последнем следует удалить все ребра, расположенные по линии разделения полукруга на квадранты, оставив вершину в точке начала координат и добавив вершину в точке с координатами r = 98 мм, $\varphi = 90^{\circ}$. Вторая вершина необходима для разделения внешнего ребра геометрической модели на два отдельных отрезка. Из них ребро, расположенное в первом квадранте системы координат, предназначается для задания конвективного теплообмена с воздухом, а во втором квадранте – с водой (рис. 52). Длина каждого из двух указанных ребер является двумерным эквивалентом площадей поверхностей контакта моделируемого объекта с водой и воздухом. Поскольку, согласно условию задачи, разделение сред проходит по средней линии тела, то длины обоих внешних ребер равны.

После построения новой геометрической модели нужно заново построить сетку конечных элементов с большим шагом дискретизации. В рассматриваемой модели минимальный шаг дискретизации, приводящий к построению сетки с числом конечных элементов не более 255, равен 10. В итоге построенная с указанным шагом дискретизации сетка содержит 254 конечных элемента (см. рис. 52).

Затем следует создать метку внешнего ребра модели, расположенного во втором квадранте системы координат, присвоив ей имя SAB 2, и задать в ее свойствах граничное условие первого рода с постоянной температурой 31 °C. Поскольку свойства остальных меток были продублированы в процессе размножения объекта, на этом геометрическая и физическая идеализация задачи стационарного теплопереноса завершена и можно приступать к ее решению. Итоговая геометрическая модель содержит 5 блоков с метками, 16 ребер (из них 6 с метками) и 12 вершин (из них 1 с меткой).

После нахождения начального температурного поля необходимо в связанной задаче нестационарного теплопереноса задать граничное условие конвективного теплообмена на внешнем ребре SAB 2. Для этого в свойствах метки этого ребра нужно указать такую же внешнюю температуру и задать значение конвективной теплоотдачи для воды при отсутствии ее движения, равное 150 Вт/(К·м²).

После запуска решения задачи нестационарного теплопереноса находим температурное поле расчетной области в любой заданный момент посмертного интервала длиной до 24 ч. Анализ картины поля показывает постепенное смещение под влиянием различных условий охлаждения температурного максимума из точки начала координат вправо на 50 мм (рис. 53).



Рисунок 52. Геометрическая модель посмертного теплообмена в комбинированных условиях охлаждения (контакт половины площади поверхности модели с водой, половины – с воздухом).



Рисунок 53. Картина температурного поля головы через 24 ч после наступления смерти в комбинированных условиях охлаждения.

Погружение в воду сопровождается резким охлаждением поверхностных тканей соответствующей области. Так, в точке внешнего ребра с угловой координатой 180° температура поверхности падает ниже 12 °C уже через 1 ч (рис. 54). На внешнем ребре модели, отражающим контакт с воздухом, процесс охлаждения протекает гораздо медленнее, но все же быстрее, чем он протекал при полном отсутствии контакта головы с водой. Причем отставание начинается лишь спустя 3 ч после смерти, до этого момента кривые охлаждения данной точки при указанных условиях совпадают (см. рис. 54). При отсутствии учета частичного погружения головы трупа в воду определение ДНС по температуре кожи даже вне зоны ее контакта с водной средой приведет к ошибке величиной до 4 ч.

Контакт с водной средой оказывает выраженное влияние и на кривую охлаждения в точке начала координат (рис. 55). Без учета данного фактора ошибка определения ДНС может достигать 8 ч. Максимальное расхождение кривых охлаждения с наличием и при отсутствии контакта с водой наблюдается в фазу экспоненциального охлаждения, однако влияние данной систематической ошибки на погрешность определения ДНС возрастает в фазу выравнивания температур. Сравнение термограмм для точек начала координат и внешних ребер показывает, что при отсутствии возможности учета сложных условий охлаждения, подобных рассматриваемым, лучше определять ДНС не по глубоким тканям трупа, а по температуре его поверхностных тканей, расположенных в зоне контакта с воздухом на максимальном удалении от линии раздела водной и воздушной сред.

В данном примере вода рассматривается как неограниченная среда. Основной проблемой моделирования в этом случае является правильный выбор коэффициента конвективного теплообмена, значение которого для воды может варьировать в очень широких пределах. Данное обстоятельство актуализирует проблему эмпирического определения значений конвективной теплоотдачи для воздуха и воды при различных скоростях их движения.

Альтернативный подход к решению рассматриваемой задачи заключается в добавлении к полусферической геометрической модели дополнительного блока, моделирующего водную среду. Данный метод позволяет учесть объем жидкости и найти ее температурное поле, а также избежать необходимости эмпирического подбора значений коэффициента конвективного теплообмена. Вместо этого в рамках альтернативной конечно-элементной модели потребуется задание общеизвестных значений таких теплофизических параметров воды, как теплопроводность, плотность и удельная теплоемкость.



Рисунок 54. Термограммы поверхности головы в точках под водой, над водой и при отсутствии контакта с водой. Температура обеих сред 10 °C.



Рисунок 55. Термограммы расчетной области в точке начала координат при различных условиях охлаждения (без и с наличием контакта с водой).

Для этого к построенной полусферической модели следует добавить два дополнительных блока, имитирующих слой воды (рис. 56). Из них внутренний блок, прилегающий к поверхности охлаждаемого тела, должен иметь небольшую толщину, например, 2 мм и предназначен для моделирования разных температур воды (10 °C) и поверхности тела (31 °C) в начальный момент времени при погружении тела в воду. Технически указанные температуры нельзя задать на одном ребре модели. Их можно задать только на двух близко расположенных ребрах, входящих в состав дополнительного тонкого блока. В результате этот блок служит моделью тонкого слоя воды, прилегающего к поверхности охлаждаемого тела.

Толщина и форма второго внешнего блока могут соответствовать реальной толщине и геометрии слоя воды при небольшом ее объеме. Если объем воды намного превосходит объем части тела, температурное поле которой требуется найти, то можно ограничиться дуговидным блоком толщиной 50 мм. Для построения обоих блоков нужно сначала добавить к модели 4 вершины с полярными координатами (100 мм; 90°), (150 мм; 90°), (100 мм; 180°) и (150 мм;180°), а затем соединить их прямыми и дуговидными ребрами (см. рис. 56).



Рисунок 56. Геометрическая модель с наличием двух дополнительных блоков с меткой «Water».

Затем следует создать метку блока, присвоив ей новое имя, например, Water, и задать в ее свойствах теплофизические параметры воды при температуре 10 °C: $\lambda = 0,574$ Вт/(К·м); c = 4191 Дж/(кг·К); $\rho = 999,7$ кг/м³. После этого необходимо связать данную метку с каждым из двух блоков. В результате оба блока будут заданы как единый слой воды.

Кроме блоков потребуется также создать 2 метки ребер: Water 1 и Water 2. В свойствах каждой метки нужно указать граничное условие первого рода в виде постоянной температуры 10 °C. Затем следует связать метку Water 1 с тремя внешними ребрами внешнего блока, а метку Water 2 – с тремя внешними ребрами внутреннего блока и построить сетку конечных элементов с увеличенным шагом дискретизации. В рассматриваемой геометрической модели шаг дискретизации, равный 15, обеспечивает построение сетки из 210 конечных элементов (см. рис. 56).

Таким образом, построенная геометрическая модель содержит 7 блоков (из них 6 с меткой), 22 ребра (из них 12 с меткой), 16 вершин (из них 1 с меткой). После завершения идеализации задачи стационарного теплопереноса нужно запустить процесс ее решения и найти начальное температурное поле расчетной области, помимо головы трупа дополнительной включающей и слой воды (рис. 57).



Рисунок 57. Начальное температурное поле расчетной области.

После нахождения начального температурного поля следует в геометрии связанной задачи нестационарного теплопереноса инактивировать все граничные условия на метках ребер SAB 2 и Water 2. Затем нужно запустить процесс решения задачи.

Анализ результатов показывает, что в конце расчетного периода картина температурного поля аналогична таковой, полученной методом задания конвективного теплообмена (рис. 58). Однако термограммы в точке начала координат для обоих методов моделирования не идентичны (рис. 59). Это объясняется случайным характером выбора значения коэффициента конвективной теплоотдачи для воды.

Расхождение термограмм меньше выражено для точек поверхности охлаждаемой части тела, расположенных как на максимальной глубине погружения, так и на противоположном внешнем ребре на максимальном удалении от линии раздела сред (рис. 60). Это еще раз подтверждает сделанный выше вывод о том, что в условиях сложного теплообмена точность определения ДНС путем учета конвективной теплоотдачи на поверхности тела, контактирующей с внешней средой, может быть выше таковой, базирующейся на температурном профиле глубоких тканей трупа. В любом случае в рассматриваемом примере более точной является конечно-элементная модель с дополнительными блоками, имитирующими водную среду.



Рисунок 58. Температурное поле расчетной области через 24 ч от начала охлаждения.



Рисунок 59. Термограммы в точке начала координат, полученные моделированием конвективного теплообмена с водой и погружения в воду.



Рисунок 60. Термограммы точек поверхности головы, полученные моделированием конвективного теплообмена с водой и погружения в воду.

ГЛАВА 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕСИММЕТРИЧНОГО НАЧАЛЬНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

§ 5.1. Нахождение температурного поля головы при оболочечных внутричерепных кровоизлияниях

В норме начальное (прижизненное) температурное поле головного мозга является стационарным, симметричным и однородным за исключением его поверхностного слоя, в котором наблюдается монотонное снижение интрацеребральной температуры. Однако при наличии очаговой патологии, морфологическим субстратом которой наиболее часто выступают травматические и нетравматические эпидуральные, субдуральные, субарахноидальные, паренхиматозные и внутрижелудочковые кровоизлияния, температурное поле головного мозга уже при жизни перестает быть симметричным за счет локального повышения температуры в области указанных повреждений [31, 32]. По этой причине наличие перечисленных патологических изменений считается противопоказанием для определения ДНС по краниоэнцефальной температуре. Между тем МКЭ позволяет находить посмертное температурное поле головы и в условиях несимметричного начального температурного поля.

В качестве примера разберем задачу нахождения посмертного температурного поля головы при наличии полушарного субарахноидального кровоизлияния. Для этого в полусферической геометрической модели блок CSF, имитирующий субарахноидальное пространство, следует путем добавления двух вершин и соединяющего их ребра разбить на два отдельных блока: правый – CSF и левый – Blood (рис. 61). Из них блок CSF по-прежнему остается моделью интактного субарахноидального пространства, а блок Blood служит моделью полушарного субарахноидального кровоизлияния.

В метке блока Blood следует указать теплофизические свойства крови: $\lambda = 0,44$ Вт/(К·м); c = 3800 (Дж/кг·К); $\rho = 1050$ кг/м³. Физические свойства остальных блоков остаются прежними.

Добавление блока Blood приводит к появлению в геометрической модели трех дополнительных ребер, из которых, как минимум, на двух дуговидных ребрах необходимо будет задать особое граничное условие первого рода. Задание этого условия на двух коротких боковых ребрах блока необязательно, поскольку практически не повлияет на точность последующих вычислений. Для этого нужно создать две метки и связать их с дуговидными ребрами блока.



Рисунок 61. Геометрическая модель головы с наличием полушарного субарахноидального кровоизлияния (выделено черным).

По условию задачи необходимо задать на этих двух метках граничное условие первого рода с постоянной температурой, равной максимальной температуре артериальной крови (37 °C). Однако при таком подходе в модели стационарного поля поднимется до 37 °C температура всей гомолатеральной половины поверхностного слоя мозга. Температура данной зоны мозга действительно должна увеличиться при наличии интенсивного субарахноидального кровоизлияния, но на меньшую величину. Поэтому на метке поверхностного ребра блока Blood следует задать постоянную температуру 37 °C, а на метке внутреннего ребра – постоянную температуру 36,5 °C. На остальных метках геометрической модели граничные условия остаются теми же.

Затем необходимо перейти к построению сетки конечных элементов. В данной задаче оптимальное количество узлов сетки, равное 226, достигается при задании шага дискретизации, равного 11. На этом геометрическая и физическая идеализация первоначальной задачи несимметричного стационарного температурного поля головы завершена и можно запускать процесс ее решения. Итоговая геометрическая модель состоит из 6 блоков (все с меткой), 18 ребер (из них 7 с меткой) и 13 вершин (из них 1 с меткой). Решение задачи приводит к нахождению начального температурного поля головы, наблюдающегося в момент наступления смерти (рис. 62).



Рисунок 62. Начальное температурное поле головы при наличии левостороннего полушарного субарахноидального кровоизлияния.

Анализ картины поля показывает, что наличие интенсивного полушарного субарахноидального кровоизлияния толщиной 2 мм никак не влияет на температуру поверхностных тканей и глубоких отделов мозга (см. рис. 62). Вместе с тем становится несимметричной локализация изотерм в поверхностном слое мозга и в костной ткани черепа. Чтобы выяснить, степень влияния данного обстоятельства на посмертное температурное поле, нужно связать данную задачу с задачей нестационарного теплообмена и решить ее.

Для этого следует, взяв за основу исходный файл геометрии и скопировав теплофизические свойства ее блоков, на всех метках ребер геометрической модели, кроме внешнего, инактивировать все граничные условия. На внешнем же ребре нужно задать граничное условие второго рода с теми же параметрами конвективного теплообмена с воздушной средой ($\alpha = 6 \text{ Bt/K} \cdot \text{m}^2$), $T_\circ = 10 \text{ °C}$. После этого необходимо запустить процесс решения задачи.

При анализе картины температурного поля устанавливается симметричная локализация изотерм в области обоих полушарий большого мозга уже через 5 ч после наступления смерти (рис. 63). Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре обеих геометрических моделей головы (с наличием полушарного субарахноидального кровоизлияния и при отсутствии внутричерепных кровоизлияний) также полностью совпадают (рис. 64).



Рисунок 63. Посмертное температурное поле головы при наличии левостороннего полушарного субарахноидального кровоизлияния.



Рисунок 64. Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре модели при наличии и отсутствии левостороннего полушарного субарахноидального кровоизлияния. Кривые охлаждения плохо различимы из-за полного совпадения термограмм.

Для объяснения данного явления в обеих геометрических моделях были проведены контуры интегрирования, направленные от центра начала координат к внешнему ребру модели. В модели с наличием субарахноидального кровоизлияния контур интегрирования проводился непосредственно через его толщу. Построенные вдоль контуров интегрирования обеих геометрических моделей термограммы различались только лишь в начале процесса охлаждения. Уже через час после смерти термограммы вдоль контуров обеих геометрических моделей совпадали (рис. 65).

Построенная геометрическая модель может быть использована для нахождения температурного поля при любых оболочечных кровоизлияниях любой толщины и площади. Для этого достаточно, не меняя свойств меток блоков и ребер модели, изменить толщину блока Blood, имитирующего оболочечное кровоизлияние, до требуемой зарегистрированной в ходе судебно-медицинского исследования трупа (рис. 66). Площадь кровоизлияния, не занимающего всю конвекситальную поверхность мозга, фиксируется в геометрической модели путем добавления дополнительных ребер и блоков.

Увеличение толщины полушарного оболочечного кровоизлияния до 8 мм (см. рис. 66) не оказало какого-либо влияния на геометрию термограмм, построенных как для точек начала координат и внешнего ребра, так и вдоль контура интегрирования, проведенного от начала координат до внешнего ребра модели.

Полученные данные позволяют сделать весьма важный в практическом отношении вывод: наличие внутричерепных оболочечных кровоизлияний любой площади и локализации не оказывает существенного влияния на температуру глубоких отделов мозга и поверхностных тканей головы. Поэтому краниоэнцефальная температура может использоваться для определения ДНС при наличии внутричерепных оболочечных кровоизлияний. При этом определение ДНС может быть осуществлено как путем построения конечноэлементной модели посмертного теплообмена, так и с помощью модификации С. Henssge двойной экспоненциальной модели Marshall-Hoare. Ввиду отсутствия значимого влияния внутричерепных оболочечных кровоизлияний на посмертную температуру поверхностных тканей головы последняя также может быть использована для определения ДНС на основе закона охлаждения Ньютона-Рихмана.

Для выяснения степени влияния на посмертный теплообмен иной внутричерепной патологии (церебральные ушибы, проникающие раны) требуется построение уточненных геометрических моделей с повторным запуском процесса решения задачи.



Рисунок 65. Термограммы вдоль радиуса геометрической модели в момент и через 1 ч после наступления смерти при наличии и отсутствии одностороннего полушарного субарахноидального кровоизлияния.



Рисунок 66. Геометрическая модель головы с наличием полушарного оболочечного кровоизлияния толщиной 8 мм (выделено черным).

§ 5.2. Нахождение температурного поля головы при церебральных ушибах

МКЭ позволяет находить посмертное температурное поле головы не только при оболочечных кровоизлияниях, но и при церебральных ушибах. В качестве примера разберем задачу нахождения посмертного температурного поля головы при наличии двусторонних конвекситальных ушибов суммарной площадью 50% соответствующей поверхности полушарий большого мозга.

Двусторонний характер церебральных ушибов и наличие осевой симметрии геометрической модели позволяют в качестве последней использовать не полусферу, а ее квадрант (рис. 67). Это можно сделать методом копирования файла геометрии из задачи стационарного теплообмена неповрежденного мозга. В исходной геометрической модели в соответствии с условием новой задачи поверхностный слой мозга путем добавления двух вершин и соединяющего их ребра следует разбить на 2 отдельных блока равного объема, один из которых моделирует неповрежденный мозг, а второй – зону ушиба. Итогом разбиения является разделение головного мозга на 3 отдельных блока, каждый из которых остается связан с меткой блока Brain, в свойствах которой указаны прежние теплофизические параметры ткани мозга. Скорее всего, наличие ушиба сопровождается изменением не только температуры, но и теплофизических свойств нервной ткани. Однако ввиду отсутствия соответствующих данных целесообразно в свойствах метки данного блока задать теплофизические параметры неповрежденного мозга.

Единый блок субарахноидального пространства также нужно аналогичным способом разделить на 2 одинаковых блока, из которых блок, расположенный над зоной ушиба, моделирует ассоциированное с ним субарахноидальное кровоизлияние (см. рис. 67). Одновременно следует связать данный блок с дополнительно созданной и связанной с ним меткой Blood. Благодаря этому субарахноидальное пространство делится на два блока: CSF и Blood (рис. 67). Из них блок CSF по-прежнему остается моделью неповрежденного субарахноидального пространства с теплофизическими свойствами ликвора, а блок Blood служит моделью конвекситального субарахноидального кровоизлияния. Для этого в метке блока Blood следует указать теплофизические свойства крови: $\lambda = 0,44$ Bt/(K·м); c = 3800 (Дж/кг·К); $\rho = 1050$ кг/м³.

Физические свойства остальных блоков остаются прежними и поэтому копируются из файла физических свойств исходной задачи.



Рисунок 67. Геометрическая модель головы с наличием двусторонних конвекситальных ушибов. Ассоциированное с ушибом субарахноидальное кровоизлияние выделено черным.

Добавление двух блоков приводит к появлению в геометрической модели пяти дополнительных ребер. На всех из них, а также на двух внешних ребрах указанных блоков необходимо задать особые граничные условия первого рода. Для этого нужно создать две метки: DSBB 2 и Contusion. Первую из них следует связать с внутренним дуговидным ребром зоны ушиба, а вторую – с остальными шестью ребрами, ограничивающими зоны ушиба и субарахноидального кровоизлияния. По условию задачи необходимо задать на метке Contusion граничное условие первого рода с постоянной температурой 38,2 °C, а на метке DSBB 2 – 37,5 °C. Такой подход моделирует прижизненное нагревание зоны субарахноидального кровоизлияния и прилегающей к нему ткани мозга до 38,2 °C с формированием широкой перифокальной зоны в поверхностном и глубоком слоях мозга с повышением ее температуры меньшей величины (до 37,5 °C на границе указанных слоев мозга в проекции зоны ушиба). На остальных метках геометрической модели граничные условия остаются прежними.

Затем необходимо перейти к построению сетки конечных элементов, оптимальное количество узлов которой, равное 237, достигается при задании шага дискретизации, равного 7. В итоге построенная геометрическая модель состоит из 7 блоков (все с меткой), 20 ребер (из них 12 с меткой) и 14 вершин (из них 1 с меткой). После этого следует запустить процесс решения задачи и нахождения начального температурного поля головы.

Аналогично результатам решения предыдущей задачи наличие церебральных ушибов площадью 50% конвекситальных поверхностей полушарий мозга с их ассоциацией с субарахноидальными кровоизлияниями аналогичной площади и толщиной 2 мм не влияет на температуру поверхностных тканей и глубоких отделов мозга (рис. 68). Однако наблюдается асимметричность локализация изотерм в поверхностном и глубоком слоях мозга и в костной ткани черепа.

Для нахождения посмертного температурного поля головы следует, взяв за основу исходный файл геометрии, создать новую задачу нестационарной теплопередачи, связать ее с решенной задачей стационарной теплопередачи и скопировать теплофизические свойства ее блоков. На всех метках ребер геометрической модели, кроме внешнего, нужно инактивировать все граничные условия. На внешнем же ребре необходимо задать граничное условие второго рода с прежними параметрами конвективного теплообмена с воздушной средой и запустить процесс решения задачи.

При анализе картины температурного поля устанавливается симметричная локализация изотерм в области обоих полушарий большого мозга уже через 2 ч после наступления смерти (рис. 69). Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре обеих геометрических моделей (с наличием церебральных ушибов и при отсутствии таковых) почти совпадают (рис. 70). Небольшие расхождения между ними присущи только температуре поверхностных тканей и лишь в первые 8 ч посмертного периода. При этом имеет место слабо выраженный феномен посмертной гипертермии.



Рисунок 68. Начальное температурное поле головы при наличии двусторонних конвекситальных ушибов.

Развитие посмертной гипертермии поверхностных тканей объясняется выраженной прижизненной неоднородностью температурного поля головного мозга с наличием крупного очага повышения температуры в его поверхностном слое и субарахноидальном пространстве. Вследствие этого температурный максимум при наличии ушибов такой площади находится не в центре координат, а в их зоне. Перенос теплоты из зоны ушиба и приводит к незначительному нагреванию мягких тканей головы в первые минуты после наступления смерти.

В рамках дальнейшего анализа в обеих геометрических моделях были проведены контуры интегрирования, направленные от центра начала координат к внешнему ребру модели. В модели с наличием ушибов контур интегрирования проводился через его толщу ($\varphi = 90^{\circ}$) и неповрежденную зону мозга ($\varphi = 0^{\circ}$).



Рисунок 69. Посмертное температурное поле головы при наличии двусторонних конвекситальных ушибов через 2 ч после смерти.

Построенные вдоль контуров интегрирования обеих геометрических моделей термограммы существенно различались только лишь в начале процесса охлаждения. В частности, наблюдалось локальное повышение температуры мозга в зоне его ушиба. При этом термограмма, соответствовавшая контуру интегрирования, проведенному через неповрежденные отделы мозга, полностью совпадала с таковой для модели интактного мозга (рис. 71).

Через час после смерти различия между термограммами вдоль всех трех контуров обеих геометрических моделей резко уменьшились. Отмечался лишь небольшой систематический сдвиг в сторону больших температурных значений кривой охлаждения, соответствовавшей интегрирующему контуру, проведенному через толщу зоны ушиба (см. рис. 71). Термограммы неповрежденных отделов мозга в обеих геометрических моделях почти не отличались.



Рисунок 70. Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре модели при наличии двусторонних конвекситальных ушибов и отсутствии повреждений.

Вместе с тем термограмма, соответствовавшая контуру, проведенному через зону неповрежденного мозга в модели с наличием ушибов, локализовалась чуть выше термограммы для модели интактного мозга (см. рис. 71). Аналогичный характер взаимного расположения всех трех термограмм сохранялся и в более поздние сроки посмертного периода.

Полученные данные позволяют сделать следующий вывод: наличие даже двусторонних церебральных ушибов и субарахноидальных кровоизлияний суммарной площадью до 50% конвекситальных поверхностей полушарий мозга также не оказывает существенного влияния на температуру его глубоких отделов и поверхностных тканей головы. Поэтому краниоэнцефальная температура может использоваться для определения ДНС при наличии не только внутричерепных оболочечных кровоизлияний, но и двусторонних церебральных ушибов. Определение ДНС также может быть осуществлено методом конечно-элементного моделирования посмертного теплообмена или с помощью модификации С. Henssge двойной экспоненциальной модели Marshall-Hoare.



Рисунок 71. Термограммы вдоль контуров интегрирования в момент и через 1 ч после наступления смерти при наличии двусторонних конвекситальных ушибов и отсутствии повреждений. Верхние кривые соответствуют контуру, проведенному через толщу зоны ушиба, средние – вне зоны ушиба. Нижние термограммы соответствуют контуру в модели головного мозга без каких-либо повреждений.

определения ДНС Олнако точность на основе конечноэлементного моделирования посмертного теплообмена будет выше таково метода С. Henssge, поскольку МКЭ основывается на физических законах охлаждения и позволяет учитывать его индивидуальные особенности. Так, посмертное температурное поле может быть найдено при церебральных ушибах любой толщины и площади. Для этого геометрия субарахноидальных кровоизлияний и ушибов мозга, обнаруженных в ходе судебно-медицинского исследования трупа, а также одно- или двусторонний характер их локализации должны быть отражены в геометрии конечно-элементной модели путем добавления блоков, ребер, вершин и их меток.

Ввиду отсутствия значимого влияния наличия двусторонних церебральных ушибов на посмертную температуру поверхностных тканей головы последняя также может быть использована для определения ДНС на основе закона охлаждения Ньютона-Рихмана.

§ 5.3. Нахождение температурного поля головы при внутрижелудочковых кровоизлияниях

В предыдущих параграфах было показано, что наличие церебральных ушибов и внутричерепных оболочечных кровоизлияний не оказывает существенного влияния на краниоэнцефальную температуру и температуру поверхностных тканей головы. В значительной степени этот факт объясняется промежуточной локализацией указанных геморрагий между двумя уровнями термометрии: глубокой и поверхностной. Однако существует еще одна разновидность внутричерепных кровоизлияний – внутрижелудочковые, локализующиеся непосредственно в зоне глубокой термометрии и, возможно, способные за счет повышения начальной краниоэнцефальной температуры оказывать влияние на динамику последней. В качестве примера оценим МКЭ степень влияния двусторонних внутрижелудочковых кровоизлияний (ВЖК) на посмертное температурное поле головы.

Двусторонний характер ВЖК и наличие осевой симметрии позволяют в качестве геометрической модели использовать квадрант. При создании новой задачи нужно опять копировать файл геометрии из задачи стационарной теплопередачи неповрежденного мозга. В исходной геометрической модели в соответствии с условием новой задачи в глубоком слое мозга следует создать дополнительный полусферический блок радиусом 23 мм, имитирующий двустороннее ВЖК объемом 25 см³ (рис. 72). Для этого потребуется также создать метку блока Blood с теплофизическими параметрами крови и связать ее с данным блоком. Физические свойства остальных блоков остаются прежними и копируются из файла физических свойств исходной задачи стационарного температурного поля интактного мозга.

Добавление блока Blood приводит к появлению в геометрической модели трех дополнительных ребер. На всех из них, а также на вершине в точке начала координат необходимо задать особое граничное условие первого рода с более высокой начальной температурой, например, 38,2 °C. На остальных метках ребер граничные условия остаются прежними.

Затем необходимо перейти к построению сетки конечных элементов, оптимальное количество узлов которой, равное 227, достигается при прежнем шаге дискретизации, равном 7. В итоге построенная геометрическая модель состоит из 6 блоков (все с меткой), 18 ребер (из них 6 с меткой) и 13 вершин (из них 1 с меткой). После этого следует запустить процесс решения задачи и нахождения начального температурного поля головы.



Рисунок 72. Геометрическая модель головы с наличием двусторонних ВЖК (выделено черным).

Задание названных выше граничных условий позволяет смоделировать начальное температурное поле головы, отличающееся повышением температуры в области ВЖК, их стенок и перифокальных отделов мозга (рис. 73). Для нахождения посмертного температурного поля головы при наличии ВЖК следует, взяв за основу исходный файл геометрии, создать новую задачу нестационарной теплопередачи, связать ее с решенной задачей стационарной теплопередачи и скопировать физические свойства ее блоков. На всех метках ребер, кроме внешнего, нужно инактивировать все граничные условия.



Рисунок 73. Начальное температурное поле головы при наличии двусторонних ВЖК.

На внешнем ребре необходимо задать граничное условие второго рода с прежними параметрами конвективного теплообмена и запустить процесс решения задачи.

При анализе картины температурного поля устанавливается симметричная локализация изотерм уже через 1 ч после наступления смерти (рис. 74). Несмотря на повышенную начальную температуру глубоких отделов мозга, их охлаждение протекает с плохо выраженным температурным плато, вследствие чего уже через час после смерти термограммы в точке начала координат при наличии и отсутствии ВЖК совпадают. Термограммы в точках на внешнем ребре обеих геометрических моделей совпадают на всем протяжении (рис. 75). Эти же выводы были получены проведением контуров интегрирования вдоль радиусов обеих геометрических моделей (рис. 76).



Рисунок 74. Посмертное температурное поле головы при наличии двусторонних ВЖК через 1 ч после наступления смерти.

Таким образом, наличие ВЖК объемом до 25 см³ влияет на динамику краниоэнцефальной температуры лишь в первый час после наступления смерти и то при условии повышения ее начальной величины. В последующем кривые охлаждения глубоких отделов мозга при наличии ВЖК не отличаются от таковых с их отсутствием. На посмертную температуру поверхностных тканей наличие ВЖК существенного влияния не оказывает.

Фактически краниоэнцефальная температура может использоваться для определения ДНС при наличии любых внутричерепных кровоизлияний. Определение ДНС также может быть осуществлено методом конечно-элементного моделирования посмертного теплообмена или с помощью модификации С. Henssge двойной экспоненциальной модели Marshall-Hoare.



Рисунок 75. Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре геометрической модели при наличии и отсутствии двусторонних ВЖК.



Рисунок 76. Термограммы вдоль радиуса геометрической модели головы в момент и через 1 ч после наступления смерти при наличии и отсутствии двусторонних ВЖК.
§ 5.4. Нахождение температурного поля головы при открытой проникающей черепно-мозговой травме

Открытая проникающая черепно-мозговая травма (ЧМТ) является еще одним повреждением, в отношении которого актуально выяснение степени его влияния на посмертный теплообмен. В качестве основы для МКЭ используем геометрическую модель стационарной теплопередачи при отсутствии каких-либо повреждений головы.

В исходной геометрической модели в соответствии с условием новой задачи в кожно-мышечном лоскуте головы, черепе, оболочках и ткани головного мозга следует создать клиновидный дефект глубиной 33 мм, занимающий 2,2% поверхности головы (рис. 77). В проекции блока CSF нужно также создать два отдельных блока, имитирующих оболочечные кровоизлияния суммарной толщиной 2 мм и площадью 22,2% конвекситальной поверхности полушария большого мозга. Потребуется также создать метку блока Blood с теплофизическими параметрами крови и связать ее с двумя данными блоками. Физические свойства остальных блоков остаются прежними и копируются из файла физических свойств исходной задачи стационарного температурного поля интактного мозга.

Зону клиновидного дефекта следует ограничить также серией ребер для формирования перифокальной зоны размозжения и ушиба тканей с повышенной за счет гиперемии температурой. Перифокальная зона должна также включать блоки с меткой Blood. На всех ребрах этой зоны, кроме расположенных внутри нее и на внешнем ребре модели, нужно задать особое граничное условие первого рода с более высокой начальной температурой, например, 38,2 °C. На внутренних ребрах перифокальной зоны следует инактивировать все граничные условия. На остальных метках ребер модели граничные условия остаются прежними.

Затем необходимо перейти к построению сетки конечных элементов, оптимальное количество узлов которой, равное 247, достигается при прежнем шаге дискретизации, равном 7. В итоге построенная геометрическая модель состоит из 17 блоков (все с меткой), 50 ребер (из них 38 с меткой) и 34 вершин (из них 1 с меткой). После этого следует запустить процесс решения задачи.

Заданная геометрия и названные граничные условия позволяют смоделировать начальное температурное поле головы, отличающееся повышением температуры в области стенок проникающей раны, ее перифокальных отделов, зоны ассоциированных оболочечных кровоизлияний, а также ушиба мозга (рис. 78).



Рисунок 77. Геометрическая модель открытой проникающей ЧМТ с наличием оболочечных кровоизлияний толщиной 2 мм (выделено черным).

Для нахождения посмертного температурного поля головы при открытой проникающей ЧМТ нужно создать новую задачу нестационарной теплопередачи, связать ее с решенной задачей стационарного теплообмена и скопировать физические свойства ее блоков. На всех метках ребер, кроме внешнего, следует инактивировать все граничные условия. На внешнем ребре необходимо задать граничное условие второго рода с прежними параметрами конвективного теплообмена и запустить процесс решения задачи.



Рисунок 78. Начальное температурное поле головы при наличии открытой непроникающей ЧМТ.

Анализ картины температурного поля показывает, что даже при наличии проникающей раны головы уже через 2 ч после наступления смерти неоднородность поля вдоль угловой координаты практически исчезает (рис. 79). Начиная с этого момента, градиент температур сохраняется лишь в радиальном направлении. Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре геометрических моделей интактного мозга и с наличием открытой проникающей ЧМТ совпадают на всем протяжении (рис. 80).

Также вдоль радиусов обеих геометрических моделей были проведены контуры интегрирования с одинаковыми координатами конечных точек. В модели с наличием проникающей раны головы контур проходил через ее край и перифокальную зону. В нулевой момент времени термограммы обеих моделей совпадали до зоны раны.



Рисунок 79. Посмертное температурное поле головы при наличии открытой непроникающей ЧМТ через 2 ч после наступления смерти.

В области проникающего ранения отмечалось выраженное повышение температуры тканей по сравнению с моделью интактного мозга (рис. 81). Однако данное различие термограмм исчезало через 2 ч после начала процесса охлаждения из-за теплообмена нагретых участков с соседними (см. рис. 81).

Таким образом, наличие открытой проникающей ЧМТ не оказывает существенного влияния на посмертную динамику краниоэнцефальной температуры и температуры поверхностных тканей. Локальное повышение температуры в области проникающей раны, перифокальных тканях и ассоциированных оболочечных кровоизлияниях исчезает через 2 ч от начала охлаждения. Поэтому краниоэнцефальная и поверхностная температура может использоваться для определения ДНС при наличии открытой проникающей ЧМТ.



Рисунок 80. Термограммы в точках начала координат и на внешнем ребре геометрической модели при наличии и отсутствии открытой проникающей ЧМТ.



Рисунок 81. Термограммы вдоль радиуса геометрической модели головы в момент и через 2 ч после наступления смерти при наличии и отсутствии открытой проникающей ЧМТ.

Выполнение заданий предполагает использование приложения ELCUT 6.5 Student, доступное для скачивания по ссылке: https://elcut.ru/free_soft_r.htm. Каждое задание включает в себя результаты решения предыдущих. Выполнение задания подразумевает построение геометрического объекта или графического изображения.

1. Построить двумерную геометрическую модель мозгового отдела головы, состоящую из 5 анатомических слоев: глубинных и поверхностных отделов мозга, ликвора субарахноидального пространства, черепа и кожно-апоневротического лоскута. Задать следующую толщину указанных слоев: 69, 17, 2, 5 и 5 мм.

2. В геометрической модели мозгового отдела головы построить сетку конечных элементов с минимальным шагом дискретизации.

3. В рамках построенной геометрической модели найти стационарное температурное поле расчетной области при следующих граничных условиях: температура на границе между глубинным и поверхностным слоями мозга постоянна и равна 37,2 °С, между мозгом и ликвором – 35,5 °С, между ликвором и черепом – 35 °С, между черепом и кожно-апоневротическим лоскутом – 34 °С, на поверхности – 31 °С. Температурное поле глубинных отделов мозга однородное и равно 37,2 °С. При задании теплофизических параметров анатомических слоев головы использовать данные, указанные в таблице 1 (см. § 2.3). Построить термограмму вдоль радиуса геометрической модели.

4. Найти температурное поле расчетной области спустя 7 ч после наступления смерти в условиях конвективного теплообмена с воздушной средой с коэффициентом теплоотдачи 6 Вт/(м²·К) при постоянной температуре воздуха 10 °C. В качестве начального температурного поля использовать результат решения задания 3.

5. Построить термограмму поверхности головы для первых 24 ч посмертного периода в условиях конвективного теплообмена с воздушной средой с коэффициентом теплоотдачи 6 Вт/(м²·K) при увеличивающейся со скоростью 0,5 °C/ч внешней температуре. Начальная температура внешней среды в момент наступления смерти 10 °C. В качестве начального температурного поля использовать результат решения задания 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Феноменологические модели определения ДНС, получившие широкое распространение, тем не менее, характеризуются ограниченностью условий для своего использования и ресурсов для модификации. В частности, эти модели не пригодны при таких сложных условиях теплообмена, как комбинация различных условий охлаждения для разных областей тела, наличие внешних источников тепла, непостоянная температура внешней среды или нелинейный характер ее динамики. Поэтому источником дальнейшего совершенствования тепловых методов определения ДНС в судебной медицине является моделирование охлаждения тела на основе теории теплообмена, рассматривающей процессы переноса тепла в пространстве и во времени тремя возможными элементарными способами: тепловым излучением, конвекцией и теплопроводностью.

Наиболее эффективным методом моделирования посмертного теплообмена считается МКЭ, который стал доступен благодаря широкому распространению компьютерных технологий. Использование МКЭ позволяет преодолеть проблему учета в процессе посмертного охлаждения сложных начальных и граничных условий, а также сложной геометрии и внутренней структуры тела.

Изложенное возводит изучение основ теории теплообмена и приобретение навыков компьютерного моделирования процессов теплопереноса в ранг одной из важных составляющих подготовки каждого судебно-медицинского эксперта.

В настоящее время существует большое количество программных продуктов по компьютерному моделированию, основанных на МКЭ и предназначенных для решения широкого круга физических и инженерных задач, включая задачи теплообмена. Как правило, это весьма сложные и дорогостоящие программные комплексы зарубежных производителей. Однако указанные программы характеризуются и существенными недостатками, к числу которых следует отнести их большую стоимость, сложность в освоении и высокие требования к оборудованию. Из-за этого данные приложения остаются недоступными для широкого применения в судебно-медицинской экспертной практике, а их огромный потенциал ограничивается эпизодическим использованием в научно-исследовательской работе.

Сложившееся положение может быть хотя бы частично улучшено путем использования ELCUT – мощного современного комплекса программ российского производства для конечно-элементного моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач. Основные плюсы программного комплекса ELCUT: русскоязычный интерфейс, простота освоения, широкие аналитические возможности комплекса и высокая степень автоматизации всех операций. ELCUT позволяет решать сложные задачи нахождения температурных полей на обычных персональных компьютерах, не прибегая к помощи больших ЭВМ или рабочих станций. Помимо коммерческой существует и бесплатная студенческая версия ELCUT. Последняя отличается от профессиональной наличием ограничения на число узлов сетки (не более 255) и, как следствие, отсутствием возможности построения трехмерных моделей. В остальном функциональность и интерфейс указанных версий совпадают.

В пособии кратко изложены теоретические основы исследования процессов теплопроводности. Подробно охарактеризован алгоритм конечно-элементного моделирования посмертного теплообмена, предполагающий создание задачи, задание геометрии и теплофизических свойств модели, а также начального и граничных условий теплообмена, построение сетки конечных элементов, запуск процесса решения задачи и анализ его результатов. Численное моделирование посмертного теплообмена подробно осуществлено на многочисленных примерах с помощью бесплатно распространяемого приложения ELCUT 6.5 Student российского производства, не предъявляющего высоких системных требований к компьютеру и не требующего наличия у оператора специальной математико-инженерной подготовки.

Изучение приведенного материала в сочетании с выполнением заданий для самоконтроля будет способствовать формированию соответствующих профессиональных компетенций у ординаторов, обучающихся по специальности 31.08.10 «Судебно-медицинская экспертиза»

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nelson DA, Nunneley SA*. Brain temperature and limits on transcranial cooling in humans: quantitative modeling results. Eur J Appl Physiol Occup Physiol. 1998;78(4):353-359. doi: 10.1007/s004210050431

2. *Zhu L, Diao C*. Theoretical simulation of temperature distribution in the brain during mild hypothermia treatment for brain injury. Med Biol Eng Comput. 2001;39(6):681-687. doi: 10.1007/BF02345442

3. Weiser M, Erdmann B, Schenkl S., Muggenthaler H, Hubig M, Mall G, Zachow S. Uncertainty in temperature-based determination of time of death. Heat Mass Transfer. 2018;54:2815–2826. doi: 10.1007/s00231-018-2324-4

4. *Cabanac M, Caputa M*. Natural selective cooling of the human brain: evidence of its occurrence and magnitude. J Physiol. 1979;286:255-264. doi: 10.1113/jphysiol.1979.sp012617

5. *Mariak Z, Jadeszko M, Lewko J, Lebkowski W, Lyson T*. No specific brain protection against thermal stress in fever. Acta Neurochir (Wien). 1998;140(6):585-590. doi: 10.1007/s007010050144

6. *Mcilvoy L*. Comparison of brain temperature to core temperature: a review of the literature. J Neurosci Nurs. 2004;36(1):23-31. doi: 10.1097/01376517-200402000-00004

7. Blowers S, Marshall I, Thrippleton M, Andrews P, Harris B, Bethune I, Valluri P. How does blood regulate cerebral temperatures during hypothermia? Sci Rep. 2018;8(1):7877. doi: 10.1038/s41598-018-26063-7

8. *Mellergård P, Nordström CH*. Epidural temperature and possible intracerebral temperature gradients in man. Br J Neurosurg. 1990;4(1):31-8. doi: 10.3109/02688699009000679

9. *Mellergård P*. Monitoring of rectal, epidural, and intraventricular temperature in neurosurgical patients. Acta Neurochir Suppl (Wien). 1994;60:485-487. doi: 10.1007/978-3-7091-9334-1 133

10. *Mellergård P*. Intracerebral temperature in neurosurgical patients: intracerebral temperature gradients and relationships to consciousness level. Surg Neurol. 1995;43(1):91-95. doi: 10.1016/0090-3019(95)80049-m

11. Verlooy J, Heytens L, Veeckmans G, Selosse P. Intracerebral temperature monitoring in severely head injured patients. Acta Neurochir (Wien). 1995;134(1-2):76-78. doi: 10.1007/BF01428508

12. Henker RA, Brown SD, Marion DW. Comparison of brain temperature with bladder and rectal temperatures in adults with severe head injury.

Neurosurgery. 1998;42(5):1071-1075. doi: 10.1097/00006123-199805000-00071.

13. Fountas KN, Kapsalaki EZ, Feltes CH, Smisson HF 3rd, Johnston KW, Robinson JS Jr. Intracranial temperature: is it different throughout the brain? Neurocrit Care. 2004;1(2):195-199. doi: 10.1385/NCC:1:2:195

14. *Hirashima Y, Takaba M, Endo S, Hayashi N, Yamashita K, Takaku A*. Intracerebral temperature in patients with hydrocephalus of varying aetiology. J Neurol Neurosurg Psychiatry. 1998;64(6):792-794. doi: 10.1136/jnnp.64.6.792

15. *Zhu M, Ackerman JJ, Sukstanskii AL, Yablonskiy DA*. How the body controls brain temperature: the temperature shielding effect of cerebral blood flow. J Appl Physiol (1985). 2006;101(5):1481-1488. doi: 10.1152/japplphysiol.00319.2006

16. *Mall G, Hubig M, Beier G, Eisenmenger W*. Energy loss due to radiation in postmortem cooling. Part A: quantitative estimation of radiation using the Stefan-Boltzmann law. Int J Legal Med. 1998;111(6):299-304. doi: 10.1007/s004140050175

17. *Lundquist F*. Physical and chemical methods for the estimation of the time of death. Acta Med Leg Soc (Liege). 1956;9(Spec No):205-213.

18. *Mall G, Hubig M, Beier G, Büttner A, Eisenmenger W*. Supravital energy production in early post-mortem phase - estimate based on heat loss due to radiation and natural convection. Leg Med (Tokyo). 2002;4(2):71-78. doi: 10.1016/s1344-6223(02)00005-6

19. *Mall G, Hubig M, Beier G, Büttner A, Eisenmenger W*. Energy loss due to radiation in postmortem cooling. Part B: Energy balance with respect to radiation. Int J Legal Med. 1999;112(4):233-240. doi: 10.1007/s004140050242

20. *Mall G, Hubig M, Büttner A, Eisenmenger W*. Simulating irradiation power density on body surface in postmortem cooling. Leg Med (Tokyo). 2004;6(2):131-140. doi: 10.1016/j.legalmed.2003.12.004

21. *den Hartog EA, Lotens WA*. Postmortem time estimation using body temperature and a finite-element computer model. Eur J Appl Physiol. 2004;92(6):734-737. doi: 10.1007/s00421-004-1128-z

22. *Henssge C, Beckmann ER, Wischhusen F, Brinkmann B*. Todeszeitbes-timmung durch Messung der zentralen Hirntemperatur. Z Rechtsmed. 1984;93(1):1-22. doi: 10.1007/BF00202979

23. Недугов ГВ. Математическое моделирование охлаждения трупа. Казань: Бук, 2021.

24. *Rainy H*. On the Cooling of Dead Bodies as Indicating the Length of Time That Has Elapsed Since Death. Glasgow Med J. 1869;1(3):323-330.

25. *Burman JW*. On the Rate of Cooling of the Human Body after Death. Ed-inb Med J. 1880;25(11):993-1003.

26. Demierre N, Wyler D, Zollinger U, Bolliger S, Plattner T. Elevated body core temperature in medico-legal investigation of violent death. Am J Forensic Med Pathol. 2009;30(2):155-158. doi: 10.1097/PAF.0b013e31819a04a6

27. *Henssge C*. Death time estimation in case work. I. The rectal temperature time of death nomogram. Forensic Sci Int. 1988;38(3-4):209-236. doi: 10.1016/0379-0738(88)90168-5

28. Schwab S, Spranger M, Aschoff A, Steiner T, Hacke W. Brain temperature monitoring and modulation in patients with severe MCA infarction. Neurology. 1997;48(3):762-767. doi: 10.1212/wnl.48.3.762

29. Rumana CS, Gopinath SP, Uzura M, Valadka AB, Robertson CS. Brain temperature exceeds systemic temperature in head-injured patients. Crit Care Med. 1998;26(3):562-567. doi: 10.1097/00003246-199803000-00032

30. Soukup J, Zauner A, Doppenberg EM, Menzel M, Gilman C, Young HF, Bullock R. The importance of brain temperature in patients after severe head injury: relationship to intracranial pressure, cerebral perfusion pressure, cerebral blood flow, and outcome. J Neurotrauma. 2002;19(5):559-571. doi: 10.1089/089771502753754046

31. *Oh JY, Jo K, Joo W, Yoo DS, Park H*. Temperature Difference between Brain and Axilla according to Body Temperature in the Patient with Brain Injury. Korean J Neurotrauma. 2020;16(2):147-156. doi: 10.13004/kjnt.2020.16.e40

32. Addis A, Gaasch M, Schiefecker AJ, Kofler M, Ianosi B, Rass V, Lindner A, Broessner G, Beer R, Pfausler B, Thomé C, Schmutzhard E, Helbok R. Brain temperature regulation in poor-grade subarachnoid hemorrhage patients - A multimodal neuromonitoring study. J Cereb Blood Flow Metab. 2021;41(2):359-368. doi:10.1177/0271678X20910405

33. *Hutchins GM*. Body temperature is elevated in the early postmortem period. Hum Pathol. 1985;16(6):560-561. doi: 10.1016/s0046-8177(85)80104-0

34. Vojtíšek T, Kučerová Š, Krajsa J, Eren B, Vysočanová P, Hejna P. Postmortem Increase in Body Core Temperature: How Inaccurate We Can Be in Time Since Death Calculations. Am J Forensic Med Pathol. 2017;38(1):21-23. doi: 10.1097/PAF.00000000000286

Научное издание

Недугов Герман Владимирович

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСМЕРТНОГО ТЕПЛООБМЕНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Выпускающий редактор Е. И. Осянина Отпечатано с готового оригинал-макета.

Подписано в печать 23.08.2022. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 13,95. Тираж 100 экз. Заказ 1597.

Издательство «Бук». 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

Отпечатано в типографии «Т8 Издательские Технологии», г. Москва, Волгоградский пр-т, д. 42, корп. 5