

# **1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

## **1.1. Общий алгоритм метода конечных элементов**

Метод конечных элементов (МКЭ), по крайней мере его основы, известен уже более полувека, но настоящий взлет он получил лишь с развитием современных средств информатики.

Специалисты-механики, столкнувшись со сложными задачами расчета структур, первыми использовали информационную технику для анализа моделей механических структур (этот факт относится к 1956 г.). Затем (1960 г.) математики получили строгие формулировки для МКЭ, после чего он становится общим средством изучения задач в частных производных. Начиная с 1970 г. благодаря работам Галлагера [1], Зенкевича [2], [3], [4], Лионса [6], Обэна [8], Одена [9], Сабоннадьера [11], Сегерлинда [12], Сильвестера [13], Стренга, Фикса [15] и др. этот метод становится все более популярным среди инженеров всех специальностей, он быстро завоевал такие сферы инженерной деятельности, как проектирование самолетов и автомобилей, космических ракет, тепловых и электродвигателей, турбин, теплообменных аппаратов и др.

К основным преимуществам МКЭ относят доступность и простоту его понимания, применимость метода для задач с произвольной формой области решения, возможность создания на основе метода высококачественных универсальных программ для ЭВМ.

Строгое доказательство таких важных свойств, как устойчивость, сходимости и точности метода, приводится в соответствующих разделах математики и часто представляет непростую проблему. Тем не менее МКЭ активно развивается, с его помощью без строгого математического обоснования используемых приемов успешно решаются сложные технические проблемы. Правильность же работы созданных алгоритмов, реализующих МКЭ, проверяют на известных точных решениях.

Метод конечных элементов, разработанный на основе матричных методов расчета механических конструкций, рассматривается сегодня как способ решения задач, описываемых уравнениями математической физики в частных производных. Целью представленных ниже лабораторных работ является рассмотрение метода конечных элементов именно с этой точки зрения, поскольку в большинстве случаев, когда МКЭ включается в

системы автоматизированного проектирования (САПР), он служит для моделирования механических, тепловых и электрических задач.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов.

#### *ЭТАП 1. Выделение конечных элементов.*

Пусть  $u$  – некоторая неизвестная функция, удовлетворяющая в области  $\Omega$  уравнению в частных производных

$$L(u) = f,$$

а на  $\partial\Omega$  некоторым граничным условиям. Требуется найти неизвестную непрерывную функцию  $u$  методом конечных элементов (предполагается, что задача имеет решение, причем единственное).

Конечным элементом внутри рассматриваемой области  $\Omega$  называют некоторую подобласть  $\Omega^{(e)}$ , геометрические размеры которой очень малы по сравнению с размерами области  $\Omega$ , но тем не менее остаются конечными. В простейшем случае эти элементы имеют треугольную для плоских или тетраэдральную топологию для трехмерных задач. В общем случае топология может быть четырехугольной или многоугольной.

Разбиение области на элементы – первая процедура этапа выделения конечных элементов. От качества разбиения во многом зависит точность получаемых результатов. Например, разбиение на двумерные элементы, близкие по форме к равносторонним треугольникам, обеспечивает лучшие результаты по сравнению с разбиением на вытянутые по форме треугольные элементы. Возможность легко варьировать размерами элементов – важное свойство МКЭ (последняя позволяет без труда учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты, различные свойства материала изучаемого объекта и т.д.). Разбиение области на элементы обычно начинают от границы с целью наиболее точной аппроксимации формы границы, затем производится разбиение внутренних областей. Часто разбиение области на элементы производят в несколько этапов. Сначала область разбивают на достаточно крупные подобласти, границы между которыми проходят там, где изменяются свойства материала, геометрия, приложенная нагрузка и пр. Затем каждая подобласть разбивается на элементы. Резкого изменения размеров конечных элементов на границах подобластей стараются избегать.

Нумерация узлов элементов (глобальная нумерация узлов) – вторая процедура этапа выделения конечных элементов. Порядок нумерации в данном случае имеет существенное значение, так как влияет на эффективность последующих вычислений. Дело в том, что матрица коэффициентов системы уравнений, к которой приводит

МКЭ, - сильно разреженная матрица ленточной структуры. Ненулевые элементы такой матрицы располагаются параллельно главной диагонали. Целое число  $L$ , представляющее собой наибольшую разность между номерами ненулевых элементов в строке, называется шириной полосы. Чем меньше ширина полосы, тем меньший объем оперативной памяти требуется для хранения матрицы при реализации МКЭ в САПР и тем меньше затрат машинного времени на решение результирующей системы уравнений. Ширина полосы зависит, в свою очередь, от числа степеней свободы узлов и способа нумерации последних. Под числом степеней свободы понимают количество неизвестных функций, определяемых в каждом узле. Так, например, для двумерных задач гидравлики в каждом узле определяются три переменные: давление и составляющие скорости по осям  $X$  и  $Y$ .

При нумерации узлов предпочтителен способ, обеспечивающий минимальную разность между номерами узлов в каждом отдельном элементе. Если максимальную разность между номерами узлов для отдельного элемента обозначить  $N$ , а число степеней свободы  $M$ , то ширина полосы  $L=(N+1)M$ .

Составление топологической информации – последняя процедура этапа выделения конечных элементов. Информация о способе разбиения области на конечные элементы и нумерация узлов является исходной для всех следующих этапов алгоритма МКЭ при реализации метода в САПР. При этом требуется указывать тип конечного элемента, его порядковый номер, номера узлов элемента, координаты узлов, информацию о соединении элементов между собой, значения физических параметров объекта в пределах каждого конечного элемента. Такого рода информация называется топологической и содержит примерно в 6 раз больше информации, чем количество узлов системы.

### *ЭТАП 2. Определение функции элемента.*

Пусть в результате выполнения первого этапа МКЭ исходная область  $\Omega$  была разбита на  $N$  конечных элементов:  $\Omega^{(1)}, \Omega^{(2)}, \dots, \Omega^{(N)}$ . На втором этапе значение непрерывной функции  $u$  в произвольной точке  $(e)$ -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{R} + A_0 \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{A}^{(e)}$  – вектор коэффициентов полинома,  $A_0$  – свободный член,  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(x, y, z)$  – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора  $\mathbf{A}^{(e)}$  и свободного члена  $A_0$ . Коэффициенты полинома и свободный член могут быть определены значениями функции в частных точках, называемых узлами элемента. Предположим, что в каждом конечном элементе выбрано по  $M$  узлов (в общем случае число узлов в конечных элементах может быть различным). Используя условие непрерывности функции  $u$  в узлах, коэффициенты полинома  $\varphi^{(e)}$  выражаются через вектор  $\mathbf{\Phi}^{(e)} = (\Phi^{(e)}_1, \Phi^{(e)}_2, \dots, \Phi^{(e)}_M)^T$  узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = \mathbf{N}^{(e)T} \mathbf{\Phi}^{(e)} \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{N}^{(e)} = (N^{(e)}_1, N^{(e)}_2, \dots, N^{(e)}_M)^T$  – вектор, элементы которого называют функциями формы конечного элемента.

Функции формы легко вычисляются через координаты самой точки и координаты узлов элемента.

### *ЭТАП 3. Объединение конечных элементов в ансамбль.*

На этом этапе уравнения (1.2), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль:

$$\varphi = \mathbf{N}^T \mathbf{\Phi}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_{NN})^T$ ,  $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{NN})^T$ , а  $NN$  – число узлов во всех конечных элементах. Заметим, что  $NN \leq M \cdot N$ , так как один и тот же узел может принадлежать разным конечным элементам.

Между векторами  $\mathbf{\Phi}^{(e)}$  ( $e=1, 2, \dots, N$ ) и вектором  $\mathbf{\Phi}$  существует простая топологическая связь, выражаемая с помощью булевых матриц:  $\mathbf{\Phi}^{(e)} = \Delta^{(e)} \mathbf{\Phi}$ ,  $e=1, 2, \dots, N$ . Вектор  $\mathbf{N}$  определяется по формуле

$$\mathbf{N} = \sum_{e=1}^N \Delta^{(e)T} \mathbf{N}^{(e)}.$$

Система (1.3) является моделью искомой непрерывной функции  $u$ .

### *ЭТАП 4. Определение вектора узловых значений функции.*

В общем случае вектор  $\mathbf{\Phi}$  в (1.3) неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Разработано несколько алгоритмов вычисления вектора  $\mathbf{\Phi}$ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

1) Выбор функционала  $F$ , зависящего для стационарных задач от искомой функции  $u$  и ее частных производных  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial u/\partial z$ :

$$F = \int_{\Omega} F_1(u, \partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial u/\partial z) d\Omega. \quad (1.4)$$

Подбор функционала является нетривиальной процедурой, требующей глубоких знаний в конкретной предметной области.

2) Подстановка аппроксимирующего выражения (1.3) в (1.4) и вычисление производных  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial u/\partial z$  по формулам вида:

$$\begin{aligned} \partial u/\partial x &= \partial \varphi/\partial x = (\partial \mathbf{N}/\partial x)^T \Phi, \\ \partial u/\partial y &= \partial \varphi/\partial y = (\partial \mathbf{N}/\partial y)^T \Phi, \\ \partial u/\partial z &= \partial \varphi/\partial z = (\partial \mathbf{N}/\partial z)^T \Phi. \end{aligned}$$

В результате получим

$$F = \int_{\Omega} F_1(\mathbf{N}^T \Phi, (\partial \mathbf{N}/\partial x)^T \Phi, (\partial \mathbf{N}/\partial y)^T \Phi, (\partial \mathbf{N}/\partial z)^T \Phi) d\Omega. \quad (1.5)$$

3) Минимизация по вектору  $\Phi$  функционала  $F$ . Необходимое условие экстремальности (которое в большинстве случаев является условием минимизации) записывается в виде

$$\partial F/\partial \Phi = 0 \quad (1.6)$$

или

$$\partial F/\partial \Phi_1 = 0, \partial F/\partial \Phi_2 = 0, \dots, \partial F/\partial \Phi_{NN} = 0. \quad (1.7)$$

(1.7) является системой из  $NN$  алгебраических уравнений с  $NN$  неизвестными  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{NN}$ . Решение этой системы дает аппроксимирующую функцию  $\varphi$  во всей области  $\Omega$ .

При решении задач, для которых не удастся подобрать функционал для минимизации (например, задач, математическим описанием которых служат уравнения Навье-Стокса), с успехом применяется метод Галеркина. Он представляет собой частный случай более общего метода взвешенных невязок. Основным преимуществом этого метода является то, что основой для него служит исходное дифференциальное уравнение.

Найденные значения вектора  $\Phi$  подставляют в (1.3), после чего значения функции  $\varphi$  легко вычисляются в любой точке заданной области.

## 1.2. Архитектура комплексов программ, основанных на методе конечных элементов

### *Общая структура.*

В процессе проектирования расчет характеристик некоторого устройства включает три этапа:

- описание геометрии; генерацию сети конечных элементов; описание физических характеристик;
- расчет с помощью метода конечных элементов;
- визуализацию и интерпретацию результатов моделирования.

На уровне программного обеспечения эти этапы соответствуют трем функциям, выполняемым отдельными модулями:

- модулем ввода данных (препроцессором);
- модулем вычислений (процессором);
- модулем вывода результатов (постпроцессором).

#### *Функции препроцессора.*

Препроцессор предназначен для ввода и подготовки всей информации, необходимой для решения задачи методом конечных элементов.

Описание геометрии объекта заключается в представлении его формы и размеров с помощью вычислительных методов.

Описание геометрии иногда производится в неявной форме при создании сети. Однако в настоящее время стремятся разделить эти операции. Вначале составляется описание геометрии, а затем создается сеть, использующая заданную геометрию. Крайним случаем является использование двух специализированных программ: жесткого моделирования для геометрической части и составления сети для дискретизации.

Генерация сети в области заключается в формировании совокупности узлов и совокупности конечных элементов, обеспечивающих приемлемую дискретизацию области. Такая дискретизация должна соответствовать границам области и внутренним границам между различными ее участками. Кроме того, конечные элементы не должны иметь форму, слишком отличающуюся от симметричных форм стандартных элементов (равносторонних треугольников или тетраэдров, квадратов или кубов).

Узлы определяются их координатами, тогда как элементы характеризуются их типом и перечнем их узлов. Некоторые формулировки задач требуют использования интегралов на границах. В этом случае дополнительно к конечным элементам области (объемным в трехмерных задачах и линейным в двумерных) требуется создать конечные элементы границ (поверхностные в трехмерных и линейные в двумерных задачах, дискретизирующие рассматриваемые границы).

Описание физических характеристик называют операцией указания областей и границ. Она включает:

- описание физических характеристик материалов (например, проводимость, теплопроводность и т.д.);
- описание источников (например, источники тепла);
- описание граничных условий;
- описание начальных условий для нестационарных задач.

Обычно эта информация вводится последовательно участок за участком, граница за границей. Связи между участками, конечными элементами области и узлами позволяют отразить эту информацию в виде дискретизации области.

#### *Функции процессора.*

Процессор получает на входе описание сети, физические характеристики и граничные условия; решает систему линейных или нелинейных уравнений и на выходе он выдает значения искомых величин в каждом узле сетки.

Для решения систем уравнений используются два семейства методов: точные (или блочные), действующие путем релаксаций, и глобальные матричные методы. Последние применяемые значительно чаще и имеют несколько этапов:

- построение подматриц и собственных векторов для формирования матрицы в правой части;
- учет граничных условий;
- решение линейной системы.

Решение линейных систем осуществляется чаще всего следующими методами:

- прямыми (Гаусса, Холецкого);
- полупрямыми (ICCG);
- итерационными блочными (Гаусса-Зейделя).

Для систем нелинейных уравнений эти операции повторяются в соответствии с принятой итерационной схемой (Гаусса-Зейделя, Ньютона-Канторовича, Ньютона-Рафсона).

Для нестационарных задач такое рассмотрение должно быть повторено на каждом временном шаге (явные и неявные методы конечных разностей Крэнка-Николсона, прогноза-коррекции).

#### *Функции постпроцессора.*

Полученное процессором решение не может непосредственно использоваться по следующим причинам:

- значения переменных в узлах конечноэлементной сетки не всегда имеют четкий физический смысл (например, вектор магнитного потенциала в задачах электромагнетизма);
- масса необработанной численной информации, получаемой при вычислении (несколько тысяч узловых величин), слишком велика для восприятия пользователем.

Постпроцессор играет двойную роль:

- извлекает значащую информацию, которая может быть связана с локальными величинами (например, магнитной индукцией, удельными потерями, механическими напряжениями и т.д.) или глобальными величинами (тепловым потоком, электромагнитными силами и т. д.);
- представляет численную информацию в графической форме для облегчения ее восприятия и интерпретации (в виде карты полей, изотерм, постоянных механических напряжений, кривых изменения температуры или магнитного поля вдоль некоторой линии и т.д.).

#### *Структура программного обеспечения для МКЭ.*

Разнородность используемых ресурсов для препроцессора, процессора и постпроцессора вынуждает разработчиков иногда организовывать программное обеспечение в виде трех отдельных программ, реализуемых в ряде случаев на ЭВМ различной производительности. Чаще всего встречаются следующие типы организации:

- единая программа для всех функций (рис.1.1а);
- одна программа для ввода и вывода, другая программа для расчета (рис.1.1б);
- отдельная программа на каждую функцию (рис.1.1в).

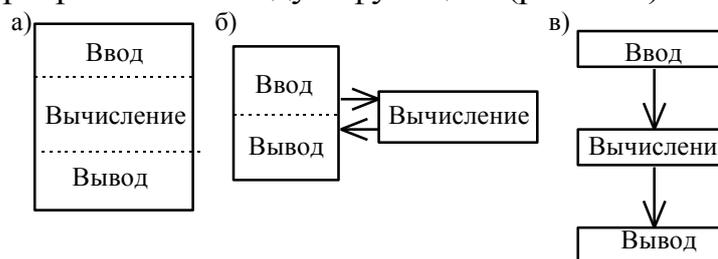


Рис.1.1. Возможная организация программного обеспечения для МКЭ

Использование единой программы, управляющей всеми функциями, позволяет осуществлять быстрый переход от одной процедуры к другой. Единая программа эффективна особенно в тех случаях, когда необходимо многочисленное повторение цикла ввод-расчет-вывод.

В следующем возможном варианте пользователь отдельно пользуется модулем ввода-вывода и модулем вычислений. Это позволяет ему проводить расчеты с разделением времени или даже «on-line», если в соответствии со схемой организации работ имеется очень мощная ЭВМ.

Последний вариант представляет собой цепочку «препроцессор - процессор - процессор». При этом можно предусмотреть использование нескольких препроцессоров, предоставляющих пользователю различные возможности. Пользователь выбирает тот или иной препроцессор в зависимости от конкретных обстоятельств расчета. Например, если разработаны два способа построения сети (один полностью автоматический, а другой ручной, работающий по-блочно), то сначала осуществляется автоматическое разбиение сети, затем, если результаты не удовлетворительны (слишком много элементов, не соблюдается симметрия и т.д.), то используют ручное поблочное разбиение. Все случаи входят в цепочку одной и той же программы решения.

#### *Взаимодействие между программами.*

Архитектура, составленная из нескольких программ, предполагает, что все звенья одного и того же уровня (например, программы ввода) могут сообщить результаты своей обработки всем звеньям следующего уровня (например, программам расчета). Если программы получены независимо друг от друга, то это правило обычно не выполняется и тогда необходимо маркирование. Для ограничения числа модулей преобразования данных лучше определить стандарт передачи, называемый нейтральным файлом.

Стандарт IGES (Основные требования при обмене графической информацией), являющийся стандартом ANSI, точно определяет форму обмена содержимого банка данных и позволяет определить формат данных в нейтральных файлах передачи между программами.

#### *Многодисциплинарные программы.*

Различные явления, происходящие в непрерывных средах, описываются одними и теми же уравнениями в частных производных. Например, двумерное уравнение Пуассона моделирует следующие явления:

- теплопроводность в непрерывном режиме

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q;$$

- электростатику

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\rho;$$

- магнитостатику

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = j_z.$$

Поэтому, одна и та же программа может служить для решения сходных задач, происходящих из различных дисциплин. Тогда возникает проблема выбора языка общения между человеком и программой в рамках исследуемой задачи. Рассматривается несколько возможностей:

- единый нейтральный язык (математический);
- единый проблемно-ориентированный язык (механика, теплотехника и т.д.);
- язык для данной задачи.

Решение об использовании единого языка реализуется много проще, однако, оно трудно воспринимается пользователем.. Поэтому часто встречается следующая последовательность обработки при рассмотрении задач методом конечных элементов (рис. 1.2):

- единое устройство для разбиения на конечные элементы;
- устройство описания физических характеристик по дисциплинам;
- единое решающее устройство;
- устройство обработки результатов по дисциплинам

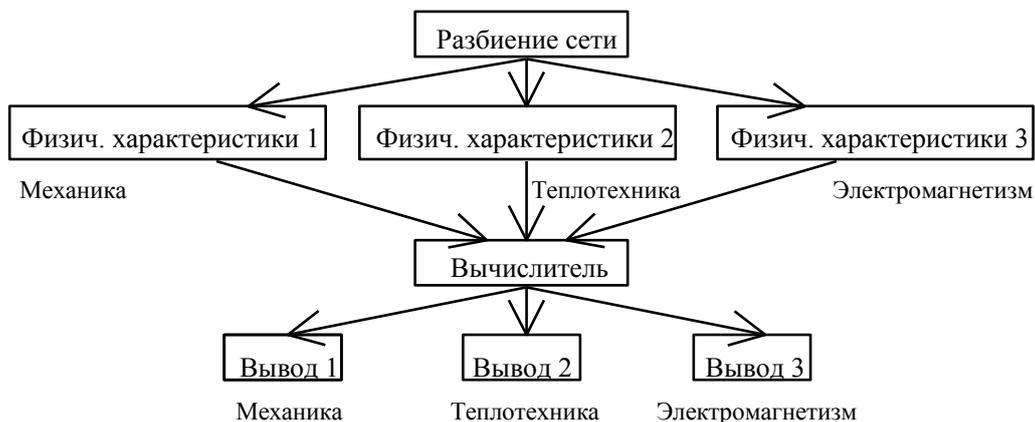


Рис. 1.2. Схема многодисциплинарной обработки по МКЭ

### Современный рынок программ на основе МКЭ.

Широкому распространению МКЭ способствовало создание коммерческих пакетов программ. Дадим краткое описание таких пакетов, наиболее известных на российском рынке (<http://www.thesis.com.ru/>). Система **ADINA** компании ADINA R&D (<http://www.adina.com>) проводит полный конечно-элементный анализ

конструкций, жидкостей и взаимодействия жидкости с конструкцией. Программные комплексы семейства **CFX** предназначены для моделирования движений жидкости и газа на компьютере. Разработанный в Гарвелловском атомном центре (Великобритания) компанией AEA Technology (<http://www.aeat.com>), **CFX** вобрал в себя последние достижения вычислительной гидродинамики и многих пограничных наук, изучающих турбулентное движение жидкости, горение, радиационный теплоперенос. **HYPERMESH** - средство подготовки расчетных моделей и результатов фирмы Altair Computing, Inc(США) (<http://www.altair.com>). **HYPERMESH** позволяет существенно ускорить процесс создания конечно-элементной модели при работе со сложными геометрическими объектами. **FEMAP** - продукт компании Enterprise Software Products, Inc (<http://www.entsoft.com>) - известен как одно из наиболее удачных средств для подготовки данных и обработки результатов по методу конечных элементов в среде Windows на персональных компьютерах. Он помогает инженерам-расчетчикам при анализе напряженно-деформированного состояния конструкции, динамическом и тепловом анализе в различных областях человеческой деятельности. **MARC + Mentat II** - комплекс анализа конструкций и моделирования процессов компании MARC Analysis Research Corporation (США) (<http://www.marc.com>) для инженерного анализа. Фундаментальные алгоритмы, заложенные в программы компании MARC, позволили создать уникальные средства для моделирования реальных физических процессов, происходящих с изделием в процессе его изготовления и эксплуатации. Программный комплекс **SYSNOISE** бельгийской компании LMS NIT предназначен для акустического и виброакустического анализа методами конечных и конечно-бесконечных элементов. **UAI/NASTRAN** (<http://www.uai.com>) - конечно-элементный комплекс общего назначения для проведения инженерных расчетов. Известный тысячам инженеров во всем мире, **UAI/NASTRAN** позволяет решать широкий спектр задач проектирования и анализа конструкций.

#### *Краткое описание системы Elcut 4.1.*

Выполнение лабораторных работ производится в системе ELCUT 4.1 «Студенческая версия», которая свободно распространяется российской фирмой TOP (<http://www.tor.ru>).

ELCUT - интерактивная система моделирования двумерных краевых задач методом конечных элементов. Применяется для расчета электрических машин, трансформаторов, магнитных систем, электромеханических устройств, кабелей, конденсаторов, элементов

конструкций, систем охлаждения и др. ELCUT позволяет решать плоские и осесимметричные задачи:

- электростатики;
- линейной и нелинейной магнитостатики;
- магнитного поля переменных токов;
- растекания токов в проводящем массиве;
- линейной и нелинейной теплопередачи;
- анализа упругого напряженного состояния;
- совмещенные задачи.

ELCUT 4.1 работает под управлением операционной системы Windows 95. Требуемая конфигурация оборудования:

- компьютер: 386, 486 или Pentium IBM PC;
- сопроцессор: Intel 80387 или выше;
- память: 640К минимум, 4МВ рекомендуется (1МВ extended), 4-16МВ для больших задач;
- свободное дисковое пространство: 2.5 МВ;
- видео: VGA цветной или монохромный;
- мышь: Microsoft или 100% совместимая;
- параллельный порт для устройства аппаратной защиты.

Список пользователей ELCUT включает множество крупных предприятий, научно-исследовательских организаций и университетов России, Украины, Эстонии, США, Великобритании, Германии, Франции, Испании, Израиля, ЮАР, Швейцарии, Польши, Кореи, Колумбии и других стран.

### 1.3. Лабораторная работа №1.

#### Решение задач теплопередачи методом конечных элементов

**Цель работы:** приобретение навыков в решении задач теплопередачи методом конечных элементов с использованием персонального компьютера.

**Литература:** [5], [14], [16].

#### Краткие сведения из теории

##### Постановка задачи

ELCUT позволяет решать задачи теплопередачи в линейной и нелинейной постановках. При решении тепловых задач используется уравнение теплопроводности в одном из видов:

- в линейной постановке:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q_v,$$

для осесимметричных задач

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -q_v;$$

- в нелинейной постановке:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q_v(T),$$

для осесимметричных задач

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -q_v(T),$$

где  $T$  - температура;  $\lambda_x, \lambda_y$  или  $\lambda_r, \lambda_z$  - компоненты тензора теплопроводности в линейной постановке;  $\lambda(T)$  - коэффициент теплопроводности как функция температуры, задаваемая таблично, в нелинейной постановке (анизотропия не поддерживается);  $q_v$  - удельная мощность тепловыделения: в линейной постановке - константа, в нелинейной постановке - задаваемая таблично функция температуры.

Все параметры уравнений в линейной постановке постоянны в пределах каждого блока модели.

### *Источники поля в задачах температурного поля*

ELCUT позволяет задать источники тепла в блоках, ребрах и вершинах модели.

Источник тепла, заданный в вершине модели, описывает нагреватель в виде струны, проходящей через эту вершину перпендикулярно плоскости модели, и задается мощностью тепловыделения на единицу длины. В осесимметричном случае точечный источник поля описывает нагреватель в виде окружности вокруг оси симметрии или точечный источник, расположенный на оси. Чтобы охватить оба этих случая, точечный источник всегда описывается полной тепловой мощностью.

Источник тепла, заданный на ребре модели, соответствует тепловыделяющей поверхности в трехмерном мире. Он характеризуется поверхностной плотностью тепловыделения и описывается при помощи граничного условия второго рода для ребра.

Источник тепла, заданный для блока модели, соответствует объемному источнику тепла и характеризуется объемной плотностью тепловыделения.

### *Граничные условия в задачах температурного поля*

Следующие виды граничных условий могут быть заданы на внешних и внутренних границах расчетной области.

Условие заданной температуры специфицирует на ребре или в вершине модели наперед заданное значение температуры  $T_0$  (например, при интенсивном омывании поверхности жидкостью постоянной температуры). Значение  $T_0$  на ребре может быть задано в виде линейной функции координат. Параметры задающей функции могут меняться от ребра к ребру, но должны быть согласованы так, чтобы функция  $T_0$  не претерпевала разрывов в точках соприкосновения ребер. Этот вид граничного условия иногда называют условием первого рода.

Условие заданного теплового потока описывается следующими соотношениями:

$$F_n = -q_s \text{ — на внешних границах,}$$

$$F_n^+ - F_n^- = -q_s \text{ — на внутренних границах,}$$

где  $F_n$  — нормальная компонента вектора плотности теплового потока, индексы "+" и "-" означают "слева от границы" и "справа от границы" соответственно.

Для внутренней границы  $q_s$  означает поверхностную мощность источника, для внешней — известное значение теплового

потока через границу. Этот вид граничного условия иногда называют граничным условием второго рода.

Если  $q_s$  равно нулю, граничное условие называется однородным. Однородное условие второго рода на внешней границе означает отсутствие теплового потока через указанную поверхность. Однородное условие второго рода является естественным, оно устанавливается по умолчанию на всех тех сторонах, составляющих внешнюю границу, где явно не указано иное граничное условие. Это вид граничного условия употребляется в двух случаях: на плоскости симметрии задачи (если ввиду симметричности геометрии и источников задача решается только на части области), а также для описания адиабатической границы.

Если неоднородное граничное условие второго рода задано на внешнем ребре, являющемся следом плоскости симметрии задачи, истинное значение мощности тепловыделения следует разделить пополам.

Граничное условие конвекции может быть задано на внешней границе модели. Оно описывает конвективный теплообмен и определяется следующим образом:

$$F_n = \alpha(T - T_0),$$

где  $\alpha$  - коэффициент теплоотдачи,  $T_0$  - температура окружающей среды. Параметры  $\alpha$  и  $T_0$  могут меняться от ребра к ребру. Граничное условие этого типа иногда называют граничным условием третьего рода.

Граничное условие радиации может быть задано на внешней границе модели. Оно описывает радиационный теплообмен и определяется следующим образом:

$$F_n = k_{SB} \beta (T^4 - T_0^4),$$

где  $k_{SB}$  - константа Стефана-Больцмана,  $\beta$  - коэффициент поглощения поверхности,  $T_0$  - температура поглощающей среды. Параметры  $\beta$  и  $T_0$  могут меняться от ребра к ребру.

Замечание. Чтобы задача расчета температурного поля была поставлена корректно, необходимо поставить хотя бы в одной вершине условие заданной температуры, либо хотя бы на одном ребре условие конвекции или радиации.

Граничное условие равной температуры может быть использовано для описания тел с очень высокой по сравнению с окружающими телами теплопроводностью. Внутренность такого тела может быть исключена из расчета температурного поля при условии описания всей его поверхности как поверхности равной температуры. Данное условие отличается от условия первого рода

тем, что температура на описываемой поверхности не известна заранее.

Замечание. Ребро, описанное условием равной температуры, не должно соприкасаться с любым ребром, где температура задана явно. В последнем случае ребро с условием равной температуры должно быть переопределено при помощи граничного условия первого рода с подходящим значением температуры.

### *Вычисляемые физические величины в задачах температурного поля*

При анализе результатов решения задачи нахождения температурного поля ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Температура  $T$ .
- Вектор плотности теплового потока  $\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{grad}T$ :

$$F_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}, \quad F_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \quad \text{- в плоском случае;}$$

$$F_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad F_r = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{- в осесимметричном случае.}$$

Интегральные величины:

- Поток тепла через заданную поверхность

$$\Phi = \int_S \mathbf{F} \mathbf{n} ds,$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности. Поверхность интегрирования задается контуром в плоскости модели, состоящим из отрезков и дуг окружностей.

### **Варианты заданий**

Рассчитать температурное поле в жилом помещении и найти локальные значения температуры  $T$ .

Предмет моделирования: жилое помещение с отопительными приборами: камином и газовой плитой.

Тип задачи: нелинейная плоскопараллельная задача теплопередачи.

Геометрия модели: в соответствии с вариантом.

Последовательность выполнения:

1. Рассчитать температурное поле в жилом доме.

2. Просмотреть локальные значения температуры  $T$  в точках (0.1,0.1), (0.5,0.5), (0.7,0.2), (0.0,1.0), (0.85,0.35), (0,0), (0.05,0.65), (0.34,0.67), (0.12, 0.78).

3. Реализовать пункты 1-2 со следующими изменениями:

- для варианта 1 - открыть наружную и внутренние двери;
- для вариантов 2-3 - открыть наружные двери;
- для варианта 4 - отключить один камин и одну двухконфорочную газовую плиту;
- для варианта 5 - открыть все окна и двери;
- для варианта 6 - открыть внутренние двери;
- для варианта 7 - открыть наружные двери и отключить один из каминов;
- для варианта 8 - открыть окна и наружную дверь;
- для варианта 9 - открыть все двери;
- для варианта 10 - открыть все окна и двери.

Замечания:

- Для всех вариантов размеры помещения по внешнему периметру составляют 1м×1м.
- Для вариантов 2, 5, 6, 7, 9 размеры камина (в см) приведены на рис.1.3 а).
- Для вариантов 1, 3, 4 размеры углового камина (в см) приведены на рис.1.3 б).
- Для вариантов 8, 9, 10 размеры четырехконфорочной плиты (в см) приведены на рис.1.3 в).
- Для вариантов 1, 2, 4, 7 размеры двухконфорочной плиты (в см) приведены на рис.1.3 г).

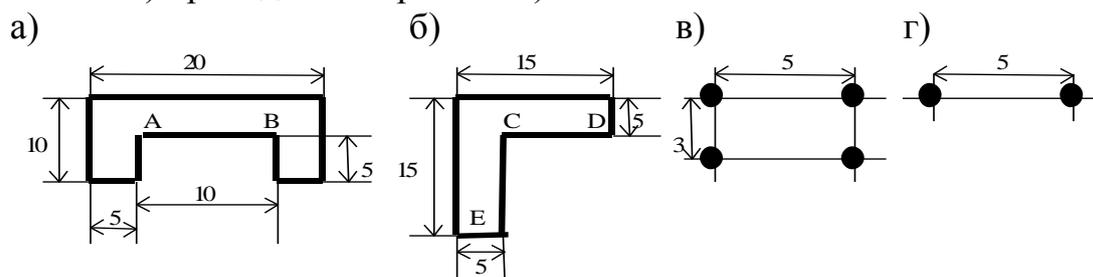
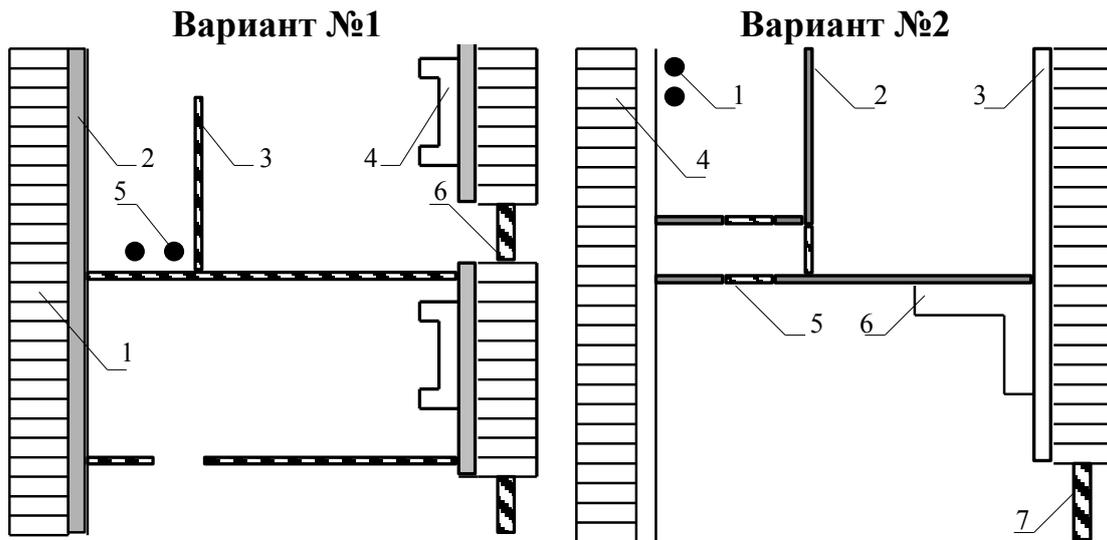


Рис.1.3

- Для вариантов 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10 газовые конфорки в геометрической модели задавать в виде вершин с температурой  $T=500$  К каждая.
- Для вариантов 2, 5, 6, 7, 9 за источник тепла принять ребро АВ камина с температурой  $T=500$  К (рис.1.3 а).
- Для вариантов 1, 3, 4 за источник тепла принять ребра CD и CE углового камина с температурой  $T=500$  К (рис.1.3 б).

- Для всех вариантов температуру воздуха вне дома принять равной 243 К.
- Для всех вариантов значения коэффициентов теплопроводности материалов указаны в Вт/(м·К).
- Для всех вариантов зависимость коэффициента теплопроводности воздуха от температуры указана в таблице 1.1 (см. **Пример выполнения задания**).

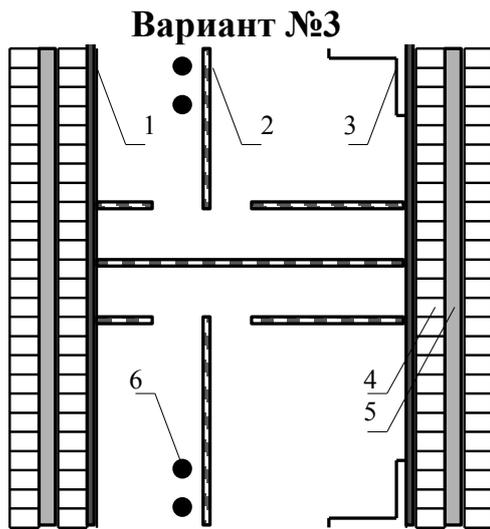


*Условные обозначения:*

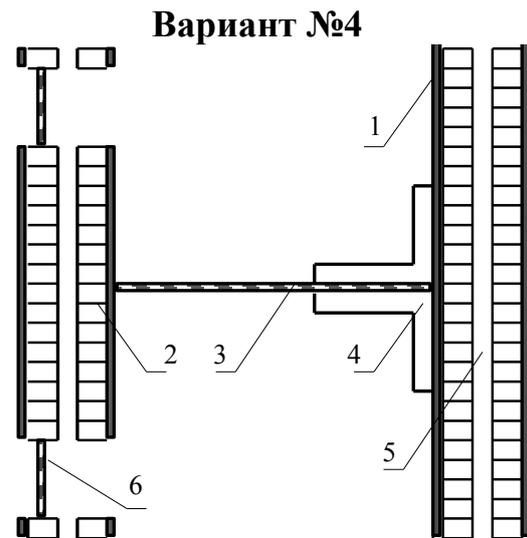
1. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
2. Обшивка из ДВП  $\lambda=0,72$
3. Перегородка из дерева  $\lambda_x=0,2;$   
 $\lambda_y=0,35$
4. Камин из огнеупорной глины  
 $\lambda=1,04$
5. Газовая конфорка
6. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2;$   
 $\lambda_y=0,35$

*Условные обозначения:*

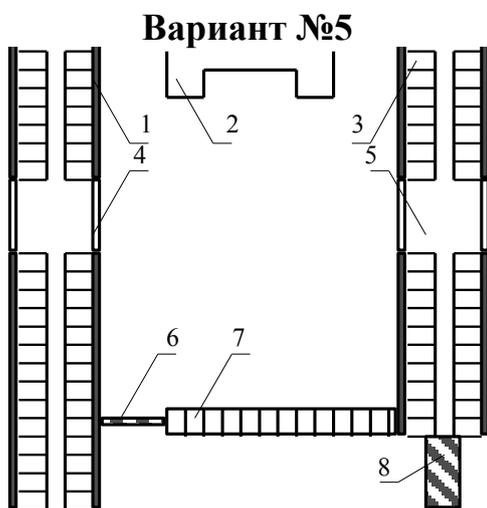
1. Газовая конфорка
2. Перегородка из ДВП  $\lambda=0,72$
3. Штукатурка  $\lambda=0,7$
4. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
5. Дверь из дерева  $\lambda_x=0,2;$   $\lambda_y=0,35$
6. Камин из огнеупорной глины  
 $\lambda=1,04$
7. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2;$   
 $\lambda_y=0,35$



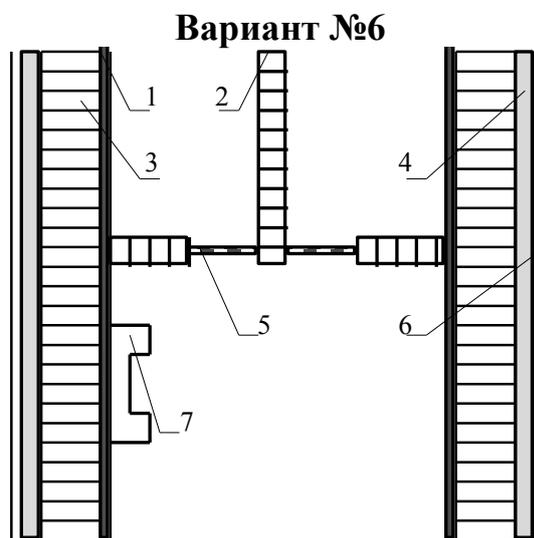
- Условные обозначения:**
1. Обшивка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
  2. Перегородка из ДВП  $\lambda=0,72$
  3. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$
  4. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
  5. Бетонная прослойка  $\lambda=1,04$
  6. Газовая конфорка



- Условные обозначения:**
1. Обшивка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
  2. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
  3. Перегородка из ДВП  $\lambda=0,72$
  4. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$
  5. Воздушная прослойка
  6. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$



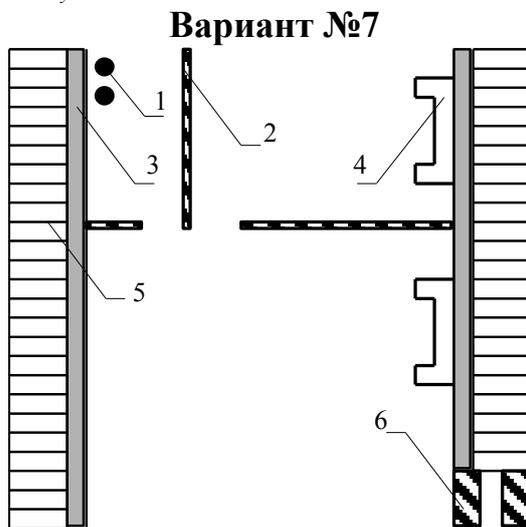
- Условные обозначения**
1. Обшивка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
  2. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$
  3. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
  4. Стекло  $\lambda=0,96$
  5. Воздушная прослойка



- Условные обозначения**
1. Обшивка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
  2. Кирпичная перегородка  $\lambda=0,81$
  3. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
  4. Прослойка из бетона  $\lambda=1,28$
  5. Дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
  6. Штукатурка  $\lambda=1,2$

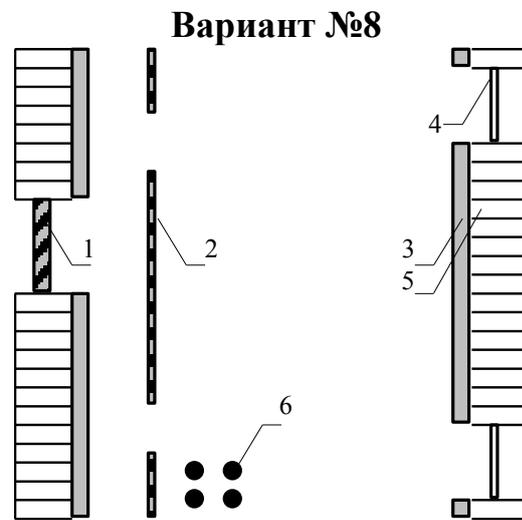
- 6. Дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 7. Кирпичная перегородка  $\lambda=0,81$
- 8. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$

- 7. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$



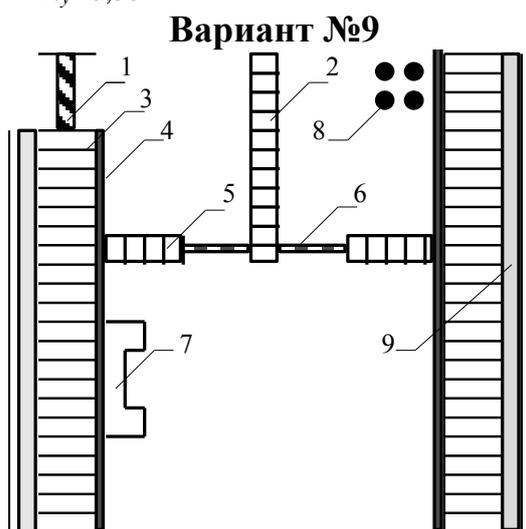
*Условные обозначения:*

- 1. Газовая конфорка
- 2. Перегородка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 3. Штукатурка  $\lambda=1,2$
- 4. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$
- 5. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
- 6. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$



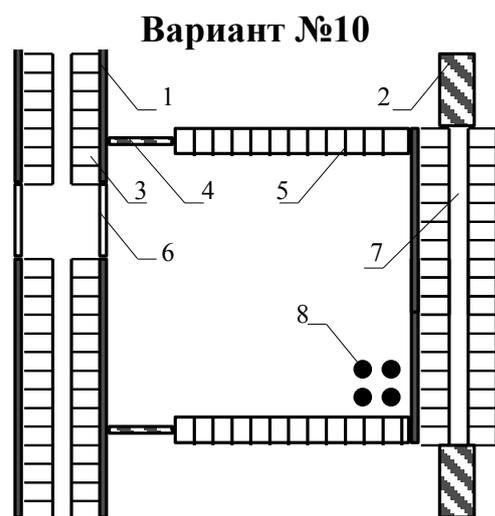
*Условные обозначения:*

- 1. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 2. Перегородка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 3. Штукатурка  $\lambda=1,2$
- 4. Стекло  $\lambda=0,96$
- 5. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$
- 6. Газовая конфорка



*Условные обозначения:*

- 1. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 2. Кирпичная перегородка  $\lambda=0,81$
- 3. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$



*Условные обозначения:*

- 1. Обшивка из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 2. Наружняя дверь из дерева  $\lambda_x=0,2$ ;  $\lambda_y=0,35$
- 3. Кирпичная кладка  $\lambda=0,81$

4. Обшивка из ДВП  $\lambda=0,72$
5. Кирпичная перегородка  $\lambda=0,81$
6. Дверь из дерева  $\lambda_x=0,2; \lambda_y=0,35$
7. Камин из огнеупорной глины  $\lambda=1,04$
8. Газовая конфорка
9. Прослойка из бетона  $\lambda=1,04$

4. Дверь из дерева  $\lambda_x=0,2; \lambda_y=0,35$
5. Кирпичная перегородка  $\lambda=0,81$
6. Стекло  $\lambda=0,96$
7. Воздушная прослойка
8. Газовая конфорка

### Пример выполнения задания

Предмет моделирования: жилое помещение с отопительными приборами: камином и газовой плитой.

Тип задачи: нелинейная плоскопараллельная задача теплопередачи.

Геометрия модели: рис. 1.4.

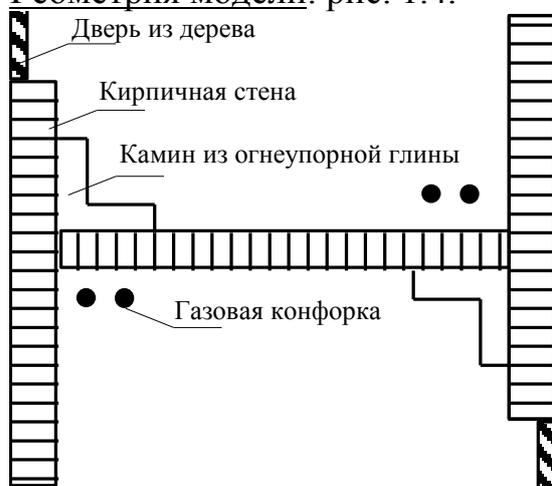


Рис. 1.4

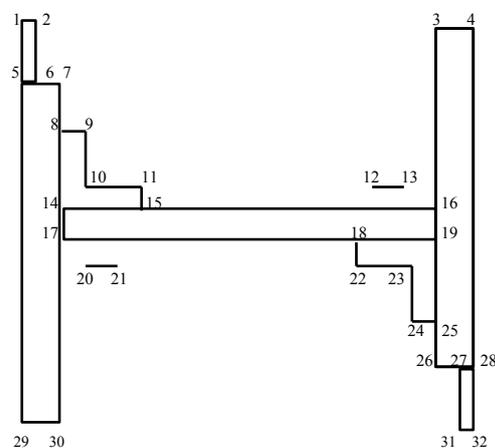


Рис. 1.5

Дано:

- Коэффициент теплопроводности кирпича  $\lambda=0,67$  Вт/(м·К), огнеупорной глины  $\lambda=1,64$  Вт/(м·К), дерева  $\lambda_x=0,2$  Вт/(м·К),  $\lambda_y=0,35$  Вт/(м·К);
- Зависимость коэффициента теплопроводности воздуха от температуры приведена в табл.1.1:

Табл.1.1

$T, K$	243	253	263	273	283	293	303	313	323	333	343
$\lambda \cdot 10^2, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	2.20	2.28	2.36	2.44	2.51	2.59	2.67	2.76	2.83	2.90	2.96
$T, K$	353	363	373	393	413	433	453	473	523	573	623
$\lambda \cdot 10^2, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	3.05	3.13	3.21	3.34	3.49	3.64	3.78	3.93	4.27	4.60	4.91

- Температура вне помещения - 243 К;
- Температура камина - 500 К, газовой конфорки - 500 К.

*Чтобы создать новую задачу:*

1. Выберите команду *Создать* из меню *Файл*. Появится окно для выбора типа документа ELCUT, который Вы хотите создать.

2. Щелкните мышью строку *задача ELCUT* и затем нажмите *ОК*. Появится новое окно, приглашающее ввести имя и расположение новой задачи.

3. При необходимости перейдите в нужную папку при помощи списка *Создать в папке*.

4. В поле *Имя файла* введите *Пример*. Нажмите *Далее*.

*Чтобы ввести свойства задачи:*

1. В списке *Тип задачи* выберите *Температурное поле*.

2. В пункте *Класс модели* выберите опцию *Плоская*.

3. Имеет смысл принять предложенные системой имена файлов геометрии модели (*Пример.mod*) и физических свойств (*Пример.dms*).

4. В пункте *Расчет* выберите *Обычный*. Нажмите кнопку *Далее*.

5. В пункте *Единицы измерения* выберите *Метры*.

6. В пункте *Система координат* выберите *Декартовы координаты*.

7. Нажмите кнопку *Готово*, и новая задача будет создана.

ELCUT откроет новое окно для задачи *Пример.rbt*. В меню *Файл* выберите команду *Сохранить*, чтобы сохранить описание задачи в файле.

*Чтобы начать работу с моделью:*

1. В меню *Правка* выберите *Геометрическая модель* (или дважды щелкните элемент *Пример.mod* в дереве задачи, или выберите *Открыть* в контекстном меню, возникающем при щелчке правой кнопкой мыши на этом элементе дерева).

2. Подтвердите создание новой модели. Откроется окно работы с моделью. Для большего удобства Вы можете развернуть его на весь экран.

3. Теперь можно заняться описанием геометрии.

*Чтобы создать ребра, образующие модель:*

1. Нажмите клавишу *INS* (или команду *Режим вставки* в меню *Правка*, или команду *Вставка вершин/ребер* в контекстном меню, или соответствующую кнопку на панели инструментов), чтобы перевести окно модели в режим вставки.

2. Щелкните мышью в точке (0.0;0.0) и перетащите ее в точку (0.1;0.0), чтобы создать ребро 29-30 (см. рис. 1. ). Ребро появится на экране сразу, как только Вы отпустите кнопку мыши.

3. Повторите предыдущий шаг для точек, указанных в табл.1.2.:

Табл.1.2

Начальная точка	Конечная точка	Ребро	Часть дома
(0.0;0.0)	(0.0;0.9)	5-29	Кирпичные наружные стены
(0.1;0.0)	(0.1;0.9)	7-30	
(0.0;0.9)	(0.1;0.9)	5-7	
(0.9;0.1)	(1.0;0.1)	26-28	
(0.9;0.1)	(0.9;1.0)	3-26	

(0.9;1.0) (1.0;0.1)	(1.0;1.0) (1.0;1.0)	3-4 4-28	
(0.0;0.9) (0.0;1.0) (0.05;1.0) (0.95;0.0) (0.95;0.0) (1.0;0.0)	(0.0;1.0) (0.05;1.0) (0.05;0.9) (1.0;0.0) (0.95;0.1) (1.0;0.1)	1-5 1-2 2-6 31-32 27-31 28-32	Входные двери из дерева
(0.1;0.45) (0.1;0.55)	(0.9;0.45) (0.9;0.55)	17-19 14-16	Кирпичная перегородка
(0.15;0.40) (0.80;0.60)	(0.20;0.40) (0.85;0.60)	20-21 12-13	Газовые плиты
(0.25;0.55) (0.25;0.60) (0.15;0.60) (0.15;0.70) (0.9;0.3) (0.85;0.3) (0.85;0.4) (0.75;0.4)	(0.25;0.60) (0.15;0.60) (0.15;0.70) (0.1;0.70) (0.85;0.3) (0.85;0.4) (0.75;0.4) (0.75;0.45)	11-15 10-11 9-10 8-9 24-25 23-24 22-23 18-22	Камины из огнеупорной глины

4. Безразлично, в каком порядке создаются ребра, также не имеет значения направление ребер. Если нужная точка находится за пределами экрана, используйте полосу прокрутки. Не беспокойтесь о возможных ошибках, ненужные вершины и ребра можно удалить позже.

5. Нажмите клавишу *INS* еще раз, чтобы завершить режим вставки.

6. Если Вы случайно создали лишние ребра или вершины, их можно удалить сейчас: удерживая клавишу *CTRL*, выделите щелчком мыши удаляемые объекты. Если Вы выделили ненужный объект, щелкните его мышью еще раз, чтобы снять выделение. Отпустите клавишу *CTRL*. Нажмите клавишу *DEL* (или выберите команду *Удалить выделенное* из меню *Правка* или контекстного меню). Удаляемые объекты исчезнут с экрана.

7. Геометрическая модель задачи создана.

Для описания свойств материалов, источников поля и граничных условий следует присвоить метки геометрическим объектам. Задача содержит четыре материала с различными свойствами: воздух, дерево, кирпич, огнеупорная глина, две двухконфорочные газовые плиты и два камина. Выберем следующие метки для соответствующих объектов (рис.1.5 ) по табл.1.3:

Табл.1.3

Метка	Объект	Геометрический объект
Кирпич	Блок	Прямоугольник с вершинами в точках 5, 7, 30, 29 Прямоугольник с вершинами в точках 3, 4, 28, 26 Прямоугольник с вершинами в точках 14, 16, 19, 17
Дерево	Блок	Прямоугольник с вершинами в точках 1, 2, 6, 7 Прямоугольник с вершинами в точках 31, 32, 28, 27
Огнеупорная	Блок	Многоугольник с вершинами в точках 8, 9, 10, 11, 15, 14

глина		Многоугольник с вершинами в точках 18, 19, 25, 24, 23, 22
Воздух	Блок	Многоугольник с вершинами в точках 2, 3, 16, 15, 11, 10, 9, 8, 7, 6 Многоугольник с вершинами в точках 30, 17, 18, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 31
Температура камина	Ребро	Отрезок с вершинами в точках 9, 10 Отрезок с вершинами в точках 10, 11 Отрезок с вершинами в точках 22, 23 Отрезок с вершинами в точках 23, 24
Температура вне дома	Ребро	Отрезок с вершинами в точках 1, 5 Отрезок с вершинами в точках 5, 29  Отрезок с вершинами в точках 4, 28 Отрезок с вершинами в точках 28, 32
Конфорка	Вершина	Точка 12, 13, 20, 21

*Для присвоения меток блокам:*

1. Дважды щелкните мышью внутри блока. Блок станет выделенным и появится диалоговое окно *Свойства* выделенных объектов.
2. В поле *Метка* введите соответствующую метку.
3. Нажмите *ОК*, чтобы завершить диалог.
4. Повторите эти действия для присвоения метки всем блокам.

Метки ребер используются для задания граничных условий на внешних и внутренних границах модели. В нашем случае нужно задать граничное условие Дирихле на внешней границе модели - температуру вне дома и на внутренней границе модели - температуру от камина.

*Для присвоения меток ребрам:*

1. Укажите мышью четыре ребра 1-5, 5-29, 4-28, 28-32, которые образуют внешнюю границу модели, удерживая нажатой клавишу *CTRL*. Эти четыре выделенных ребра будут подсвечены. Если Вы случайно выделили лишнюю вершину, ребро или блок, щелкните его еще раз, чтобы снять выделение.
2. Щелкните правой кнопкой мышью в пределах выделенного, чтобы вывести контекстное меню, не меняя выделения объектов.
3. В контекстном меню выберите *Свойства* и присвойте метку *Температура вне дома* выделенным ребрам. Нажмите *ОК*, чтобы завершить диалог.
4. Повторите те же действия с ребрами 9-10, 10-11, 22-23, 23-24 для присвоения им метки *Температура камина*.

Метки вершин используются для задания точечных источников тепла. В нашем случае - это газовые конфорки.

*Для присвоения меток вершинам:*

1. Укажите мышью четыре вершины 12, 13, 20, 21, удерживая нажатой клавишу *CTRL*. Эти четыре выделенные вершины будут подсвечены.
2. Щелкните правой кнопкой мышью в пределах выделенного, чтобы вывести контекстное меню, не меняя выделения объектов.

3. В контекстном меню выберите *Свойства* и присвойте метку *Конфорка* выделенным вершинам. Нажмите *ОК*, чтобы завершить диалог.

Присвоение меток геометрическим объектам закончено.

Чтобы определить густоту сетки конечных элементов (в ELCUT в качестве конечных элементов используются треугольники), следует задать шаг дискретизации в нескольких вершинах, блоках, ребрах модели. Можно предположить существенную неоднородность температурного поля вокруг газовых конфорок и каминов, поэтому сетка здесь должна быть максимальной густоты. Однако, не следует забывать об ограничении на число узлов сетки для студенческой версии системы ELCUT (число узлов не должно превышать 200).

*Чтобы задать значения шага дискретизации:*

1. Выделите вершины 12, 13, 20, 21 и выберите команду *Свойства* в контекстном меню.
2. Нажмите кнопку *Ручной (шаг дискретизации)* и введите 0.1.
3. Нажмите *ОК* для завершения диалога.
4. Повторите эти действия, чтобы присвоить шаг 0.3 ребрам 9-10, 10-11, 22-23, 23-24, и шаг 0.4 блокам *Кирпич, Воздух, Дерево*.
5. В меню *Правка* выберите команду *Построить сетку* и, затем, *Во всех блоках*, чтобы построить сетку во всех блоках одновременно.

Теперь модель готова. Чтобы сохранить ее на диске, выберите команду *Сохранить* в меню *Файл*.

*Работа со свойствами материалов и граничными условиями.*

Возможно, Вы обратили внимание, что метки блоков, ребер и вершин появляются в окне задачи по мере того, как Вы определяете их в модели. Значки слева от этих меток содержат вопросительный знак, что означает, что эти метки упомянуты в модели, но их свойства еще не определены. Теперь мы займемся заданием физических свойств для меток.

*Чтобы ввести свойства для меток блоков Кирпич, Огнеупорная глина, Воздух, Дерево:*

1. Дважды щелкните на метке *Кирпич* (или выберите *Свойства* в ее контекстном меню).
2. Введите  $\lambda_x=0.67$ ,  $\lambda_y=0.67$  в графе *Теплопроводность*. Нажмите *ОК*.
3. Дважды щелкните на метке *Огнеупорная глина*.
4. Введите  $\lambda_x=1.04$ ,  $\lambda_y=1.04$  в графе *Теплопроводность*. Нажмите *ОК*.
5. Дважды щелкните на метке *Дерево*.
6. Включите флажок *Анизотропный материал*.
7. Введите  $\lambda_x=0.2$ ,  $\lambda_y=0.35$  в графе *Теплопроводность*. Нажмите *ОК*.
8. Дважды щелкните на метке *Воздух*.

9. Включите флажок *Нелинейный материал*.
10. В появившемся окне в поле  $T(K)$  введите значение самой низкой температуры для задачи. Это 243 К. В поле  $\lambda$  (Вт/(м·К)) введите соответствующее этой температуре значение коэффициента теплопроводности сухого воздуха из табл.1.1. Нажмите кнопку *Добавить*.
11. Повторите предыдущий шаг для температур 244-523 К, используя табл.1.1.
12. В результате в левой части окна появится график зависимости коэффициента теплопроводности воздуха от температуры. Нажмите *ОК*.

*Чтобы ввести свойства для меток ребер Температура вне дома, Температура камина:*

1. Выделите имя метки *Температура вне дома* в ветви *Метки ребер* и дважды щелкните ее мышью или выберите *Свойства* в ее контекстном меню. Появится диалоговое окно для ввода свойств метки ребра.
2. Включите флажок *Температура  $T=T_0$* . В полях ввода задайте  $T_0=243$  К. Нажмите *ОК*.
3. Выделите имя метки *Температура камина* в ветви *Метки ребер* и дважды щелкните ее мышью или выберите *Свойства* в ее контекстном меню.
4. Включите флажок *Температура  $T=T_0$* . В полях ввода задайте  $T_0=500$  К. Нажмите *ОК*.

*Чтобы ввести свойства для метки вершины Конфорка:*

1. Выделите имя метки *Конфорка* в ветви *Метки вершин* и дважды щелкните ее мышью или выберите *Свойства* в ее контекстном меню. Появится диалоговое окно для ввода свойств метки вершины.
2. Включите флажок *Температура  $T=T_0$* . В поле ввода задайте  $T_0=500$ . Нажмите *ОК*.

Теперь все данные, необходимые для решения задачи, введены.

*Чтобы решить задачу и посмотреть результаты решения:*

1. В меню *Правка* выберите *Решить задачу*. Вам следует также согласиться с предложением системы сохранить физические свойства в файле. Нажмите *ОК*.
2. В меню *Вид* выберите *Картина поля*. В появившемся диалоговом окне включите флажок *Цветная карта* и выберите опцию *Температура*. Нажмите *ОК*.
3. В окне *Результаты расчета* отобразится карта распределения температуры (рис.1.6).

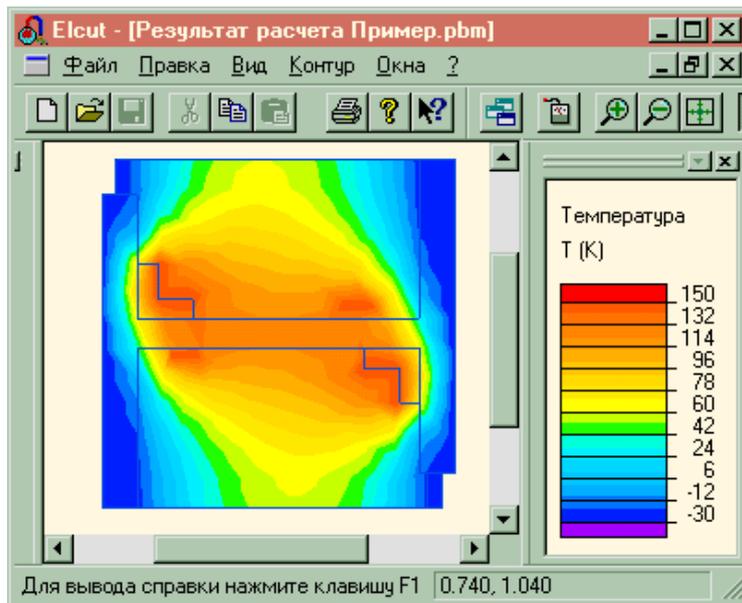


Рис.1.6

4. Для просмотра локальных значений температуры  $T$  в меню *Вид* выберите *Локальные значения*. Укажите на рисунке модели координаты нужной точки. В результате появятся локальные значения требуемых величин (рис.1.7).

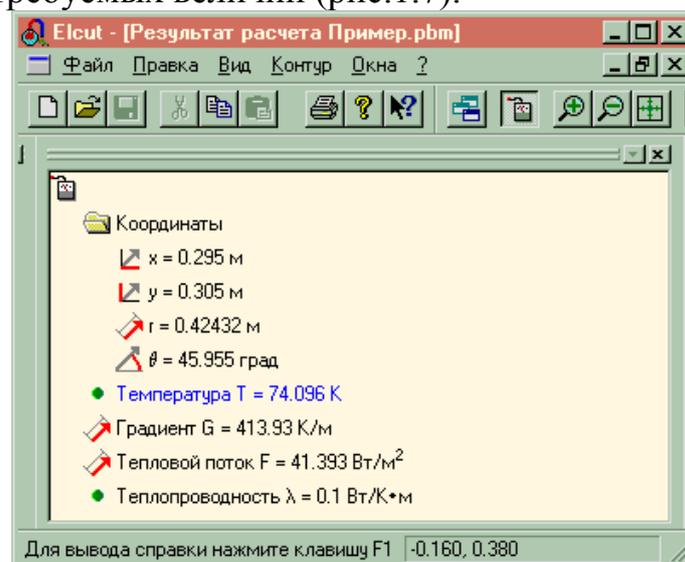


Рис.1.7

## 1.4. Лабораторная работа №2.

### Решение задач теории упругости методом конечных элементов

**Цель работы:** приобретение навыков в решении задач теории упругости методом конечных элементов с использованием персонального компьютера.

**Литература:** [7], [10], [14].

#### Краткие сведения из теории

##### *Постановка задачи*

ELCUT позволяет решать задачи теории упругости в постановках плоских напряжений, плоских деформаций и осесимметричного напряженного состояния с изотропными или ортотропными свойствами материалов. Задача плоских напряжений подходит для анализа структур, тонких по глубине, которые нагружены в плоскости модели. Напряжение в направлении, нормальном к плоскости модели, предполагается отсутствующим. Задача плоских деформаций предполагает отсутствие деформаций вне плоскости модели. Эта задача подходит для моделирования объектов с весьма большой толщиной в направлении, нормальном к плоскости модели.

Во всех постановках поле перемещений однозначно определяется двумя компонентами вектора перемещений  $\delta$  в каждой точке:

- $\delta = (\delta_x, \delta_y)^T$  – в плоских задачах;
- $\delta = (\delta_z, \delta_r)^T$  – в осесимметричных задачах.

В обеих плоских постановках рассматривается только по три компоненты деформаций и напряжений. Деформация связана с перемещением соотношением:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})^T = \left( \frac{\partial \delta_x}{\partial x}, \frac{\partial \delta_y}{\partial y}, \frac{\partial \delta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta_y}{\partial x} \right)^T.$$

Соответствующее ей напряжение выражается как

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T.$$

В осесимметричном случае радиальное перемещение приводит к деформации  $\varepsilon_\theta$  в направлении, перпендикулярном плоскости модели, поэтому выражение для полной деформации имеет вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_z, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{rz})^T = \left( \frac{\partial \delta_z}{\partial z}, \frac{\partial \delta_r}{\partial r}, \frac{\delta_r}{r}, \frac{\partial \delta_z}{\partial r} + \frac{\partial \delta_r}{\partial z} \right)^T.$$

Соответствующее ей напряжение выражается как

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz})^T.$$

Уравнения статического равновесия имеют следующий вид:  
для плоскопараллельных задач

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + P_x = 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + P_y = 0, \end{cases}$$

для осесимметричных задач:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial (r\sigma_r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + P_r = 0; \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r\tau_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + P_z = 0, \end{cases}$$

где  $P_x$ ,  $P_y$  и  $P_r$ ,  $P_z$  - компоненты вектора плотности объемной силы.

Соотношение между напряжениями и деформациями при упругом поведении материалов выражается зависимостью:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0),$$

где  $\mathbf{D}$  - матрица упругости,  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$  - начальная термическая деформация, вызванная перепадом температур. Вид матрицы  $\mathbf{D}$  зависит от применяемой постановки. Матрица упругости для

- плоского напряженного состояния (изотропный материал):

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(1-\nu) \end{pmatrix},$$

- плоского напряженного состояния (ортотропный материал):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix}^{-1},$$

- плоского деформированного состояния (изотропный материал):

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.5(1-2\nu)}{(1-\nu)} \end{pmatrix},$$

- плоского деформированного состояния (ортотропный материал):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} - \frac{\nu_{xx}^2}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_y} - \frac{\nu_{xx}\nu_{yx}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_y} - \frac{\nu_{xx}\nu_{yx}}{E_x} & \frac{1}{E_y} - \frac{\nu_{yx}^2}{E_x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix}^{-1},$$

- осесимметричной задачи (изотропный материал):

$$\mathbf{D} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{0.5(1-2\nu)}{(1-\nu)} \end{pmatrix},$$

- осесимметричной задачи (ортотропный материал):

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_z} - \frac{\nu_{zr}^2}{E_r} - \frac{\nu_{z\theta}^2}{E_\theta} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{zr}}{E_r} & \frac{1}{E_r} & -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} & 0 \\ -\frac{\nu_{z\theta}}{E_\theta} & -\frac{\nu_{r\theta}}{E_\theta} & \frac{1}{E_\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{pmatrix}^{-1}.$$

В этих формулах  $E$  - модуль Юнга изотропного материала;  $E_x$ ,  $E_y$  или  $E_r$ ,  $E_z$ ,  $E_\theta$  - модули Юнга в направлении соответствующих

осей ортотропного материала;  $\nu$  - коэффициент Пуассона изотропного материала;  $\nu_{yx}, \nu_{zx}, \nu_{zy}$  или  $\nu_{rz}, \nu_{\theta z}, \nu_{\theta r}$  - коэффициенты Пуассона для указанных пар осей ортотропного материала;  $G_{xy}$  или  $G_{zr}$  - модуль сдвига.

### *Температурные деформации в задачах упругости*

Температурная (начальная) деформация материала определяется коэффициентами линейного расширения и изменением температуры относительно температуры недеформированного состояния. Составляющие начальной деформации определяются соотношением для

- плоского напряженного состояния (изотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha, \alpha, 0)^T \Delta T;$$

- плоского напряженного состояния (ортотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha_x, \alpha_y, 0)^T \Delta T;$$

- плоского деформированного состояния (изотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (1+\nu)(\alpha, \alpha, 0)^T \Delta T;$$

- плоского деформированного состояния (ортотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha_x + \nu_{xx}\alpha_x, \alpha_y + \nu_{yx}\alpha_x, 0)^T \Delta T;$$

- осесимметричной задачи (изотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha, \alpha, \alpha, 0)^T \Delta T;$$

- осесимметричной задачи (ортотропный материал):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = (\alpha_z, \alpha_r, \alpha_\theta, 0)^T \Delta T;$$

где  $\alpha$  - коэффициент линейного расширения в изотропном материале;  $\alpha_x, \alpha_y$  или  $\alpha_z, \alpha_r, \alpha_\theta$  - коэффициенты линейного расширения в направлении соответствующих осей в ортотропном материале;  $\Delta T$  - перепад температуры между деформированным и недеформированным состоянием.

### *Внешние силы в задачах упругости*

ELCUT позволяет учитывать сосредоточенные, поверхностные и объемные силы, действующие на модель.

Сосредоточенные силы задаются в вершинах в форме двух компонент вектора.

Поверхностные силы задаются на ребрах модели в форме двух компонент вектора или величиной нормального давления.

Объемные силы задаются в пределах блока в форме двух компонент вектора. Каждая компонента вектора объемной силы может быть задана линейной функцией координат. Это применяется, например, для учета центробежных сил в осесимметричных задачах.

Давление также может быть задано линейной функцией, к примеру, для моделирования гидростатического давления.

Замечание. В плоских задачах сосредоточенные силы задаются на единицу толщины моделируемого объекта, тогда как в осесимметричных задачах задается непосредственно сила, независимо от того, приложена она в точке (если вершина, в которой задана сила, находится на оси вращения) или распределена по окружности (вершина не лежит на оси).

Любая поверхностная сила, действующая по нормали к стороне в каждой ее точке, может быть описана как "давление". При этом на сторонах, составляющих внешнюю границу области, положительным считается давление, направленное извне вовнутрь области, а на внутренних сторонах - вправо при движении от начала к концу стороны. (В момент создания сторона получает естественную ориентацию, определяемую порядком указания вершин, являющихся ее концами).

#### *Условия закрепления в задачах упругости*

Жесткое закрепление по любой из координат, или по обеим сразу, может быть задано в любой вершине или вдоль любой стороны области. Фиксированное перемещение вдоль линий закрепления описывается линейной функцией координат.

Условие пружинного подвеса описывает вершину, подвергающуюся действию силы, пропорциональной разнице между фактическим и начальным перемещением этой вершины. Оно характеризуется жесткостью пружины и начальным перемещением ее закрепленного конца.

Замечание. Для того, чтобы задача была сформулирована корректно, необходимо задать жесткое или пружинное закрепление таким образом, чтобы исключить любое перемещение модели и ее частей, не изменяющее энергии состояния. В плоских задачах такое закрепление должно ограничивать сдвиг всей модели по осям  $x$  и  $y$ , а также поворот; в осесимметричных задачах достаточно ограничить сдвиг параллельно оси  $z$ .

#### *Вычисляемые физические величины*

При анализе результатов решения задач теории упругости ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами:

Локальные величины:

- Модуль вектора перемещения

$$|\delta| = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2} \text{ или } |\delta| = \sqrt{\delta_z^2 + \delta_r^2}.$$

- Максимальное и минимальное главные напряжения в плоскости модели  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ .
- Нормальные и касательные напряжения по координатным осям  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  ( $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$  и  $\tau_{rz}$  в осесимметричном случае).
- Нормальное напряжение в направлении, перпендикулярном к плоскости модели ( $\sigma_z$  для плоских задач,  $\sigma_\theta$  - в осесимметричном случае). В задачах плоско-напряженного состояния эта величина равна нулю по определению.
- Критерий прочности фон Мизеса (потенциальная энергия формоизменения):

$$\sigma_e = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]},$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  - главные напряжения, упорядоченные по убыванию.

- Критерий прочности Трески (максимальное сдвиговое напряжение):

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3.$$

- Критерий прочности Мора-Кулона (модификация критерия Трески, учитывающая разное сопротивление материала растяжению и сжатию):

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3,$$

где  $\chi = \sigma_+ / \sigma_-$ ,  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  - предельно допустимые напряжения растяжения и сжатия соответственно.

- Критерий прочности Друкера-Прагера:

$$\sigma_i = (1 + \sqrt{\chi})\sigma_e - \frac{\sqrt{\chi} - \chi}{1 + \chi}\bar{\sigma} + \frac{1}{\sigma_-} \left( \frac{\sqrt{\chi} - \chi}{1 + \chi}\bar{\sigma} \right)^2, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

- Коэффициент запаса прочности по Хиллу для ортотропных материалов:

$$F.I. = \frac{\sigma_1^2}{X_1^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{X_2^2} + \frac{\tau_{12}}{S_{12}^2}.$$

где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\tau_{12}$  - вычисляемые напряжения в материале и,

$$X_1 = X_1^T, \text{ если } \sigma_1 > 0, \text{ и } X_1 = X_1^C, \text{ если } \sigma_1 < 0;$$

$$X_2 = X_2^T, \text{ если } \sigma_2 > 0, \text{ и } X_2 = X_2^C, \text{ если } \sigma_2 < 0;$$

$$S_{12} = S_{12}^+, \text{ если } \tau_{12} > 0, \text{ и } S_{12} = S_{12}^-, \text{ если } \tau_{12} < 0;$$

где  $X_1^T$ ,  $X_2^T$ ,  $X_1^C$ ,  $X_2^C$ ,  $S_{12}^+$ ,  $S_{12}^-$  - предельно допустимые напряжения растяжения, сжатия и сдвига.

Интегральные величины:

- Полная сила, действующая на заданный объем

$$\mathbf{F} = \oint \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds,$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  - тензор напряжений. Интеграл вычисляется по границе указанного объема, и  $\mathbf{n}$  означает единичный вектор внешней нормали.

- Полный вращающий момент относительно начала координат, действующий на заданный объем

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n})) ds,$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки интегрирования. Вектор вращающего момента параллелен оси  $z$  для плоской задачи и тождественно равен нулю в осесимметричном случае. Момент рассматривается относительно начала координат. Момент относительно любой другой точки может быть получен добавлением слагаемого  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}_0$ , где  $\mathbf{F}$  - суммарная сила и  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор точки, относительно которой вычисляется момент.

### Варианты заданий

#### Вариант №1.

Рассчитать напряженное состояние арки и основания.

Предмет моделирования: арка, закрепленная в упругом основании.

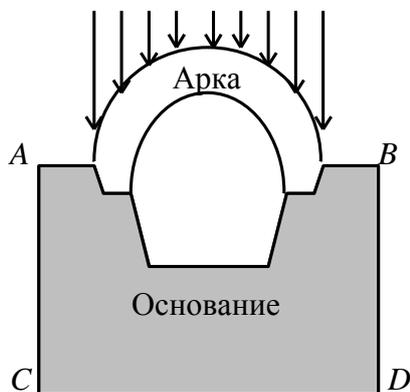


Рис.1.8

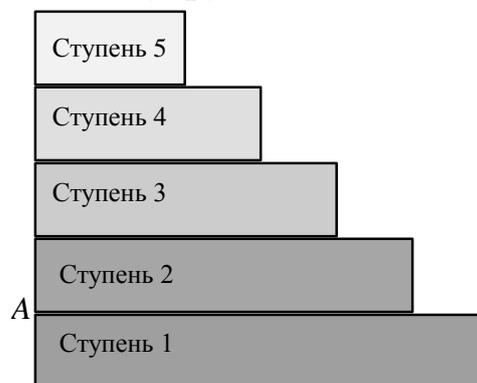


Рис.1.9

Тип задачи: расчет плосконапряженного состояния.

Геометрия модели: рис.1.8.

Дано:

- Модуль Юнга арки  $E = 295000000 \text{ Н/м}^2$ , основания  $E = 98000000 \text{ Н/м}^2$ .
- Коэффициент Пуассона арки  $\nu=0.17$ , основания  $\nu=0.17$ .

- Боковые стороны  $AC$  и  $BD$ , а также нижнюю часть  $CD$  основания считать закрепленными как по  $X$ , так и по  $Y$ .
- К верхней стороне арки приложена сила  $130000x+250000y$  ( $\text{Н/м}^2$ ).

### Вариант №2.

Рассчитать изменение напряжения  $\sigma_{yy}$  в точке  $A$  при постепенном возведении «лестницы».

Предмет моделирования: «лестница».

Тип задачи: расчет плосконапряженного состояния.

Геометрия модели: рис.1.9.

Дано:

- Модуль Юнга «лестницы»  $E = 295000000 \text{ Н/м}^2$ .
- Коэффициент Пуассона «лестницы»  $\nu=0.17$ .
- Нижнюю сторону «Ступени 1» считать закрепленной как по  $X$ , так и по  $Y$ .
- Со стороны «Ступени 2» на «Ступень 1» действует сила  $40 \text{ Н/м}^2$ , «Ступени 3» на «Ступень 2» -  $30 \text{ Н/м}^2$ , «Ступени 4» на «Ступень 3» -  $20 \text{ Н/м}^2$ , «Ступени 5» на «Ступень 4» -  $10 \text{ Н/м}^2$ .

### Вариант №3.

Заполнить таблицу зависимости перемещения  $\delta_y$  в точке  $A$  от давления на клин и его максимальной ширины  $m$  (см.табл.1.4).

Предмет моделирования: стальной клин, вбиваемый в деревянную пластину.

Тип задачи: расчет плосконапряженного состояния.

Геометрия модели: рис.1.10. Все размеры указаны в миллиметрах.

Табл.1.4

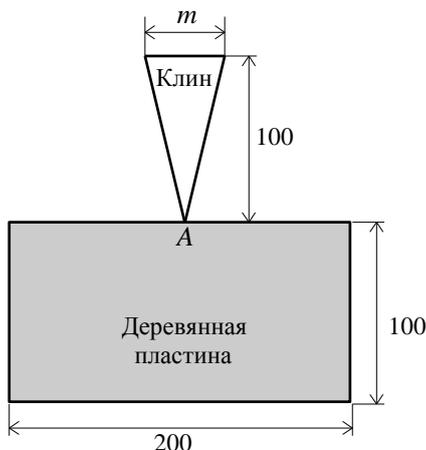


Рис.1.10

Ширина клина (мм)	10	20	30
Давление ( $\text{Н/м}^2$ )			
100			
200			
300			

Дано:

- Модуль Юнга стали  $E=20 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .

- Коэффициент Пуассона стали  $\nu=0.25$ , дерева  $\nu=0.13$ .
- Нижнюю сторону деревянной пластины закрепить как по  $X$ , так и по  $Y$ .

#### Вариант №4.

Построить график зависимости главной деформации  $\varepsilon_1$  от  $\Delta T$  (перепада температуры между деформированным и недеформированным состоянием) в точках  $A$  и  $B$ . Принять  $\Delta T = 100, 200, 300, 400, 500$  К.

Предмет моделирования: деревянный шар, покрытый стальной оболочкой.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.11. Все размеры указаны в миллиметрах.

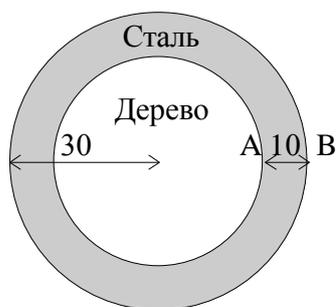


Рис.1.11

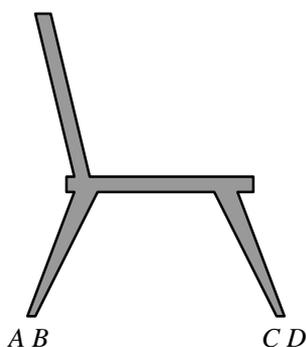


Рис.1.12

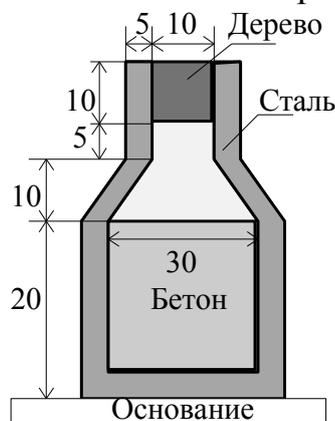


Рис.1.13

Дано:

- Модуль Юнга стали  $E=20 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.
- Коэффициент Пуассона стали  $\nu=0.25$ , дерева  $\nu=0.13$ .
- Коэффициент теплового расширения дерева  $\alpha=9.51$  1/К.
- Поскольку задача полностью симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , в модели представить только четверть шара. Отсутствующие части шара заместить граничными условиями закрепления границ разреза в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно.

#### Вариант №5.

Рассчитать деформированное состояние стула.

Предмет моделирования: деревянный «стул».

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.12.

Дано:

- Модуль Юнга дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.
- Коэффициент Пуассона дерева  $\nu=0.13$ .

- Нагрузка на сиденье стула  $100 \text{ Н/м}^2$ , на спинку стула  $100x+20y \text{ Н/м}^2$ .
- Нижние части «ножек стула» ( $AB$  и  $CD$ ) закрепить как по  $X$ , так и по  $Y$ .

### **Вариант №6.**

Определить температуру, при которой бетон вытолкнет деревянную пробку из бутылки.

Предмет моделирования: стальная «бутыль», наполненная бетоном.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.13. Все размеры указаны в сантиметрах.

Дано:

- Модуль Юнга стали  $E=20 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , бетона  $E=10^{10} \text{ Н/м}^2$ , дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ , основания  $E=9800000 \text{ Н/м}^2$ .
- Коэффициент Пуассона стали  $\nu=0.25$ , бетона  $\nu=0.2$ , дерева  $\nu=0.13$ , основания  $\nu=0.17$ .
- Коэффициент теплового расширения бетона  $\alpha=10 \text{ 1/К}$ , дерева  $\alpha=2.51 \text{ 1/К}$ .
- Нижнюю сторону основания считать закрепленной как по  $X$ , так и по  $Y$ .

### **Вариант №7.**

Определить температуру, при которой бетон вытолкнет деревянную пробку из бутылки.

Предмет моделирования: наклонные стропила на односкатной крыше.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.14 а), б), в).

Дано:

- Модуль Юнга дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ .
  - Коэффициент Пуассона дерева  $\nu=0.13$ .
  - Концы стропил, подкоса, шпренгеля, опирающиеся на наружные стены, считать закрепленными как по  $X$ , так и по  $Y$ .
  - Нагрузку на стропила принять равной  $30x + 40y \text{ (Н/м}^2\text{)}$ .
- : рассчитать напряженно-деформированное состояние наклонных стропил на односкатной крыше (рис.1.14 а); наклонных стропил, укрепленных подкосом (рис.1.14 б); укрепленных шпренгелем (рис.1.14 в).

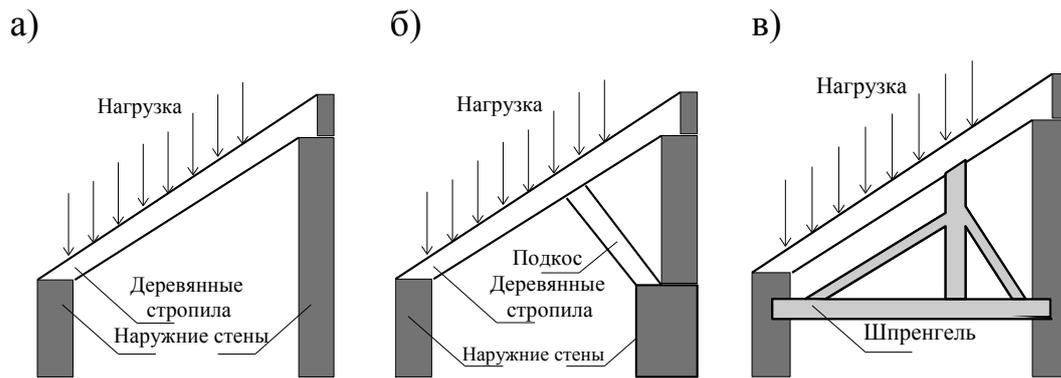


Рис.1.14

**Вариант №8.**

Рассчитать напряженно-деформированное состояние висячих стропил с затяжкой на двускатной крыше (рис.1.15 а); стропил с затяжкой и бабкой (рис.1.15 б); стропил с затяжкой, бабкой и подкосами (рис.1.15 в).

Предмет моделирования: висячие стропила на двускатной крыше.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис. 1.15 а), б), в).

Дано:

- Модуль Юнга дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.
- Коэффициент Пуассона дерева  $\nu=0.13$ .
- Концы стропил, затяжки, опирающиеся на наружные стены, считать закрепленными как по  $X$ , так и по  $Y$ .
- Нагрузку на стропила принять равной  $30x + 40y$  (Н/м<sup>2</sup>).

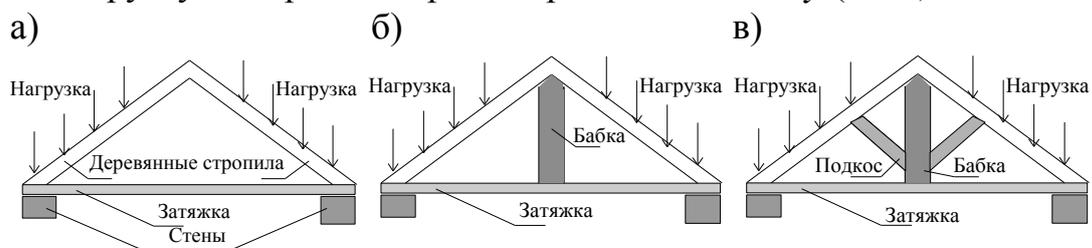


Рис.1.15

**Вариант №9.**

Рассчитать деформированное состояние рамы.

Предмет моделирования: оконная рама, вставленная в кирпичную стену.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.16.

Дано:

- Модуль Юнга дерева  $E=0.2 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, стекла  $E=0.314 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, кирпича  $E=10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>.

- Коэффициент Пуассона дерева  $\nu=0.13$ , стекла  $\nu=0$ , кирпича  $\nu=0.12$ .
- Кирпичную стену по внешней границе считать закрепленной как по  $X$ , так и по  $Y$ .
- Боковые сжимающие усилия, действующие на раму, принять равными  $50 \text{ Н/м}^2$ , верхнее и нижнее сжимающие усилия -  $45$  и  $40 \text{ Н/м}^2$  соответственно.

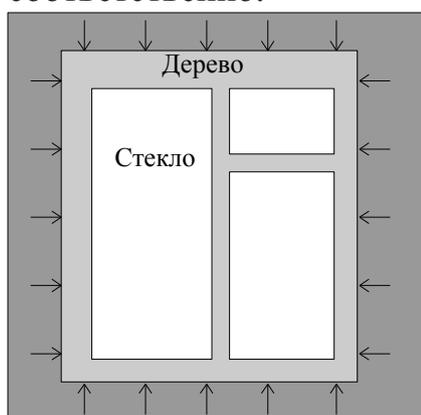


Рис.1.16

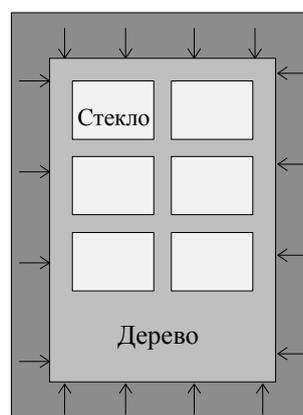


Рис.1.17

### Вариант №10.

Рассчитать деформированное состояние двери.

Предмет моделирования: застекленная дверь, вставленная в кирпичную стену.

Тип задачи: расчет плоскодеформированного состояния.

Геометрия модели: рис.1.17.

Дано: см. ВАРИАНТ №9.

### Пример выполнения задания.

Рассчитать коэффициент концентрации напряжения в тонкой прямоугольной пластине, обусловленный центральным отверстием.

Предмет моделирования: тонкая прямоугольная пластина с круглым отверстием посередине, нагруженная растягивающим усилием.

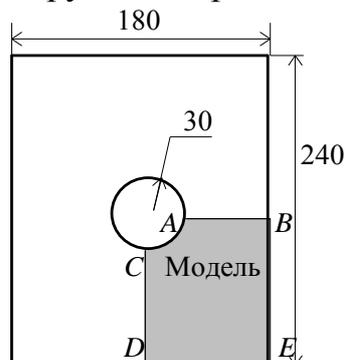


Рис.1.18

Тип задачи: расчет плосконапряженного состояния.

Геометрия модели: рис.1.18. Все размеры указаны в миллиметрах.

Дано:

- Модуль Юнга  $E = 207000 \text{ Н/м}^2$ .
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ .
- Равномерное растягивающее усилие ( $40 \text{ Н/м}^2$ ) приложено к нижней стороне пластины.

Решение:

- Поскольку задача полностью симметрична относительно осей  $Ox$  и  $Oy$ , в модели представлена только нижняя правая четверть пластины. Отсутствующие части пластины замещены граничными условиями закрепления границ разреза в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно.
- Коэффициент концентрации напряжений можно вычислить, исходя из приложенной нагрузки ( $40 \text{ Н/м}^2$ ) и максимального рассчитанного напряжения ( $139 \text{ Н/м}^2$ ) как  $k=139/40=3.475$ .
- Далее выполняется следующая последовательность операций..
  1. Создайте новую задачу с именем *Stres1.pbm*.
  2. Введите следующие свойства задачи:
    - В списке *Тип задачи* выберите *Напряжения и деформации*;
    - В пункте *Класс модели* выберите опцию *Плоская*;
    - В пункте *Единицы измерения* выберите *Миллиметры*;
    - В качестве имени файла геометрии модели и физических свойств выберите *Stres1.mod* и *Stres1.dms* соответственно.
  3. Создайте ребра, образующие геометрическую модель задачи.
  4. Присвойте метки геометрическим объектам для описания свойств материалов, нагрузок и условий закрепления.
    - Присвойте метку *Металл* блоку *BACDE*.
    - Метки ребер используются для задания нагрузок и граничных условий закрепления на внешних и внутренних границах области. В нашем случае нужно задать граничные условия закрепления границ разреза в направлениях  $X$  и  $Y$  соответственно.
    - Присвойте метки *Нет верт. смещ.* и *Нет гориз. смещ.* ребрам *AB* и *CD* соответственно.
    - Присвойте метку *Нагрузка* ребру *DE*.
    - Присвоение меток геометрическим объектам закончено.
  5. Задайте шаг дискретизации в нескольких вершинах области. Установите значение шага дискретизации 5 мм в вершинах *A* и *C*, 12 мм в вершине *B*, 15 мм в вершинах *D* и *E*.

6. Постройте сетку конечных элементов во всех блоках модели.
7. Для свойств метки блока *Металл* введите значение модуля Юнга, равное 207000, и значение коэффициента Пуассона, равное 0.3.
8. Для свойств метки ребра *Нет верт. смещ.* включите флажок *Y*, соответственно, для метки ребра *Нет гориз. смещ.* включите флажок *X*.
9. Для свойств метки ребра *Нагрузка* на вкладке *Поверхностная сила* введите значение -40 в поле  $f_y$ .
10. Решите задачу и посмотрите вычисленное максимальное значение напряжения (рис.1.19).
11. Вычислите коэффициент концентрации напряжений  $k$ .

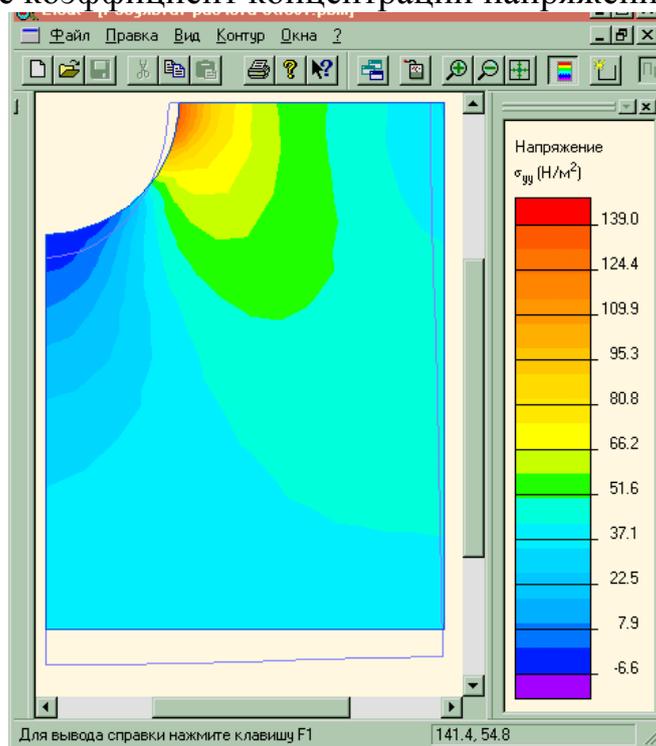


Рис.1.19

### 1.5. Лабораторная работа №3. Решение задач электростатики и растекания токов методом конечных элементов

**Цель работы:** приобретение навыков в решении задач электростатики и растекания токов методом конечных элементов с использованием персонального компьютера.

**Литература:** [13], [17].

#### **Краткие сведения из теории**

##### *Постановка задач электростатики*

Электростатические задачи описываются уравнением Пуассона относительно скалярного электрического потенциала  $U$  ( $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}U$ ,  $\mathbf{E}$  - вектор напряженности электрического поля). Уравнение Пуассона имеет вид:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\rho,$$

для осесимметричных задач

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \epsilon_r r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\rho,$$

где  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  или  $\epsilon_z$ ,  $\epsilon_r$  - компоненты тензора электрической проницаемости,  $\rho$  - плотность распределенного заряда. Все параметры уравнений постоянны в пределах каждого блока модели.

##### *Источники поля в электростатике*

ELCUT позволяет задать электрический заряд в блоках, ребрах и вершинах модели.

Заряд, заданный в вершине модели, описывает заряженную струну, проходящую через эту вершину перпендикулярно к плоскости модели, и задается своей линейной плотностью. В осесимметричном случае заряд вершины описывает заряженную окружность вокруг оси симметрии или точечный заряд, расположенный на оси симметрии. Чтобы охватить оба этих случая, заряд вершины всегда описывается полным зарядом. Для заряженной окружности полный заряд связан с линейной плотностью соотношением  $q = 2\pi r \rho$ .

Заряд, заданный на ребре модели, соответствует заряженной поверхности в трехмерном мире. Он характеризуется поверхностной

плотностью заряда и описывается при помощи граничного условия Неймана для ребра.

Заряд, заданный для блока модели, соответствует объемному заряду и характеризуется объемной плотностью заряда.

### *Граничные условия в электростатике*

На внутренних и внешних границах области допустимы следующие виды граничных условий:

Условие Дирихле задает наперед известное значение электрического потенциала  $U_0$  в вершине или на ребре модели (например, на обкладках конденсатора). Этот вид граничного условия также может применяться на внешней границе области, совпадающей с плоскостью электрической антисимметрии задачи (противоположные по знаку источники в симметричной геометрии). Величина  $U_0$  на ребре модели может быть задана в виде линейной функции координат. Параметры задающей линейной функции могут меняться от ребра к ребру, но должны быть согласованы так, чтобы функция  $U_0$  была непрерывна в точках соприкосновения границ.

Замечание. Для того, чтобы задача была сформулирована корректно, необходимо задание условия Дирихле хотя бы в одной точке расчетной области, а если область представляет собой набор физически не связанных подобластей - хотя бы в одной точке каждой такой подобласти.

Условие Неймана определяется следующими соотношениями:

$D_n = \sigma$  - на внешней границе,

$D_n^+ - D_n^- = \sigma$  - на внутренней границе,

где  $D_n$  - нормальная компонента электрического смещения, индексы "+" и "-" означают "слева от границы" и "справа от границы" соответственно,  $\sigma$  - поверхностная плотность заряда. Если  $\sigma$  принимает нулевое значение, граничное условие называется однородным, что означает отсутствие нормальной компоненты напряженности электрического поля. Этот вид граничного условия часто используется на внешней границе области, являющейся следом плоскости симметрии задачи. Однородное условие Неймана является естественным, оно устанавливается по умолчанию на всех ребрах внешней границы, где явно не указано иное граничное условие. При задании неоднородного условия Неймана на внешней границе, являющейся следом плоскости симметрии, истинную величину плотности заряда следует разделить пополам.

Граничное условие равного потенциала используется для описания изолированных проводников, помещенных в

электрическое поле, которые имеют постоянный, но заранее неизвестный потенциал.

Замечание. Ребро, на котором задано условие равного потенциала, не должно соприкасаться с ребрами или вершинами, на которых задано условие Дирихле. В этом случае ребро с постоянным потенциалом следует описать при помощи условия Дирихле с подходящим значением потенциала.

### *Вычисляемые физические величины в электростатике*

При анализе результатов расчета электрического поля ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Скалярный электрический потенциал  $U$ .
- Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}U$ :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{- в плоском случае;}$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{- в осесимметричном случае.}$$

- Тензор градиента напряженности электрического поля  $\mathbf{G} = \mathbf{grad}\mathbf{E}$ :

$$G_{xx} = \frac{\partial E_x}{\partial x}, \quad G_{yy} = \frac{\partial E_y}{\partial y}, \quad G_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad \text{- в плоском случае;}$$

$$G_{zz} = \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad G_{rr} = \frac{\partial E_r}{\partial r}, \quad G_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial E_r}{\partial z} \right) \quad \text{- в осесимметричном случае;}$$

а также его главные компоненты  $G_1$  и  $G_2$ .

- Вектор электрического смещения  $\mathbf{D} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{E}$ , где  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор диэлектрической проницаемости.

Интегральные величины:

- Суммарный электрический заряд, заключенный в заданном объеме

$$q = \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds,$$

где интегрирование ведется по поверхности окружающей заданный объем, а  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности.

- Суммарная электростатическая сила, действующая на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{D}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})) ds.$$

- Суммарный момент электростатических сил, действующих на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \oint ((\mathbf{r} \times \mathbf{E})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{D})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{r} \times \mathbf{n})(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})) ds,$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки интегрирования. Вектор момента направлен параллельно оси  $z$  в плоскопараллельном случае, а в осесимметричном случае момент тождественно равен нулю. Момент рассматривается относительно начала координат. Момент относительно произвольной точки может быть получен добавлением слагаемого  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}_0$ , где  $\mathbf{F}$  - это полная сила, а  $\mathbf{r}_0$  - радиус-вектор точки.

- Энергия электрического поля

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) dV.$$

В плоскопараллельной постановке интегральные характеристики вычисляются на единицу длины расчетной области в направлении оси  $z$ . Область интегрирования задается в плоскости модели замкнутым или разомкнутым контуром, состоящим из отрезков и дуг окружностей.

#### *Вычисление емкости*

Можно предложить несколько способов вычисления емкости проводника или системы проводников при помощи ELCUT. Наиболее простой из них основывается на измерении потенциала проводника, порожденного известным зарядом. Чтобы рассчитать емкость проводника, установите на его поверхности граничное условие равного потенциала, задайте произвольное, ненулевое значение заряда в любой из вершин на его поверхности (фактически заряд растечется по поверхности проводника) и выключите все прочие источники поля в модели. Решив задачу, откройте окно анализа результатов и узнайте значение потенциала в любой точке на поверхности проводника. Искомая емкость может быть вычислена по формуле

$$C = q/U,$$

где  $q$  - электрический заряд проводника, а  $U$  - его потенциал.

Чтобы измерить взаимную емкость пары проводников, поместите заряд на один из них и измерьте потенциал на другом. Все прочие источники поля должны быть выключены, а на

поверхностях обоих проводников следует задать граничное условие равного потенциала.

$$C_{12}=q_1/U_2.$$

### *Постановка задачи растекания токов*

ELCUT позволяет рассчитывать распределение электрического потенциала и тока в системах проводников. Эти задачи описываются уравнением Пуассона относительно скалярного электрического потенциала  $U$  (пред-полагается, что вектор плотности тока лежит в плоскости модели). Уравнение Пуассона имеет вид:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\rho_x} \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\rho_y} \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0,$$

для осесимметричных задач

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r}{\rho_r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho_z} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0,$$

где  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  или  $\rho_z$ ,  $\rho_r$  – компоненты тензора удельного электрического сопротивления  $\rho$  - постоянные величины в пределах каждого блока модели.

Вектор плотности тока  $\mathbf{j}$  определяется уравнением:  $\mathbf{j} = -\rho^{-1} \mathbf{grad}U$ .

### *Источники поля в задачах растекания токов*

ELCUT позволяет задать источники поля на ребрах и вершинах модели (в задачах растекания тока под источниками поля понимаются сторонние токи, заданные на границах проводника).

Источник поля, заданный в вершине модели, соответствует токоподводу в виде тонкого проводника, перпендикулярного плоскости модели. Он описывается своей линейной плотностью тока. В осесимметричном случае источник, заданный в вершине, описывает токоподвод в виде тонкого кольца с осью, совпадающей с осью симметрии задачи или точечный токовый ввод, если точка лежит на оси вращения. В этих двух случаях источник описывается величиной подводимого тока. Для кольцевого токоподвода полное значение тока связано с его линейной плотностью соотношением  $I = 2\pi r\sigma$ .

Источник поля, заданный на ребре модели, соответствует поверхностному току в трехмерном мире. Он характеризуется

поверхностной плотностью тока и описывается при помощи граничного условия Неймана для ребра.

#### *Граничные условия в задачах растекания токов*

В задачах растекания токов на внешних и внутренних ребрах модели могут быть заданы следующие виды граничных условий.

Условие Дирихле задает наперед известное значение электрического потенциала  $U_0$  на ребрах или в вершинах модели. Значение  $U_0$  на ребре может быть задано в виде линейной функции от координат. Параметры задающей линейной функции могут варьироваться от ребра к ребру, но должны быть подобраны так, чтобы избежать разрывов функции  $U_0$  в точках соприкосновения границ.

Замечание. Для того, чтобы задача была сформулирована корректно, необходимо задание условия Дирихле хотя бы в одной точке расчетной области, а если область представляет собой набор физически не связанных подобластей - хотя бы в одной точке каждой такой подобласти.

Условие Неймана имеет вид:

$$j_n = j \quad - \text{ на внешней границе,}$$

$$j_n^+ - j_n^- = j \quad - \text{ на внутренней границе,}$$

где  $j_n$  - нормальная компонента вектора плотности тока, индексы "+" и "-" означают "слева от границы" и "справа от границы" соответственно,  $j$  в правой части выражений - плотность стороннего тока. Если  $j=0$ , граничное условие называется однородным. Однородное условие Неймана на внешней границе означает отсутствие нормальной составляющей напряженности и часто применяется для описания плоскости симметрии. Однородное условие Неймана является естественным, оно устанавливается по умолчанию, на всех тех ребрах, составляющих внешнюю границу, где явно не указано иное граничное условие.

При задании неоднородного условия Неймана на внешней границе, являющейся следом плоскости симметрии, истинную величину плотности тока следует разделить пополам.

Граничное условие равного потенциала задает поверхность изолированного проводника, обладающего существенно большей проводимостью, чем окружающие его тела. Это условие отличается от условия Дирихле тем, что значение потенциала на описываемой поверхности не известно заранее.

Замечание. Не допускается соприкосновение поверхностей, носящих граничное условие Дирихле и условие равного потенциала.

В этом случае последнее условие следует описать с помощью условия Дирихле.

*Вычисляемые физические величины в задачах растекания токов*

При анализе результатов задачи растекания токов ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Скалярный электрический потенциал  $U$ .
- Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}U$ :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{- в плоском случае;}$$

$$E_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} \quad \text{- в осесимметричном случае.}$$

- Вектор плотности тока  $\mathbf{j} = \boldsymbol{\rho}^{-1}\mathbf{E}$ , где  $\boldsymbol{\rho}$  - тензор удельного сопротивления.

Интегральные величины:

- Электрический ток через заданную поверхность

$$I = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds,$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности.

- Мощность тепловыделения в заданном объеме

$$W = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dV.$$

В плоскопараллельной постановке интегральные характеристики вычисляются на единицу длины расчетной области в направлении оси  $z$ .

Область интегрирования задается в плоскости модели замкнутым или разомкнутым контуром, состоящим из отрезков и дуг окружностей.

## Варианты заданий

### Вариант №1.

Рассчитать распределение электрического потенциала в спирали и подошве электрического утюга.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, расположенная в подошве электрического утюга.

Тип задачи: плоскопараллельная задача растекания токов.

Геометрия: рис.1.20.

Дано:

- Длина спирали  $l = 50$  См, диаметр  $d=10$  мм;
- Напряжение сети  $U = 220$  В;
- Потребляемая мощность  $P = 1000$  Вт;
- Удельное электрическое сопротивление материала спирали (нихром Х15Н60)  $\rho = 110 \cdot 10^{-6}$  Ом·См, материала подошвы утюга (алюминиевый сплав)  $\rho = 305 \cdot 10^{-6}$  Ом·См.

Задача: рассчитать распределение электрического потенциала в спирали и подошве.

Начальные действия:

- Вычислить падение напряжения по длине провода по формуле:  $\Delta U = IRl$ , где  $R$  – погонное электрическое сопротивление ( $R=4\rho/\pi d^2$ ),  $I$  - сила тока ( $I=P/U$ ).
- Задать электрические потенциалы на двух боковых сечениях спирали  $A$  и  $B$  и условие нулевого тока через остальную границу спирали.

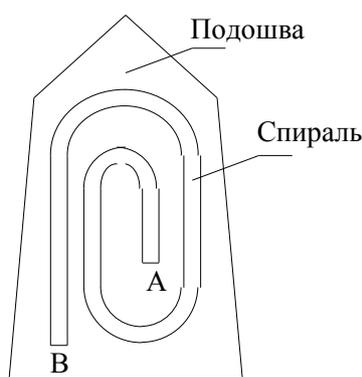


Рис.1.20

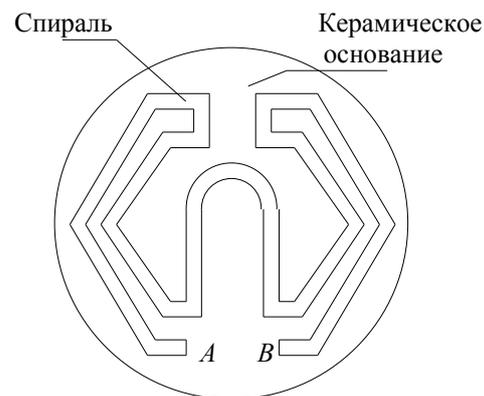


Рис.1.21

### Вариант №2.

Рассчитать распределение электрического потенциала в спирали и керамическом основании электрической плитки.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, расположенная в керамическом основании электрической плитки.

Тип задачи: плоскопараллельная задача растекания токов.

Геометрия: рис.1.21

Дано:

- Длина спирали  $l = 100$  См, диаметр  $d=10$  мм;
- Напряжение сети  $U = 220$  В;
- Потребляемая мощность  $P = 1000$  Вт;

- Удельное электрическое сопротивление материала спирали (нихром Х15Н60)  $\rho = 110 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{См}$ , керамического основания  $\rho = 10^{14} \text{ Ом} \cdot \text{См}$ .

Начальные действия: см. **Вариант №1.**

### **Вариант №3.**

Рассчитать распределение электрического потенциала в спирали, миканитовой пластине, подошве утюга.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, навитая на пластину из миканита (склеенные кусочки слюды), расположенную в подошве электрического утюга.

Тип задачи: плоскопараллельная задача растекания токов.

Геометрия: рис.1.22.

Дано:

- Длина спирали  $l = 100 \text{ См}$ , диаметр  $d = 10 \text{ мм}$ ;
- Напряжение сети  $U = 220 \text{ В}$ ;
- Потребляемая мощность  $P = 1000 \text{ Вт}$ ;
- Удельное электрическое сопротивление материала спирали (нихром Х15Н60)  $\rho = 110 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{См}$ , материала подошвы утюга (алюминиевый сплав)  $\rho = 305 \cdot 10^{-6} \text{ Ом} \cdot \text{См}$ , миканита  $\rho = 10^{15} \text{ Ом} \cdot \text{См}$ .

Начальные действия: **Вариант №1.**

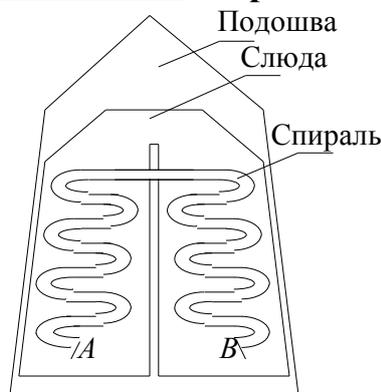


Рис.1.22

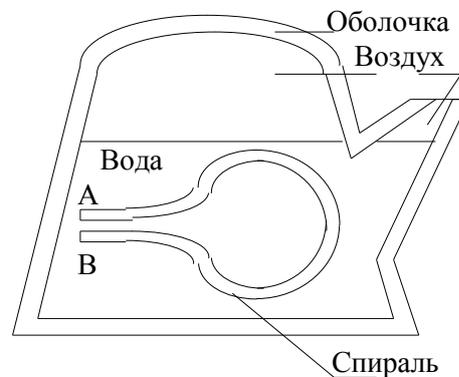


Рис.1.23

### **Вариант №4.**

Рассчитать распределение электрического потенциала в спирали, воде, чайнике.

Предмет моделирования: нагревательный элемент электрического чайника.

Тип задачи: плоскопараллельная задача растекания токов.

Геометрия: рис.1.23.

Дано:

- Длина спирали  $l = 50 \text{ См}$ , диаметр  $d = 10 \text{ мм}$ ;
- Напряжение сети  $U = 220 \text{ В}$ ;

- Потребляемая мощность  $P = 1200$  Вт;
- Удельное электрическое сопротивление материала спирали (нихром Х15Н60)  $\rho = 110 \cdot 10^{-6}$  Ом·См, материала чайника (алюминиевый сплав)  $\rho = 305 \cdot 10^{-6}$  Ом·См, воды  $\rho = 4 \cdot 10^6$  Ом·См.

Начальные действия: см. **Вариант №1.**

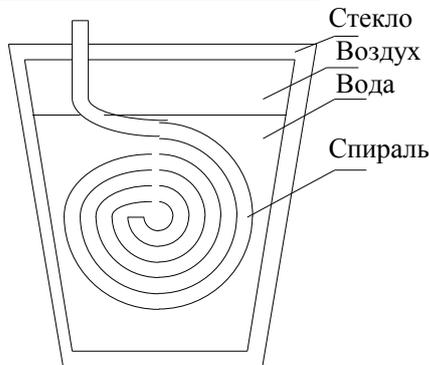


Рис.1.24

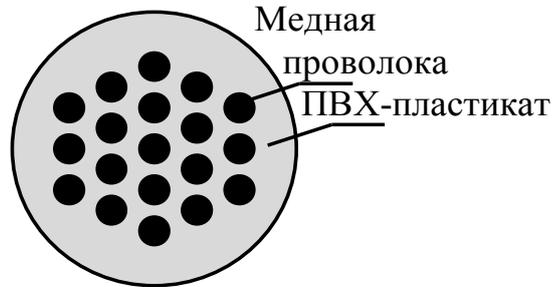


Рис.1.25

### **Вариант №5.**

Рассчитать распределение электрического потенциала в спирали, стекле, воде для электрического кипятильника, погруженного в стакан с водой.

Предмет моделирования: нагревательный элемент электрического кипятильника.

Тип задачи: плоскопараллельная задача растекания токов.

Геометрия: рис.1.24.

Дано:

- Длина спирали  $l = 20$  См, диаметр  $d = 10$  мм;
- Напряжение сети  $U = 220$  В;
- Потребляемая мощность  $P = 300$  Вт;
- Удельное электрическое сопротивление материала спирали (нихром Х15Н60)  $\rho = 110 \cdot 10^{-6}$  Ом·См, стекла  $\rho = 4 \cdot 10^9$  Ом·См, воды  $\rho = 4 \cdot 10^6$  Ом·См.

Начальные действия: см. **Вариант №1.**

### **Вариант №6.**

Найти распределение электрического потенциала в проводе с 19-ти проволочной жилой (медные проводники из рассмотрения исключить).

Предмет моделирования: провод с 19-ти проволочной медной жилой.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

Геометрия: рис.1.25.

Дано:

- Диэлектрическая проницаемость ПВХ-пластиката  $\epsilon=3$ ;
- Значение потенциала на проволочках  $U_i=i$  В,  $i=1...19$ .
- Граничные условия задать в виде значений потенциалов на проволочках.

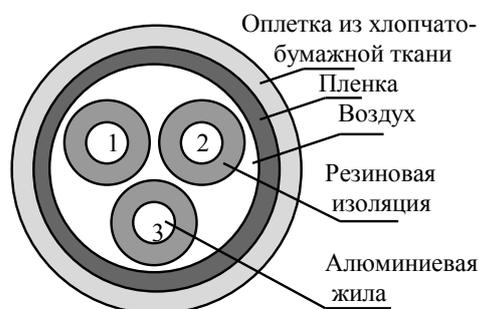


Рис.1.26

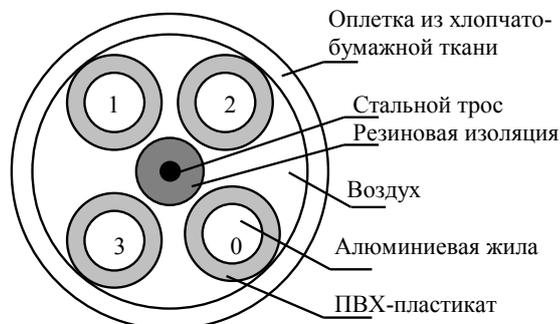


Рис.1.27

### Вариант №7.

Найти распределение электрического потенциала в трехжильном проводе (сами жилы из рассмотрения исключить).

Предмет моделирования: трехжильный провод с алюминиевыми жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

Геометрия: рис.1.26.

Дано:

- Диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon=1$ , хлопчатобумажной ткани  $\epsilon=1$ , пленки  $\epsilon=2.3$ , резины  $\epsilon=5$ ;
- Значение потенциала на первой жиле  $U=0$  В, на второй жиле –  $U=-0.588$  В, на третьей жиле -  $U=0.951$  В.
- Граничные условия задать в виде значений потенциалов на жилах.

### Вариант №8.

Найти распределение электрического потенциала в четырехжильном проводе (алюминиевые жилы и стальной трос из рассмотрения исключить).

Предмет моделирования: четырехжильный провод с алюминиевыми жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

Геометрия: рис.1.27.

Дано:

- Диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon=1$ , хлопчатобумажной ткани  $\epsilon=1$ , ПВХ-пластиката  $\epsilon=3$ , резины  $\epsilon=5$ ;

- Значение потенциала на нулевой жиле  $U=0$  В, первой жиле –  $U=1$  В, на второй жиле –  $U=-1$  В, на третьей жиле –  $U=2$  В.
- Граничные условия задать в виде значений потенциалов на жилах.

### Вариант №9.

Найти распределение электрического потенциала в проводе с семипроволочной жилой (медные проводники из рассмотрения исключить).

Предмет моделирования: провод с семипроволочной жилой.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

Геометрия: рис.1.28.

Дано:

- Диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon=1$ , хлопчатобумажной ткани  $\epsilon=1$ , ПВХ-пластиката  $\epsilon=3$ ;
- Значение потенциала на проволочках  $U_i=i$  В,  $i=1...7$ .
- Граничные условия задать в виде значений потенциалов на жилах.

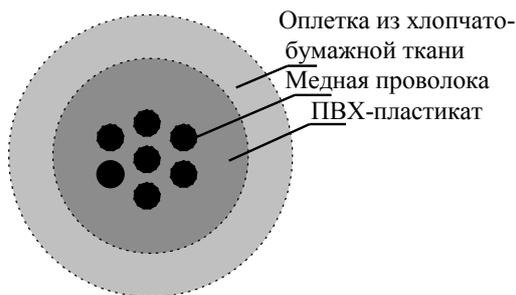


Рис.1.28

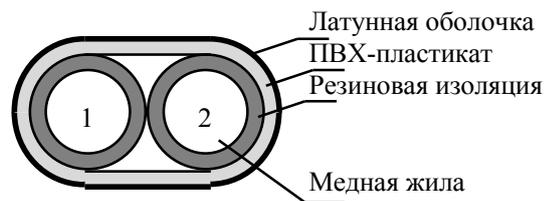


Рис.1.29

### Вариант №10.

Найти распределение электрического потенциала в проводе с двухпроводной медной жилой (медные жилы и латунную оболочку из рассмотрения исключить).

Предмет моделирования: двухжильный провод с медными жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

Геометрия: рис.1.29.

Дано:

- Диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon=1$ , резины  $\epsilon=5$ , ПВХ-пластиката  $\epsilon=3$ ;
- Значение потенциала на первой жиле  $U=1$  В, на второй жиле –  $U=-1$  В.
- Граничные условия задать в виде значений потенциалов на жилах.

## Пример выполнения задания

Определить емкость микрополосковой линии передачи.

Предмет моделирования: микрополосковая линия передачи. Экранированная микрополосковая линия состоит из подложки, проводящей пленки и экрана.

Тип задачи: плоскопараллельная задача электростатики.

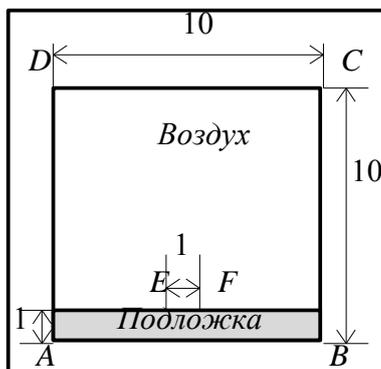


Рис. 1.30

Геометрия: рис.1.30. Все размеры указаны в сантиметрах. Микрополосковая линия ориентирована вдоль оси  $z$ , ее поперечное сечение показано на рисунке. Прямоугольник  $ABCD$  представляет собой сечение экрана, линия  $EF$  соответствует проводящему слою.

Дано:

- Относительная диэлектрическая проницаемость воздуха  $\epsilon=1$ , подложки  $\epsilon=10$ .

Решение:

Приложим некоторую разность потенциалов  $U$  между проводящим слоем и экраном и рассчитаем величину заряда  $q$ , который будет наведен на проводящей полоске.

Приложим нулевой потенциал к экрану и опишем проводящую полоску как проводник с зарядом  $q$ . Поверхность проводника должна быть эквипотенциальной с заранее неизвестным потенциалом. Затем достаточно рассчитать потенциал  $U$  проводящей полоски.

Для нахождения емкости проводника используем формулу:

$$C = q/U.$$

Далее выполняется следующая последовательность операций.

1. Создайте новую задачу с именем *Elec1\_1.pbm*.

2. Введите следующие свойства задачи:

- В списке *Тип задачи* выберите *Электростатика*;
- В пункте *Класс модели* выберите опцию *Плоская*;
- В пункте *Единицы измерения* выберите *Сантиметры*;

- В качестве имени файла геометрии модели и физических свойств выберите *Elec1.mod* и *Elec1\_1.dms* соответственно.
3. Создайте ребра, образующие геометрическую модель задачи.
  4. Присвойте метки геометрическим объектам для описания свойств материалов, источников поля и граничных условий.
    - Задача содержит два материала с различными свойствами: воздух и подложка. Присвойте метку *Воздух* для верхнего блока и метку *Подложка* для нижнего.
    - Метки ребер используются для задания граничных условий на внешних и внутренних границах модели. В нашем случае нужно задать граничные условия для экрана (прямоугольник *ABCD*) и для проводящей полоски (линия *EF*). Присвойте метку *Проводник* ребру *EF*. Присвойте метку *Экран* четырем ребрам, которые образуют прямоугольник *ABCD*.
    - Необходимо также пометить любую из вершин, контактирующую с проводящим слоем, чтобы с ее помощью задать заряд проводника. Не имеет значения, какую из вершин выбрать, в любом случае заряд распределится по всему проводнику. Присвойте метку *Заряд* вершине *E* или *F*.
    - Присвоение меток геометрическим объектам закончено.
  5. Задайте шаг дискретизации в нескольких вершинах области. Можно предположить существенную неоднородность поля вблизи концов проводящей полоски, так что густота сетки в этих местах должна быть максимальной. Поэтому, установите значение шага дискретизации 0.2 см в вершинах *E* и *F*, 0.5 см в вершинах *A*, *B*, *C* и *D*.
  6. Постройте сетку конечных элементов во всех блоках модели.
  7. Для свойств блока с меткой *Воздух* введите значение относительной диэлектрической проницаемости, равное 1.
  8. Для свойств блока с меткой *Подложка* введите значение относительной диэлектрической проницаемости, равное 10.
  9. Для свойств ребер с меткой *Экран* включите флажок *Потенциал:  $U=U_0$*  и в полях ввода задайте нулевые значения.
  10. Для свойств ребра с меткой *Проводник* включите флажок *Изолированный проводник*.
  11. Для свойств вершины с меткой *Заряд* включите флажок *Заряд* и введите 1.
  12. Решите задачу и посмотрите значение потенциала в точке (0.0;1.0) (рис.1.31).
  13. Вычислите емкость по формуле

$$C=q/U=1/5,0955 \cdot 10^9=1,9625 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м.}$$

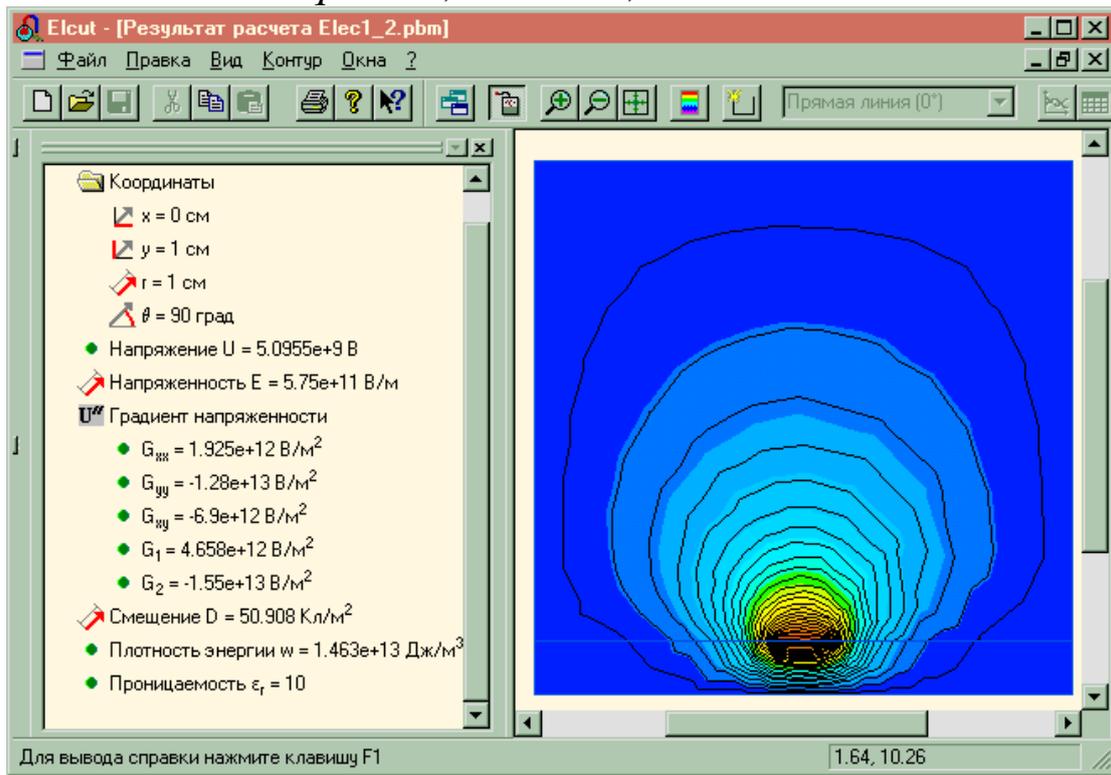


Рис.1.31

## 1.6. Лабораторная работа №4.

### Решение задач магнитостатики и магнитного поля переменных токов методом конечных элементов

**Цель работы:** приобретение навыков в решении задач магнитостатики и магнитного поля переменных токов методом конечных элементов с использованием персонального компьютера.

**Литература:** [13], [17].

#### Краткие сведения из теории

##### *Постановка задач магнитостатики*

ELCUT позволяет решать задачи магнитостатики в линейной и нелинейной постановках. При решении задач магнитостатики используется уравнение Пуассона относительно векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  - вектор магнитной индукции). В рассматриваемых задачах вектор индукции  $\mathbf{B}$  всегда лежит в плоскости модели ( $Oxy$  или  $Ozr$ ), а вектор плотности стороннего тока  $\mathbf{j}$  и векторный потенциал  $\mathbf{A}$  перпендикулярны к ней. Отличны от нуля только компоненты  $j_z$  и  $A_z$  в плоскопараллельных задачах или  $j_\theta$  и  $A_\theta$  в осесимметричных задачах. Будем обозначать их просто как  $j$  и  $A$ . Уравнение Пуассона имеет вид:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial y} \right) = -j + \left( \frac{\partial H_{cy}}{\partial x} - \frac{\partial H_{cx}}{\partial y} \right),$$

для осесимметричных задач

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\mu_z} \frac{\partial (rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) = -j + \left( \frac{\partial H_{cr}}{\partial z} - \frac{\partial H_{cz}}{\partial r} \right),$$

где  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  или  $\mu_z$ ,  $\mu_r$  - компоненты тензора магнитной проницаемости  $\boldsymbol{\mu}$ ;  $H_{cx}$ ,  $H_{cy}$  или  $H_{cz}$ ,  $H_{cr}$  - составляющие коэрцитивной силы;  $j$  - плотность тока. Все параметры уравнений постоянны в пределах каждого блока модели.

**Замечание.** В нелинейной постановке свойства материалов считаются изотропными ( $\mu_x = \mu_y$  или  $\mu_z = \mu_r$ ) и определяются функцией  $B(H)$ , задаваемой таблично.

##### *Источники поля в магнитостатике*

ELCUT позволяет задать источники поля в блоках, ребрах и вершинах модели (в магнитостатике под источниками поля понимаются сосредоточенные и распределенные токи и токовые

слои, а также постоянные магниты, намагниченность которых задается величиной коэрцитивной силы.

Источник поля, заданный в вершине модели, описывает ток, проходящий через эту вершину в направлении третьей оси. В осесимметричном случае точечный источник представляет ток в тонком кольцевом проводнике вокруг оси симметрии.

Задание плотности тока в токовом слое эквивалентно неоднородному граничному условию Неймана и осуществляется с его помощью.

Пространственно распределенный ток описывается посредством плотности электрического тока, ассоциированной с блоком.

Плотность тока в катушке может быть получена по формуле:

$$j = \frac{nI}{S},$$

где  $n$  - количество витков катушки,  $I$  - полный ток,  $S$  - площадь поперечного сечения катушки.

#### *Граничные условия в магнитостатике*

При построении модели на внутренних и внешних границах области допустимы следующие виды граничных условий.

Условие Дирихле, задающее на части границы наперед известный векторный магнитный потенциал  $A_0$  в вершине или на ребре модели. Это граничное условие определяет поведение нормальной составляющей индукции на границе. Оно часто используется для задания нулевого значения, например, на оси симметрии задачи или для указания полного затухания поля на удаленной от источников границе. Кроме того, ELCUT позволяет задать условие Дирихле как функцию координат в виде:

- $A_0 = a + bx + cy$  - для плоских задач;
- $rA_0 = a + brz + cr^2/2$  - для осесимметричных задач.

Константы  $a$ ,  $b$  и  $c$  постоянны в пределах стороны, но могут меняться от одной части границы к другой. Такой подход позволяет задавать ненулевое значение нормальной компоненты индукции на прямолинейных участках границы.

Пусть  $\alpha$  - угол наклона вектора, проведенного из начала в конец отрезка, к оси  $x$  ( $z$  в осесимметричном случае). Тогда нормальная компонента индукции выражается как

$$B_x = c \sin \alpha + b \cos \alpha.$$

Предполагается правое направление вектора положительной нормали. Это выражение одинаково справедливо для плоской и осесимметричной постановок.

Подбором значений константы на разных сторонах все условия Дирихле должны быть согласованы так, чтобы функция  $A_0$  была непрерывна в точках соприкосновения границ.

Замечание. Для того, чтобы задача была сформулирована корректно, необходимо задание условия Дирихле хотя бы в одной точке расчетной области, а если область представляет собой набор физически не связанных подобластей - хотя бы в одной точке каждой такой подобласти.

Условие Неймана имеет вид

- $H_t = \sigma$  - на внешних границах,
- $H_t^+ - H_t^- = \sigma$  - на внутренних границах,

где  $H_t$  - тангенциальная компонента напряженности поля, индексы "+" и "-" означают "слева от границы" и "справа от границы" соответственно,  $\sigma$  - линейная плотность поверхностного тока. Если  $\sigma$  равно нулю, граничное условие называется однородным. Однородное условие Неймана на внешней границе означает отсутствие касательной составляющей индукции на границе, часто применяется для описания плоскости магнитной антисимметрии (противоположные по знаку источники в симметричной геометрии). Однородное условие Неймана является естественным, оно устанавливается по умолчанию, то есть на всех тех сторонах, составляющих внешнюю границу, где явно не указано иное граничное условие.

Замечание. Нулевое условие Дирихле предполагается заданным по умолчанию на оси вращения для осесимметричных задач.

При задании неоднородного условия Неймана на внешней границе, являющейся следом плоскости симметрии, истинную величину плотности тока следует разделить пополам.

Граничное условие нулевого потока используется для описания границ подобластей со сверхпроводящими свойствами, в которые не проникает магнитное поле. Векторный магнитный потенциал (функция потока  $rA = const$  в осесимметричном случае) в теле такого сверхпроводника оказывается постоянным, поэтому его внутренность может быть исключена из рассмотрения, а на поверхности задан постоянный, но заранее неизвестный потенциал.

Замечание. Не допускается соприкосновение поверхностей, носящих граничное условие Дирихле, и поверхностей, носящих

граничное условие нулевого потока. В этом случае последние следует описать с помощью условия Дирихле.

### *Постоянные магниты*

Поскольку коэрцитивная сила рассматривается в ELCUT как кусочно-постоянная функция координат, ее вклад в уравнение эквивалентен поверхностным токам, протекающим по границам постоянных магнитов в направлении, ортогональном плоскости модели. Плотность такого эффективного тока равна величине скачка тангенциальной компоненты коэрцитивной силы на границе магнита. Например, прямоугольный магнит с коэрцитивной силой  $H_c$ , направленной вправо, может быть заменен совокупностью поверхностных токов, протекающих по его верхней и нижней границам. Эффективный ток, протекающий по верхней границе, численно равен  $H_c$ , а по нижней границе равен  $-H_c$ . Таким образом, постоянный магнит может быть описан как с помощью задания коэрцитивной силы, так и с помощью неоднородных граничных условий Неймана на его границах. Выбор того или иного способа определяется соображениями удобства и наглядности.

Особо следует рассмотреть случай постоянных магнитов, обладающих нелинейными магнитными характеристиками. Магнитная проницаемость постоянного магнита определяется формулой:

$$B = \mu(B)(H+H_c), \mu(B) = B/(H+H_c).$$

Следует учитывать, что определенная таким образом функция  $B$  отличается от аналогичной зависимости для того же материала без собственной намагниченности. Если у Вас отсутствуют данные, описывающие кривую размагничивания реального магнита, то в качестве приближения можно использовать кривую соответствующего материала. Если используется подобное приближение и рабочая точка магнита лежит в области малых  $H$ , а не малых  $B$ , то рекомендуется вместо коэрцитивной силы использовать величину

$$H_c^t = B_r/\mu(B_r),$$

где  $B_r$  - остаточная индукция магнита.

### *Вычисляемые физические величины в магнитостатике*

При анализе результатов расчета магнитного поля ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Векторный магнитный потенциал  $A$  (функция потока  $rA$  в осесимметричном случае).
- Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ :  
 $B_x = \partial A / \partial y$ ,  $B_y = -\partial A / \partial x$  - для плоскопараллельного поля,  
 $B_z = \partial(rA) / (r\partial r)$ ,  $B_r = -\partial A / \partial z$  - для осесимметричного поля.
- Вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B}$ , где  $\mu$  - тензор магнитной проницаемости.

Интегральные величины:

- Суммарная магнитостатическая сила, действующая на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{H}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{n}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})) ds,$$

где интегрирование ведется по поверхности, окружающей заданный объем, а  $\mathbf{n}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности.

- Суммарный момент магнитостатических сил, действующих на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \oint ((\mathbf{r} \times \mathbf{H})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{B})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - (\mathbf{r} \times \mathbf{n})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})) ds,$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки интегрирования. В плоскопараллельном случае вектор момента направлен параллельно оси  $z$ , в осесимметричном случае момент тождественно равен нулю. Момент вычисляется относительно начала координат, момент относительно произвольной точки с радиусом-вектором  $\mathbf{r}_0$  может быть получен добавлением векторного произведения  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}_0$ , где  $\mathbf{F}$  - это полная сила, а  $\mathbf{r}_0$  - радиус-вектор точки.

- Энергия магнитного поля

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV \quad \text{— в линейном случае;}$$

$$W = \int \left( \int_0^B H(B') dB' \right) dV \quad \text{— в нелинейном случае.}$$

- Потокосцепление на один виток обмотки

$$\Psi = \frac{\oint A ds}{S} \quad \text{— в плоскопараллельном случае,}$$

$$\Psi = \frac{2\pi \oint r A ds}{S} \quad \text{— в осесимметричном случае}$$

интегрирование в данной формуле ведется по поперечному сечению обмотки, а  $S$  обозначает площадь этого поперечного сечения.

Для плоских задач все интегральные величины рассматриваются на единицу длины в осевом направлении.

Область интегрирования задается в плоскости модели в виде контура (при необходимости замкнутого), состоящего из отрезков и дуг окружностей.

#### *Вычисление индуктивностей*

Чтобы вычислить собственную индуктивность катушки, задайте ток только в ней и убедитесь, что все прочие токи выключены. После решения задачи откройте окно анализа результатов и вычислите потокосцепление с контуром, совпадающим с поперечным сечением катушки. После того, как Вы сделали это, искомая собственная индуктивность может быть получена по формуле:

$$L = n\Psi/I,$$

где  $n$  - число витков катушки,  $\Psi$  - потокосцепление,  $I$  - ток в каждом из витков катушки.

Взаимная индуктивность двух катушек может быть найдена таким же образом. Отличие от предыдущего случая состоит лишь в том, что ток должен быть задан в одной из двух катушек, а потокосцепление вычисляться с другой из них:

$$L_{12} = n_2\Psi_2/I_1.$$

В плоскопараллельном случае каждая катушка должна быть представлена как минимум двумя проводниками с равными и противоположно направленными токами. В одних случаях оба проводника присутствуют в модели, в других только один из проводников включается в модель, а второй замещается граничным условием  $A = 0$  на плоскости симметрии задачи. Если магнитная система симметрична, индуктивность может быть получена, основываясь только на одном проводнике. Результат следует потом удвоить, чтобы учесть второй проводник. Если модель не симметрична, то полная индуктивность может быть получена добавлением аналогичных слагаемых, соответствующих каждому проводнику. Заметьте, что ток должен быть включен во всех проводниках, представляющих данную катушку.

В плоскопараллельных задачах индуктивность вычисляется на единицу длины в направлении оси  $z$ .

#### *Постановка задачи магнитного поля переменных токов*

Анализ магнитного поля переменных токов состоит в расчете электрического и магнитного поля, возбужденного приложенными

переменными токами, синусоидально изменяющимися во времени, или внешним переменным полем.

Изменение поля во времени предполагается синусоидальным. Все компоненты поля и электрические токи изменяются как:

$$z = z_0 \cos(\omega t + \phi_z),$$

где  $z_0$  - амплитудное (максимальное) значение  $z$ ,  $\phi_z$  - фазовый угол,  $\omega$  - угловая частота.

Представление гармонически изменяющейся величины при помощи комплексного числа существенно облегчает анализ. Действительная и мнимая части комплексного числа

$$z = z_0 e^{i(\omega t + \phi_z)},$$

сдвинуты по фазе на 90 градусов по отношению друг к другу, так что их линейная комбинация может представлять произвольный фазовый угол.

В зависимости от фазового сдвига между двумя осциллирующими компонентами вектора, вектор может вращаться по часовой стрелке или в противоположном направлении, либо колебаться вдоль некоторого направления. В общем случае конец вектора описывает эллипс. Главные полуоси эллипса соответствуют максимальным значениям векторной величины. Отношение длин меньшей и большей полуосей определяет коэффициент поляризации вектора. Последний предполагается положительным при вращении вектора против часовой стрелки и отрицательным в противоположном случае. Нулевой коэффициент соответствует линейной поляризации вектора.

Полный ток в проводнике может рассматриваться как сумма стороннего тока, вызванного приложенным извне напряжением, и вихревого тока, индуцированного переменным магнитным полем:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{\text{eddy}}.$$

Задача формулируется как дифференциальное уравнение в частных производных относительно комплексной амплитуды векторного магнитного потенциала  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  - вектор магнитной индукции). В рассматриваемой задаче вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  всегда лежит в плоскости модели ( $Oxy$  или  $Ozr$ ), а вектор плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  и векторный магнитный потенциал  $\mathbf{A}$  перпендикулярны к ней. Отличны от нуля только компоненты  $j_z$  и  $A_z$  в плоских задачах или  $j_\theta$  и  $A_\theta$  в осесимметричных задачах. Будем обозначать их просто как  $j$  и  $A$ . Уравнение имеет вид:

для плоскопараллельных задач

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A}{\partial y} \right) - i\omega g A = -j_0,$$

для осесимметричных задач

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r\mu_z} \frac{\partial(rA)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A}{\partial z} \right) - i\omega g A = -j_0,$$

где  $g$  – электропроводность;  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  или  $\mu_z$ ,  $\mu_r$  – компоненты тензора магнитной проницаемости  $\boldsymbol{\mu}$  – постоянны в пределах каждого блока модели;  $j_0$  – сторонняя составляющая тока – предполагается постоянной в пределах каждого блока модели в плоской задаче и обратно пропорциональной радиусу ( $\sim 1/r$ ) в осесимметричной задаче.

Описанная формулировка не учитывает член  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  в формуле закона Ампера, т.е. пренебрегает плотностью тока смещения. Обычно плотность тока смещения не оказывает заметного влияния до мегагерцовых диапазонов частот.

Замечание. Постоянные магниты и нелинейные магнитные свойства материалов не могут быть учтены в задачах данного типа. Здесь предполагается, что все величины, описывающие поле в любой его точке, изменяются во времени синусоидально. Постоянные магниты приносят в систему постоянный во времени магнитный поток, а насыщение материала предполагает несинусоидальное поведение поля при синусоидальном возбуждении.

#### *Источники магнитного поля переменных токов*

ELCUT позволяет задать источники поля в блоках, ребрах и вершинах модели. Источники поля могут включать объемную, поверхностную или линейную плотность тока, а также напряжение, приложенное к проводникам.

Точечный источник означает линейный ток в осевом направлении. В осесимметричном случае точечный источник соответствует тонкому кольцевому проводнику, перпендикулярному плоскости модели.

Плотность тока, заданная на ребре модели, соответствует поверхностному току в трехмерном мире. Она определяется заданием граничного условия Неймана на ребре модели.

Пространственно распределенный ток можно задать несколькими способами. В массивном проводнике Вы можете определить либо полный ток, либо напряжение, приложенное к проводнику. В плоской задаче падение напряжения задается на единицу глубины модели, в осесимметричной задаче имеется в виду

напряжение на один виток проводника. Ненулевое напряжение, приложенное к проводнику в осесимметричной задаче, означает, что проводник имеет радиальный разрез, к противоположным сторонам которого приложено напряжение. На практике эту возможность удобно применять для описания известного напряжения, приложенного к кольцевой обмотке с массивными проводниками. В этом случае реальное напряжение на зажимах обмотки следует разделить на число ее витков.

Замечание. Смысл нулевого полного тока и нулевого приложенного напряжения весьма различен. Нулевое напряжение означает, что концы проводника замкнуты накоротко, а нулевой ток описывает разомкнутый проводник.

Источник поля может быть задан также и в непроводящей среде. Это полезно, для описания тока в обмотке, намотанной тонким проводом, в которой вихревыми токами можно пренебречь. В таких блоках можно задать как суммарный ток, так и плотность тока, в зависимости от того, что окажется удобнее. Плотность тока в катушке может быть получена по формуле:

$$j = nI/S,$$

где  $n$  - число витков,  $I$  - полный ток,  $S$  - площадь поперечного сечения катушки.

Замечание. Чтобы правильно описать катушку, намотанную тонким проводом, плотность стороннего тока  $j_0$  в непроводящих областях предполагается равномерной как в плоской, так и в осесимметричной задачах. Ее поведение различается в массивных проводниках, где плотность тока в осесимметричной задаче считается распределенной как  $1/r$ .

*Граничные условия в задачах магнитного поля переменных токов (см. Граничные условия в магнитостатике)*

*Вычисляемые физические величины для магнитного поля переменных токов*

При анализе результатов расчета магнитного поля переменных токов ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Комплексная амплитуда векторного магнитного потенциала  $A$  (функция потока  $rA$  в осесимметричном случае).
- Комплексная амплитуда напряжения  $U$ , приложенного к проводнику;

- Комплексная амплитуда плотности полного тока  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_{eddy}$ , плотности стороннего тока  $\mathbf{j}_0$  и плотности вихревого тока  $\mathbf{j}_{eddy} = i\omega g \mathbf{A}$ .

- Комплексный вектор магнитной индукции  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ :

$B_x = \partial A / \partial y$ ,  $B_y = -\partial A / \partial x$  - для плоскопараллельных задач,

$B_z = \partial(rA) / (r\partial r)$ ,  $B_r = -\partial A / \partial z$  - для осесимметричных задач.

- Комплексный вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H} = \boldsymbol{\mu}^{-1} \mathbf{B}$ , где  $\boldsymbol{\mu}$  - тензор магнитной проницаемости.

- Среднее и максимальное значение удельной мощности тепловыделения

$$Q = g^{-1} j^2.$$

- Среднее и максимальное значение плотности энергии магнитного поля

$$w = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) / 2.$$

- Среднее значение вектора Пойнтинга (плотность потока энергии)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

- Среднее значение вектора плотности силы Лоренца

$$\mathbf{F} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

- Магнитная проницаемость (наибольшая компонента в анизотропной среде).

- Электрическая проводимость  $g$ .

Интегральные величины:

- Комплексная амплитуда тока через заданную поверхность

$$I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}.$$

и ее сторонняя  $I_0$  и вихревая  $I_{eddy}$  компоненты;

- Среднее и максимальное значение мощности тепловыделения (омических потерь) в заданном объеме

$$Q = \int g^{-1} j^2 dV.$$

- Среднее и максимальное значение энергии магнитного поля в заданном объеме

$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dV.$$

- Среднее и максимальное значение потока электромагнитной мощности (потока вектора Пойнтинга) через заданную поверхность

$$S = \int (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) ds.$$

- Среднее значение пондеромоторной силы (и амплитуда ее колебательной части), действующей на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{H}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{B}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{n}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})) ds,$$

где интегрирование ведется по поверхности окружающей заданный объем, а  $\mathbf{n}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности.

- Среднее и максимальное значение вращающего момента пондеромоторной силы, действующей на тела, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \oint ((\mathbf{r} \times \mathbf{H})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{B})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) - (\mathbf{r} \times \mathbf{n})(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B})) ds,$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки интегрирования.

- Среднее значение и амплитуда колебательной части силы Лоренца, действующей на проводники с током, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV.$$

- Среднее и максимальное значение вращающего момента силы Лоренца, действующей на проводники с током, заключенные в заданном объеме

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{r} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})) dV,$$

где  $\mathbf{r}$  - радиус-вектор точки интегрирования.

Вектор вращающего момента параллелен оси  $z$  в плоской постановке и тождественно равен нулю в осесимметричном случае. Момент вычисляется относительно начала координат. Момент относительно любой другой точки может быть получен добавлением слагаемого  $\mathbf{F} \times \mathbf{r}_0$ , где  $\mathbf{F}$  - полное значение силы и  $\mathbf{r}_0$  - радиус-вектор точки.

Замечание. Магнитное поле порождает силы, действующие на проводники с током и ферромагнитные тела. Сила, действующая на проводники, известна под названием силы Лоренца, в то время как сила, вычисленная путем интегрирования тензора Максвелла, включает в себя обе компоненты. Если вторая (ферромагнитная) компонента отсутствует или пренебрежимо мала, рекомендуется вычислять электромагнитную силу как силу Лоренца. Точность ее вычисления менее чувствительна к выбору контура интегрирования, и Вы можете просто выбрать блок, соответствующий проводнику, при построении контура интегрирования для вычисления силы. При вычислении полной пондеромоторной силы такой выбор контура

приведет к весьма неточным результатам, и рекомендуется избегать соприкосновения вашего контура с границами раздела сред.

Область интегрирования определяется как разомкнутый или замкнутый контур в плоскости модели, состоящий из отрезков и дуг окружности.

### *Вычисление импеданса*

Импедансом в теории переменных токов называется комплексный коэффициент пропорциональности между комплексными значениями тока и напряжения,  $V=ZI$ . Его действительная часть представляет собой активное сопротивление проводника, вычисленное с учетом эффекта вытеснения тока (скин-эффекта), мнимая часть импеданса есть индуктивность, умноженная на угловую частоту:

$$Z = R + i\omega L.$$

Поскольку значения напряжения и тока Вы можете легко получить в окне анализа результатов расчета, импеданс вычисляется путем деления напряжения на ток по правилам комплексной арифметики. Пусть  $V$  и  $I$  - амплитудные значения напряжения и тока,  $\phi_V$  и  $\phi_I$  - фазы этих величин. Тогда активное сопротивление вычисляется как

$$R = V \cos(\phi_V - \phi_I) / I$$

и индуктивность

$$L = V \sin(\phi_V - \phi_I) / (\omega I).$$

Чтобы вычислить взаимную индуктивность между двумя проводниками, Вы можете задать ненулевой полный ток в одном из них, оставить концы второго проводника разомкнутыми (т.е. задать нулевой полный ток) и измерить напряжение, развиваемое на концах второго проводника под действием тока, протекающего в первом.

Замечание. Поскольку в плоском случае напряжение прикладывается и измеряется на единицу осевой длины, вычисленный импеданс также будет иметь погонный смысл.

## **Варианты заданий**

### **Вариант №1.**

Рассчитать магнитное поле подковообразного постоянного магнита.

Предмет моделирования - подковообразный постоянный магнит.

Тип задачи: плоскопараллельная задача магнитостатики.

Геометрия магнита: рис.1.32. Все размеры даны в миллиметрах.

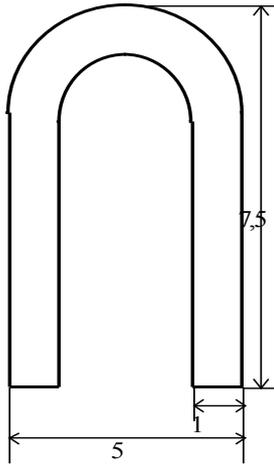


Рис. 1.32

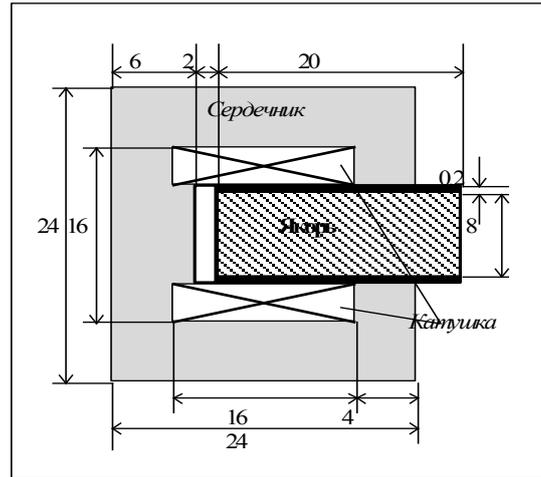


Рис. 1.33

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость воздуха  $\mu = 1$ , магнита  $\mu = 1000$ .
- Коэрцитивная сила магнита  $H_c = 10000$  А/м.
- Направление намагничивания совпадает с осью магнита.

Начальные действия:

- Чтобы исключить влияние границ расчетной области при моделировании физически неограниченной задачи, необходимо окружить магнит воздушным прямоугольником на достаточно большом удалении и задать нулевое граничное условие Дирихле на его сторонах.
- Намагниченность прямых участков магнита задать в терминах вектора коэрцитивной силы. Намагниченность средней криволинейной части магнита моделировать при помощи специально подобранных значений поверхностных токов.

## Вариант №2.

Рассчитать магнитное поле в соленоиде и определить тяговое усилие, приложенное к якорю.

Предмет моделирования: плунжерный электромагнит.

Исполнительный орган в виде соленоидального плунжерного электромагнита состоит из обмотки, окруженной ферромагнитным сердечником, и якоря в виде плунжера.

Тип задачи: нелинейная осесимметричная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.33. Все размеры даны в миллиметрах.

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость воздуха и катушки  $\mu = 1$ .
- Плотность тока в катушке  $j=1000000$  А/м<sup>2</sup>.

- Характеристика намагничивания для материала сердечника и якоря:

$H$ , А/м	0	460	640	720	890	1280	1900	3400	6000
$B$ , Тл	0	0.80	0.95	1.00	1.10	1.25	1.40	1.55	1.65

- Магнитная система соленоида полностью замкнута, поэтому внешнюю границу модели можно поместить относительно близко к сердечнику соленоида. Более протяженный слой воздуха включить в модель со стороны якоря, поскольку в этой зоне нельзя пренебречь выпучиванием поля.
- Плотность сетки можно выбрать по умолчанию, однако, для улучшения распределения сетки в модель следует включить три дополнительных вершины: одну из них поместить на внутреннюю поверхность катушки вблизи угла якоря, две другие - против углов сердечника на обеих сторонах якоря.
- Замкнутый контур для вычисления силы должен окружать якорь. Следует поместить его в середину воздушного зазора между якорем и сердечником. Определяя контур интегрирования, используйте сильное увеличение масштаба, чтобы избежать прилипания линий контура к сторонам модели.

**Варианты №3-10** составлены д.т.н., профессором Чечуриным В.Л. и Любимцевым А.С.(С-Петербургский Государственный Технический Университет, кафедра Теоретических Основ Электротехники) и распространяются в Internet (<http://ftp.tor.ru/quickfield/courses/toe/>).

### Вариант №3.

Построить график зависимости напряженности магнитного поля от расстояния от центра катушки при наличии стального сердечника и без него.

Предмет моделирования: цилиндрическая катушка.

Тип задачи: линейная осесимметричная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.34. Все размеры даны в миллиметрах.

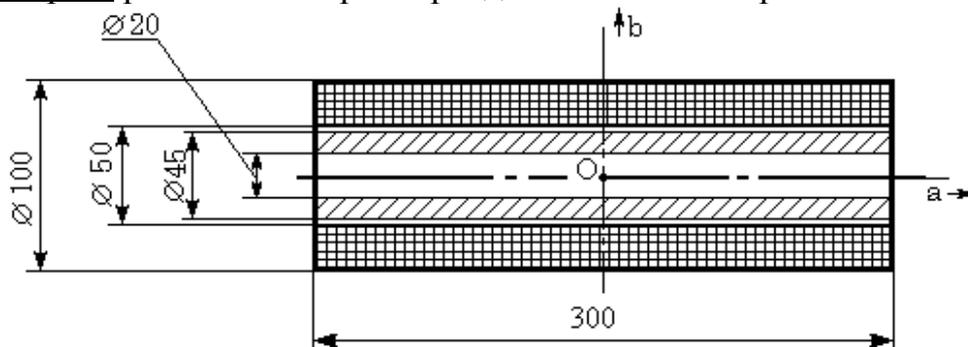


Рис.1.34

Дано:

- Плотность тока в обмотке  $j=100000 \text{ А/м}^2$ .
- Относительная магнитная проницаемость воздуха и меди обмотки  $\mu=1$ , стали сердечника  $\mu=500$ .
- На вертикальной оси симметрии (линия  $Ob$ ) имеем  $H_t = 0$ . На горизонтальной оси симметрии  $Oa - B_n=0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $Oa A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .
- На линии  $Oa$  также имеем  $A=0$  в силу непрерывности  $A$ .

#### **Вариант №4.**

Определить зависимость значения взаимной индуктивности соосных цилиндрических катушек от расстояния  $X$  между ними.

Предмет моделирования: соосные цилиндрические катушки.

Тип задачи: линейная осесимметричная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.35. Все размеры даны в миллиметрах.

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость воздуха и меди обмоток  $\mu=1$ .
- Плотность тока в обмотке левой катушки  $j=100000 \text{ А/м}^2$ .
- В правой катушке тока нет, и на картину поля она не влияет.
- На вертикальной оси симметрии (линия  $Ob$ ) имеем  $H_t = 0$ . На горизонтальной оси симметрии  $Oa - B_n=0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $Oa A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .
- На линии  $Oa$  также имеем  $A=0$  в силу непрерывности  $A$ .
- Величина взаимной индуктивности  $M$  - отношение потока, сцепляющегося со всеми витками второй катушки  $Y$ , к току в первой катушке  $J$  (который создает поток):  $M=Y/J$ , где  $Y=\Phi \cdot w$ ,  $w$  - число витков правой катушки,  $\Phi$  - поток через правую катушку, суммарный ток равен

$$J=j \cdot S_{\text{сеч}}=100000 \text{ А/м}^2 \cdot 0.000875 \text{ м}^2=87.5 \text{ А.}$$

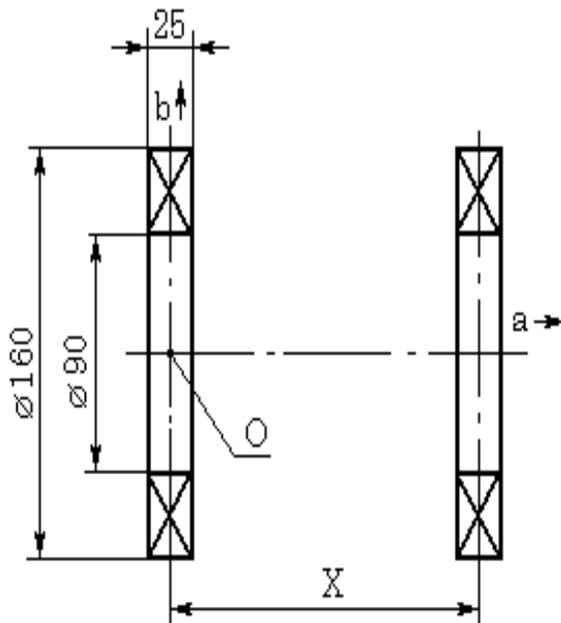


Рис.1.35

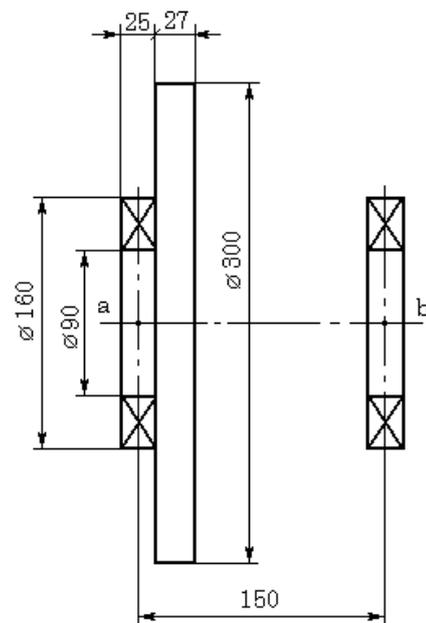


Рис.1.36

### Вариант №5.

Определить силу, действующую на катушки с током, при наличии стального экрана, алюминиевого экрана между ними и без него.

Предмет моделирования: соосные цилиндрические катушки.

Тип задачи: линейное плоскопараллельное гармоническое электромагнитное поле.

Геометрия: рис.1.36. Все размеры даны в миллиметрах.

Дано:

- Плотность тока в обмотке  $j=100000 \text{ А/м}^2$ .
- Относительная магнитная проницаемость воздуха, меди обмоток и алюминия  $\mu=1$ , экрана  $\mu=1000$ .
- Удельная электропроводность стали  $\sigma=10^7 \text{ Ом/м}$ , алюминия  $\sigma=3.7 \cdot 10^7 \text{ Ом/м}$ .
- Катушки намотаны изолированным проводом, поэтому проводимость материала катушек в поперечном направлении равна  $\sigma=0 \text{ Ом/м}$ .
- На горизонтальной оси симметрии (линия  $ab$ ) имеем  $B_n=0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $ab$   $A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .
- На линии  $ab$  также имеем  $A=0$  в силу непрерывности  $A$ .

### Вариант №6.

Определить коэффициент экранирования магнитного поля экраном. Рассмотреть стальной и медный сферические экраны.

Предмет моделирования: стальной и медный сферические экраны.

Тип задачи: линейная осесимметричная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.37. Все размеры даны в миллиметрах. Экран состоит из двух половинок. Пунктиром показано возможное расположение щели в теле экрана. Щель может быть увеличена с помощью немагнитных прокладок до 2 мм.

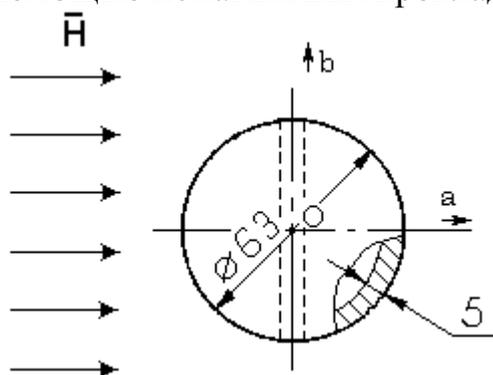


Рис.1.37

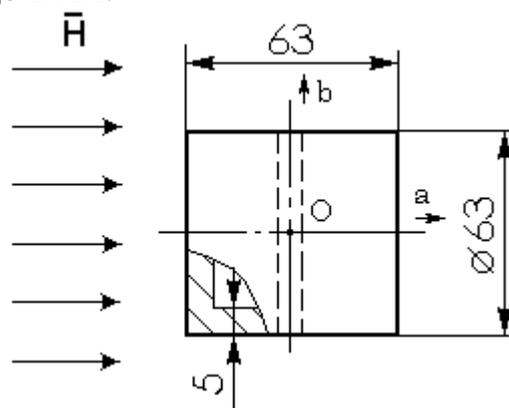


Рис.1.38

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость воздуха и меди  $\mu=1$ , стали  $\mu=1000$ .
- Однородное магнитное поле с индукцией  $B=0.139$  Тл.
- На вертикальной оси симметрии (линия  $Ob$ ) имеем  $H_t = 0$ . На горизонтальной оси симметрии  $Oa$  -  $B_n=0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $Oa$   $A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .
- На линии  $Oa$  также имеем  $A=0$  в силу непрерывности  $A$ .
- Так как поле однородное, то на правой границе области расчета такое же условие как на левой границе -  $H_t = 0$ .
- На верхней границе принимаем условие  $A=0.0695$
- Коэффициент экранирования – отношение индукции однородного магнитного поля вне экрана к индукции магнитного поля внутри экрана.

**Вариант №7.** <http://ftp.tor.ru/quickfield/courses/toe/rus/lab4.htm>

Определить коэффициент экранирования магнитного поля экраном. Рассмотреть стальной и медный цилиндрические экраны.

Предмет моделирования: стальной и медный цилиндрические экраны.

Тип задачи: линейная осесимметричная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.38. Все размеры даны в миллиметрах. Экран состоит из двух половинок. Пунктиром показано возможное расположение щели в теле экрана. Щель может быть увеличена с помощью немагнитных прокладок до 2 мм.

Дано: см. **Вариант №6.**

### **Вариант №8.**

Построить магнитное поле машины постоянного тока в области, не заполненной сталью. Рассчитать коэффициент рассеяния полюсов. Обмотку задать распределенными токами, магнитная проницаемость стали конечная.

Предмет моделирования: электрическая машина постоянного тока.

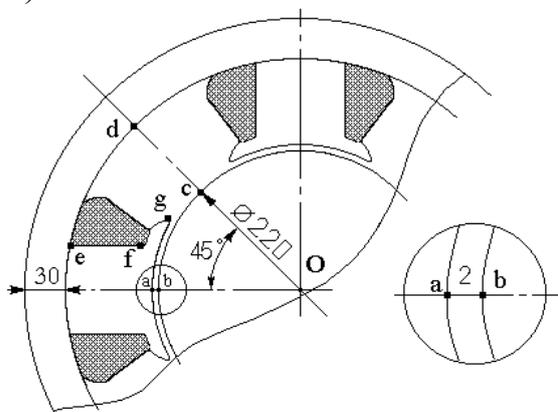
Тип задачи: линейная плоскопараллельная задача магнитостатики.

Геометрия: рис.1.39 а), б). Все размеры даны в миллиметрах. Воздушная область расчета поля ограничена контуром  $abcdefg$ . Заданные размеры:  $ab=2$  мм,  $ag=32^\circ$ ,  $cd=68$  мм,  $bc=45^\circ$ ,  $de=30^\circ$ ,  $ef=55$  мм. Действие оставшейся части учитываем граничными условиями.

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость стали ротора и статора  $\mu=1000$ , воздуха  $\mu=1$ .
- Плотность тока в обмотке  $j=1000000$  А/м<sup>2</sup>.
- Мощность машины 4.5 кВт.
- В силу симметрии машины на линии  $Od$  имеем  $H_t = 0$ , на линии  $Oa$  -  $A=0$ .
- Коэффициент рассеяния полюса - отношение потока рассеяния (не входит в ротор) к полному потоку полюса.

а)



б)

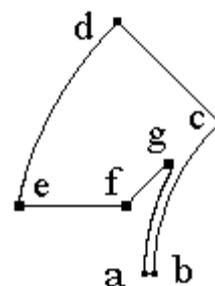


Рис.1.39

### Вариант №9.

Построить график зависимости распределения плотности тока по линии  $Oa$  для медных стержней.

Предмет моделирования: длинные параллельные медные стержни.

Тип задачи: линейное плоскопараллельное гармоническое электромагнитное поле.

Геометрия: рис.1.40. Все размеры даны в миллиметрах.

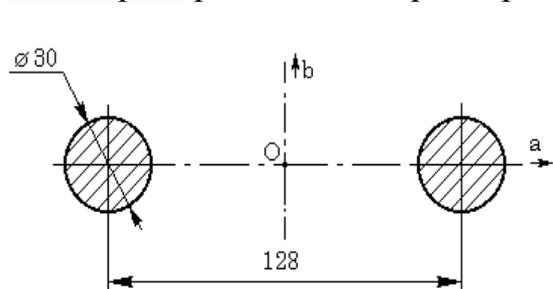


Рис.1.40

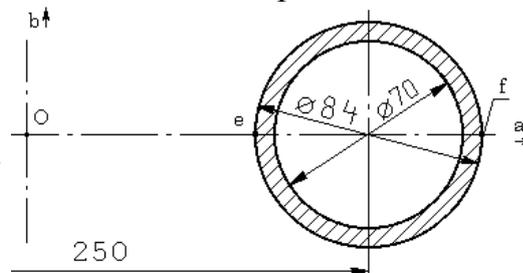


Рис.1.41

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость меди и воздуха  $\mu=1$ .
- Величина суммарного тока  $J=300$  А.
- Частота тока  $f=50$  Гц.
- Удельная электропроводность меди  $\sigma=57000000$  Ом/м.
- На вертикальной оси симметрии (линия  $Ob$ ) имеем  $B_n=0$ . На горизонтальной оси симметрии  $Oa$  -  $H_t=0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $Ob$   $A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .

### Вариант №10.

Построить график зависимости распределения плотности тока по периметру стальных труб (от точки  $e$  к точке  $f$ ).

Предмет моделирования: длинные параллельные стальные трубы.

Тип задачи: линейное плоскопараллельное гармоническое электромагнитное поле.

Геометрия: рис.1.41. Все размеры даны в миллиметрах.

Дано:

- Относительная магнитная проницаемость воздуха  $\mu=1$ , стали  $\mu=100$ .
- Величина суммарного тока  $J=300$  А.
- Частота тока  $f=50$  Гц.
- Удельная электропроводность стали  $\sigma=10000000$  Ом/м.

- На вертикальной оси симметрии (линия  $Ob$ ) имеем  $B_n=0$ . На горизонтальной оси симметрии  $Oa - H_t = 0$ .
- Записывая выражение  $\mathbf{B}=\text{rot}\mathbf{A}$  в цилиндрической системе координат, получаем на оси  $Ob A=\text{const}$ .
- На бесконечности поле сильно ослабевает, поэтому принимаем  $A=0$ .

### Пример выполнения задания

Рассчитать поле магнитной системы с постоянными магнитами.

Предмет моделирования: постоянный магнит со стальным сердечником и якорем.

Тип задачи: нелинейная плоскопараллельная задача магнитостатики.

Геометрия модели: рис.1.42. Все размеры указаны в миллиметрах.

Дано:

- Постоянные магниты изготовлены из сплава АЛНИКО, коэрцитивная сила составляет 147218 А/м.
- Магниты намагничены в вертикальном направлении противоположно друг другу.
- В табл.1.5 задана кривая размагничивания для сплава АЛНИКО:

Табл.1.5

H (А/м)	-147218	-119400	-99470	-79580	-53710	-19890	0.0
B (Тл)	0.0	0.24	0.4	0.5	0.6	0.71	0.77

- В таблице 1.6 задана кривая намагничивания стали:

Табл.1.6

H (А/м)	400	600	800	1000	1400	2000	3000	4000	6000
B (Тл)	0.73	0.92	1.05	1.15	1.28	1.42	1.52	1.58	1.60

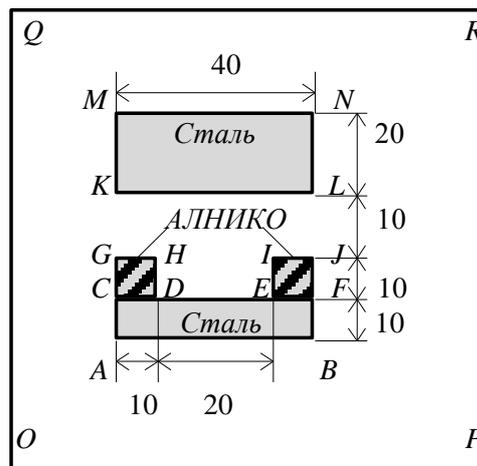


Рис. 1.42

Для решения задачи необходимо выполнить следующую последовательность операций.

1. Создайте новую задачу с именем *Magn1.pbm*.

2. Введите следующие свойства задачи:
  - В списке *Тип задачи* выберите *Магнитостатика*;
  - В пункте *Класс модели* выберите опцию *Плоская*;
  - В пункте *Единицы измерения* выберите *Миллиметры*;
  - В качестве имени файла модели и физических свойств выберите *Magn1.mod* и *Magn1.dms* соответственно.
3. Создайте ребра, образующие геометрическую модель задачи.
4. Присвойте метки геометрическим объектам для описания свойств материалов, источников поля и граничных условий. Задача
  - Задача содержит четыре материала с различными свойствами: воздух, сталь и два постоянных магнита с различным направлением вектора намагничивания. Присвойте метки *АЛНИКО-*, *АЛНИКО*, *Воздух*, *Сталь* блокам *CDHG*, *EFJ*, *OPRQ*, *ABFC+KLNМ* соответственно.
  - Метки ребер используются для задания граничных условий на внешних и внутренних границах области. В этой задаче необходимо задать нулевое граничное условие Дирихле на внешней границе модели (прямоугольник *OPRQ*). Присвойте метку *Ноль* четырем ребрам, которые образуют прямоугольник *OPRQ*.
  - Присвоение меток геометрическим объектам закончено.
5. Задайте значения шага дискретизации, чтобы определить густоту сетки конечных элементов. Можно предположить существенную неоднородность поля вокруг магнитов, поэтому сетка здесь должна быть максимальной густоты. Задайте величину шага дискретизации 5 мм в вершинах *G*, *H*, *I*, *J* и 12 мм в вершинах *O*, *P*, *R*, *Q*.
6. Постройте сетку конечных элементов во всех блоках модели
7. Для свойств блока с меткой *Воздух* введите значение относительной магнитной проницаемости, равное 1.
8. Для свойств блоков с меткой *Сталь* включите флажок *Нелинейный материал*, введите таблицу зависимости *B(H)* (табл.1.6) для стали.
9. Для свойств блока с меткой *АЛНИКО+* введите значение относительной магнитной проницаемости, равное 1; в поле *Величина для коэрцитивной силы* введите 147218, в поле *Направление* введите 90, включите флажок *Нелинейный материал*, введите таблицу зависимости *B(H)* (табл.1.5) для *АЛНИКО*.
10. Для свойств блока с меткой *Воздух* введите значение относительной магнитной проницаемости, равное 1.

11. Для свойств блоков с меткой *Сталь* включите флажок *Нелинейный материал*, введите таблицу зависимости  $B(H)$  (табл.1.6) для стали.

12. Для свойств блока с меткой *АЛНИКО+* введите значение относительной магнитной проницаемости, равное 1; в поле *Величина для коэрцитивной силы* введите 147218, в поле *Направление* введите 90, включите флажок *Нелинейный материал*, введите таблицу зависимости  $B(H)$  (табл.1.5) для *АЛНИКО*.

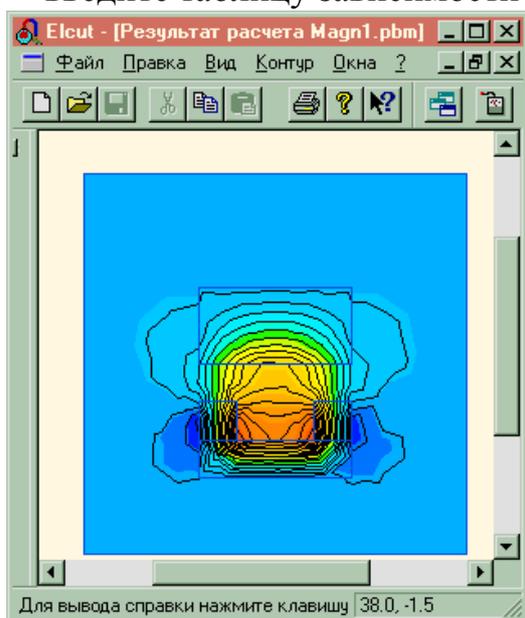


Рис.1.43

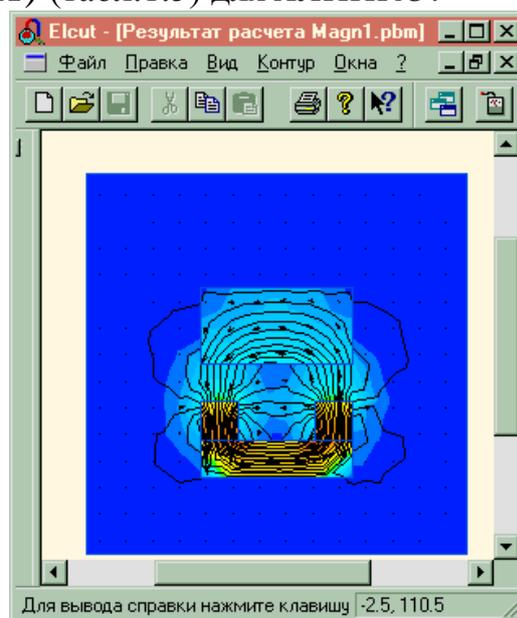


Рис.1.44

13. Для свойств блока с меткой *АЛНИКО-* введите значение относительной магнитной проницаемости, равное 1, в поле *Величина для коэрцитивной силы* введите 147218, в поле *Направление* введите -90, включите флажок *Нелинейный материал*, введите таблицу зависимости  $B(H)$  (табл.1.5) для *АЛНИКО*.

14. Для свойств ребер с меткой *Ноль* включите флажок *Магнитный потенциал:  $A=A_0$*  и задайте в полях ввода нулевые значения.

15. Решите задачу и просмотрите результаты решения для магнитного потока  $\Phi$  и индукции  $B$  (рис.1.43 , рис.1.44).

## 1.7. Лабораторная работа №5.

### Решение связанных задач методом конечных элементов

**Цель работы:** приобретение навыков в решении связанных задач методом конечных элементов с использованием персонального компьютера.

**Литература:** [10].

#### Краткие сведения из теории

ELCUT позволяет переносить источники поля (распределенные нагрузки), рассчитанные в одной задаче, в задачи другого типа. Предусмотрены следующие типы связи между задачами:

- Расчет поля температур, обусловленного джоулевыми потерями в задаче растекания токов или задаче магнитного поля переменных токов.
- Анализ механических напряжений с учетом рассчитанного распределения температуры.
- Расчет механических напряжений, вызванных магнитными силами.
- Расчет механических напряжений, вызванных электростатическими силами.

В связанной задаче, в дополнение к источникам (нагрузкам), перенесенным из другой задачи, могут быть заданы прочие источники, как в обычной задаче.

Возможно совмещение разных типов связи в одной задаче. Например, после расчета растекания токов, электростатических и магнитных полей в разных задачах, использующих один и тот же файл геометрии модели, можно рассчитать распределение температуры, вызванное джоулевыми потерями, а затем - механические напряжения, вызванные действием температурных деформаций, электростатической и магнитной силой одновременно.

В дальнейшем изложении задачу, из которой переносятся данные, назовем задачей-источником, а задачу, в которую переносятся данные - целевой задачей.

ELCUT накладывает некоторые ограничения на связанные задачи:

- Как задача-источник, так и целевая задача должны использовать один и тот же файл геометрии модели.
- Обе задачи должны использовать одну и ту же систему координат (декартову или цилиндрическую).
- К моменту решения целевой задачи задача-источник должна быть решена.

Замечание. Несмотря на требование единого файла модели для обеих задач, их расчетная область может не совпадать, поскольку часть подобластей, используемая в одной задаче, может быть исключена из рассмотрения в другой.

#### *Учет джоулевых потерь в тепловой задаче*

При переносе данных из задачи растекания электрических токов в тепловую задачу мощность тепловыделения рассчитывается по закону Джоуля-Ленца. Джоулевы потери учитываются в каждой подобласти, включенной в рассмотрение в обеих задачах. При переносе данных из задачи магнитного поля переменных токов, джоулевы потери рассматриваются во всех проводящих областях.

#### *Учет распределения температур в задаче теории упругости*

При расчете термических деформаций по полю температур, перенесенному из тепловой задачи, начальные деформации учитываются в каждой подобласти, включенной в рассмотрение в обеих задачах, если в подобласти задано ненулевое значение коэффициента теплового расширения (или хотя бы одной из его компонент в анизотропном случае).

#### *Учет магнитных сил в задаче теории упругости*

При переносе магнитных сил в задачу теории упругости:

- Объемные силы учитываются во всех подобластях, включенных в рассмотрение в обеих задачах, если подобласть обладает нелинейными магнитными свойствами, или в подобласти протекает ток (по закону Лоренца).
- Поверхностные силы учитываются на всех границах, разделяющих подобласти с разными магнитными свойствами, границах, несущих поверхностный ток, или внешних границах области (в смысле магнитной задачи). Поверхностная сила учитывается даже в том случае, если подобласть, к примеру, слева от границы исключена из рассмотрения в магнитной задаче, а подобласть справа - в механической.

#### *Учет электростатических сил в задаче теории упругости*

При переносе электростатических сил в задачу теории упругости:

- Объемные силы учитываются во всех подобластях, включенных в рассмотрение в обеих задачах, если в подобласти задана плотность распределенного заряда.
- Поверхностные силы учитываются на всех границах, разделяющих подобласти с разной диэлектрической

проницаемостью, границах, несущих поверхностный заряд, или внешних границах области в смысле электростатической задачи. Поверхностная сила учитывается даже в том случае, если подобласть, к примеру, слева от границы исключена из рассмотрения в электростатической задаче, а подобласть справа - в механической.

## Варианты заданий

### Вариант №1.

Рассчитать распределение температуры в спирали и на подошве утюга.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, расположенная в подошве электрического утюга.

Тип задачи: плоскопараллельная электротермическая задача.

Геометрия: рис.1.20.

Дано:

- Коэффициент теплопроводности спирали (нихром Х15Н60)  $\lambda=24.1$  Вт/(К·м), подошвы утюга (алюминиевый сплав)  $\lambda=163$  Вт/(К·м);
- Коэффициент теплоотдачи спирали  $800$  Вт/(К·м<sup>2</sup>);
- Температура внешней среды  $T_0=297$  К.
- Выполнить вариант №1 лабораторной работы №3, предварительно окружив нагревательный прибор достаточно большим слоем воздуха (это необходимо сделать для последующего расчета температурного поля), при решении задачи исключить воздух из рассмотрения. Задать связь задач растекания токов и расчета температурного поля.
- Для задачи теплопроводности задать условие нулевого теплового потока через боковые сечения спирали  $A$  и  $B$ , условие конвективного теплообмена через остальную границу спирали и условие заданной температуры  $T_0$  по внешней границе воздушного прямоугольника.

### Вариант №2.

Рассчитать распределение температуры в спирали и на керамическом основании электрической плитки.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, расположенная в керамическом основании электрической плитки.

Тип задачи: плоскопараллельная электротермическая задача.

Геометрия: рис.1.21.

Дано:

- Коэффициент теплопроводности спирали (нихром Х15Н60)  $\lambda=24.1$  Вт/(К·м), керамического основания (огнеупорная глина)  $\lambda=1,04$  Вт/(К·м);
- Коэффициент теплоотдачи спирали  $800$  Вт/(К·м<sup>2</sup>);
- Температура внешней среды  $T_0=297$  К.
- Выполнить вариант №2 лабораторной работы №3, предварительно окружив нагревательный прибор достаточно большим слоем воздуха (это необходимо сделать для последующего расчета температурного поля), при решении задачи исключить воздух из рассмотрения. Задать связь задач растекания токов и расчета температурного поля.
- Для задачи теплопроводности задать условие нулевого теплового потока через боковые сечения спирали  $A$  и  $B$ , условие конвективного теплообмена через остальную границу спирали и условие заданной температуры  $T_0$  по внешней границе воздушного прямоугольника.

### **Вариант №3.**

Рассчитать распределение температуры в спирали, на миканитовой пластине и подошве утюга.

Предмет моделирования: проволочная нагревательная спираль, навитая на пластину из миканита, расположенную в подошве электрического утюга.

Тип задачи: плоскопараллельная электротермическая задача.

Геометрия: рис.1.22.

Дано:

- Коэффициент теплопроводности спирали (нихром Х15Н60)  $\lambda=24.1$  Вт/(К·м), миканита  $\lambda=0,21$  Вт/(К·м), подошвы утюга (алюминиевый сплав)  $\lambda=163$  Вт/(К·м);
- Коэффициент теплоотдачи спирали  $1000$  Вт/(К·м<sup>2</sup>);
- Температура внешней среды  $T_0=297$  К.
- Выполнить вариант №3 лабораторной работы №3, предварительно окружив нагревательный прибор достаточно большим слоем воздуха (это необходимо сделать для последующего расчета температурного поля), при решении задачи исключить воздух из рассмотрения. Задать связь задач растекания токов и расчета температурного поля.
- Для задачи теплопроводности задать условие нулевого теплового потока через боковые сечения спирали  $A$  и  $B$ , условие конвективного теплообмена через остальную границу спирали и

условие заданной температуры  $T_0$  по внешней границе воздушного прямоугольника.

#### **Вариант №4.**

Рассчитать распределение температуры в нагревательном элементе, оболочке чайника, воздухе и воде.

Предмет моделирования: нагревательный элемент электрического чайника.

Тип задачи: плоскопараллельная электротермическая задача.

Геометрия: рис.1.23.

Дано:

- Коэффициент теплопроводности нагревательного элемента (нихром Х15Н60)  $\lambda=24.1$  Вт/(К·м), воздуха - см.табл.1.2.1, воды - см.табл.1.7, материала чайника (алюминиевый сплав)  $\lambda=163$  Вт/(К·м);
- Коэффициент теплоотдачи нагревательного элемента 800 Вт/(К·м<sup>2</sup>);
- Температура внешней среды  $T_0=297$  К.
- Выполнить вариант №4 лабораторной работы №3, предварительно окружив нагревательный прибор достаточно большим слоем воздуха (это необходимо сделать для последующего расчета температурного поля), при решении задачи исключить воздух из рассмотрения. Задать связь задач растекания токов и расчета температурного поля.
- Для задачи теплопроводности задать условие нулевого теплового потока через боковые сечения спирали  $A$  и  $B$ , условие конвективного теплообмена через остальную границу спирали и условие заданной температуры  $T_0$  по внешней границе воздушного прямоугольника.

Табл. 1.7

$T, K$	283	293	303	313	323	333	343	353	363	373
$\lambda, \text{Вт}/(\text{К}\cdot\text{м})$	5745	5990	6180	6340	6480	6590	6680	6750	6800	6830

#### **Вариант №5.**

Рассчитать распределение температуры в нагревательном элементе, стекле, воздухе и воде.

Предмет моделирования: нагревательный элемент электрического кипятивильника.

Тип задачи: плоскопараллельная электротермическая задача.

Геометрия: рис.1.24.

Дано:

- Коэффициент теплопроводности нагревательного элемента (нихром Х15Н60)  $\lambda=24.1$  Вт/(К·м), воздуха - см.табл.1.2.1, воды - см.табл.5.3.1, стекла  $\lambda=0,745$  Вт/(К·м);
- Коэффициент теплоотдачи нагревательного элемента  $800$  Вт/(К·м<sup>2</sup>);
- Температура внешней среды  $T_0=297$  К.
- Выполнить вариант №5 лабораторной работы №3, предварительно окружив нагревательный прибор достаточно большим слоем воздуха (это необходимо сделать для последующего расчета температурного поля), при решении задачи исключить воздух из рассмотрения. Задать связь задач растекания токов и расчета температурного поля.
- Для задачи теплопроводности задать условие нулевого теплового потока через боковые сечения спирали  $A$  и  $B$ , условие конвективного теплообмена через остальную границу спирали и условие заданной температуры  $T_0$  по внешней границе воздушного прямоугольника.

#### **Вариант №6.**

Рассчитать механические напряжения, вызванные электростатическими силами в проводе с 19-ти проволочной жилой.

Предмет моделирования: провод с 19-ти проволочной жилой.

Тип задачи: плоскопараллельная электроупругая задача.

Геометрия: рис.1.25.

Дано:

- Модуль Юнга ПВХ-пластиката  $E=0.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона ПВХ-пластиката  $\nu=0$ .
- Предварительно выполнить вариант №6 лабораторной работы №3, задать связь задач электростатики и напряженно-деформированного состояния.
- Задать фиксированные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  на внешней границе провода.

#### **Вариант №7.**

Рассчитать механические напряжения, вызванные электростатическими в 3-х жильном алюминиевом проводе.

Предмет моделирования: трехжильный провод с алюминиевыми жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная электроупругая задача.

Геометрия: рис.1.26.

Дано:

- Модуль Юнга хлопчатобумажной ткани  $E=0.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, пленки  $E=0.25 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, резины  $E=0.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона х/б ткани  $\nu=0$ , пленки  $\nu=0$ , резины  $\nu=0$ .
- Предварительно выполнить вариант №7 лабораторной работы №3, задать связь задач электростатики и напряженно-деформированного состояния.
- Задать фиксированные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  на внешней границе провода.

### **Вариант №8.**

Рассчитать механические напряжения, вызванные электростатическими в четырехжильном проводе с алюминиевыми жилами.

Предмет моделирования: четырехжильный провод с алюминиевыми жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная электроупругая задача.

Геометрия: рис.1.27

- Модуль Юнга хлопчатобумажной ткани  $E=0.3 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, ПВХ-пластиката  $E=0.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, резины  $E=0.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона х/б ткани  $\nu=0$ , ПВХ-пластиката  $\nu=0$ , резины  $\nu=0$ .
- Предварительно выполнить вариант №8 лабораторной работы №3, задать связь задач электростатики и напряженно-деформированного состояния.
- Задать фиксированные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  на внешней границе провода.

### **Вариант №9.**

Рассчитать механические напряжения в проводе с семипроволочной жилой.

Предмет моделирования: провод с семипроволочной жилой.

Тип задачи: плоскопараллельная электроупругая задача.

Геометрия: рис.1.28.

Дано:

- Модуль Юнга хлопчатобумажной ткани  $E=0.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, ПВХ-пластиката  $E=0.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона х/б ткани  $\nu=0$ , ПВХ-пластиката  $\nu=0$ .
- Предварительно выполнить вариант №9 лабораторной работы №3, задать связь задач электростатики и напряженно-деформированного состояния.
- Задать фиксированные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  на внешней

границе провода.

### **Вариант №10.**

Рассчитать механические напряжения в двухжильном проводе с медными жилами.

Предмет моделирования: двухжильный провод с медными жилами.

Тип задачи: плоскопараллельная электроупругая задача.

Геометрия: рис.1.29.

Дано:

- Модуль Юнга резины  $E=0.5 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>, ПВХ-пластиката  $E=0.78 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона резины  $\nu=0$ , ПВХ-пластиката  $\nu=0$ .
- Предварительно выполнить вариант №10 лабораторной работы №3, задать связь задач электростатики и напряженно-деформированного состояния.
- Задать фиксированные перемещения по осям  $Ox$  и  $Oy$  на внешней границе провода.

### **Пример выполнения задания**

Рассчитать распределение магнитного поля и механических напряжений в катушке.

Предмет моделирования: достаточно длинный толстостенный цилиндрический соленоид, равномерно обтекаемый током в окружном направлении.

Тип задачи: осесимметричная совмещенная магнитоупругая задача.

Геометрия: рис.1.45 а).

Дано:

- Размеры катушки  $R_1=1$  см,  $R_2=2$  см;
- Относительная магнитная проницаемость воздуха и катушки  $\mu=1$ ;
- Плотность тока в катушке  $j=1000000$  А/м<sup>2</sup>;
- Модуль Юнга  $E=1.075 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.33$ .

а)

б)

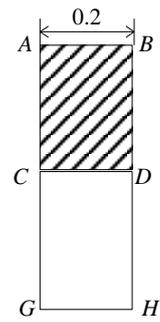
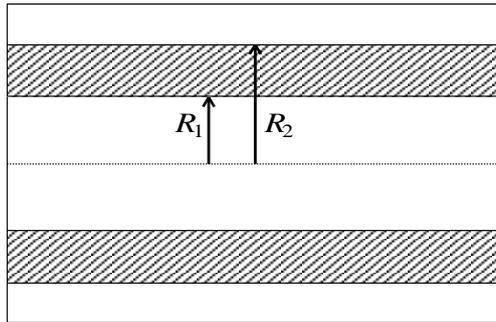


Рис.1.45

Поскольку никакие физические величины не зависят от координаты  $z$ , задача является одномерной, и мы можем в качестве модели выбрать тонкий срез соленоида.

Установим произвольно осевую длину соленоида равной 0.2 см (рис.1.45 б).

Пренебрежем внешним полем соленоида и положим радиальную компоненту индукции на внешней поверхности катушки равной нулю.

Механическое смещение в осевом направлении на боковых сторонах катушки зададим равным нулю, чтобы отразить влияние отброшенных бесконечных частей катушки.

Далее выполняется следующая последовательность действий.

1. Создайте новую задачу с именем *Coupl1ms.pbm*.
2. Введите следующие свойства задачи:
  - В списке *Тип задачи* выберите *Магнитостатика*;
  - В пункте *Класс модели* выберите опцию *Осесимметричная*;
  - В пункте *Единицы измерения* выберите *Сантиметры*;
  - В качестве имени файла геометрии модели и физических свойств выберите *Coupl1.mod* и *Coupl1ms.dms* соответственно.
3. Создайте ребра, образующие геометрическую модель задачи.
4. Присвойте метку *Воздух* прямоугольнику *CDHG*, метку *Обмотка* прямоугольнику *ABCD*, метку *Внешнее AB*, метку *Осевое закр.* ребрам *AC* и *BD*.
5. Задайте шаг дискретизации 0.025 см в любой вершине модели.
6. Постройте сетку конечных элементов во всех блоках модели.
7. Для свойств блока с меткой *Воздух* введите 1 в любое поле для компонентов тензора относительной магнитной проницаемости.
8. Для свойств блока с меткой *Обмотка* введите 1 в любое поле для компонентов тензора относительной магнитной проницаемости и  $1000000 \text{ A/m}^2$  в поле *Плотность тока*.

9. Для свойств ребра с меткой *Внешнее* включите флажок *Нулевой нормальный поток*.
10. Для свойств ребер с меткой *Осевое закр.* оставьте значения полей, заданные по умолчанию.
11. Решите задачу и просмотрите результаты решения, например, картину магнитного потока  $\Phi$  (рис.1.46).
12. Получив решение магнитной части связанной задачи, можно приступить к решению задачи упругости. Для этого прежде всего создайте новую задачу с именем *Coupl1sa.pbm*.
13. Введите следующие свойства задачи:
  - В списке *Тип задачи* выберите *Напряжения и деформации*;
  - В пункте *Класс модели* выберите опцию *Осесимметричная*;
  - В пункте *Единицы измерения* выберите *Сантиметры*;
  - В качестве имени файла геометрии модели и физических свойств выберите *Coupl1.mod* и *Coupl1sa.dsm* соответственно.
14. Задайте связь задач:
  - Перейдите на вкладку *Связь задач*.
  - В раскрывающемся списке *Тип данных* выберите позицию *Магнитные силы*.
  - Нажмите кнопку *Обзор* и дважды щелкните файл *Coupl1ms.pbm*.
  - Нажмите *Добавить*, новая строка появится в окне *Источники данных*.
  - Нажмите *ОК*, чтобы подтвердить изменения, внесенные в описание задачи.
15. Для свойств блока с меткой *Воздух* оставьте нулевое значение в полях ввода модулей Юнга, так как в данной задаче этот блок должен быть исключен из расчета механических напряжений. Восклицательный знак в значке слева от метки означает, что все блоки с этой меткой не будут участвовать в расчете.
16. Для свойств блока с меткой *Обмотка* введите  $1.075 \cdot e^{11}$  в любое из трех полей для модуля Юнга и 0.33 в любое из трех полей для коэффициента Пуассона.
17. Для свойств ребер с меткой *Осевое закр.* включите флажок *Z* в рамке *Фиксированное перемещение*, значения компоненты вектора перемещения оставьте равным нулю.
18. Для свойств ребра с меткой *Внешнее* оставьте значения полей, заданные по умолчанию.
19. Решите задачу и просмотрите результаты решения, например, картину поля перемещений (рис.1.47).

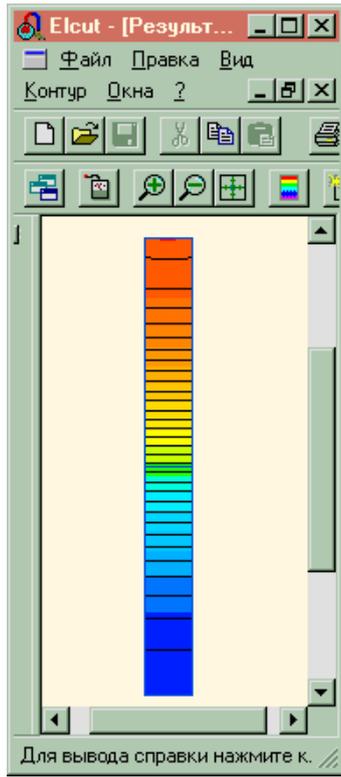


Рис.1.46

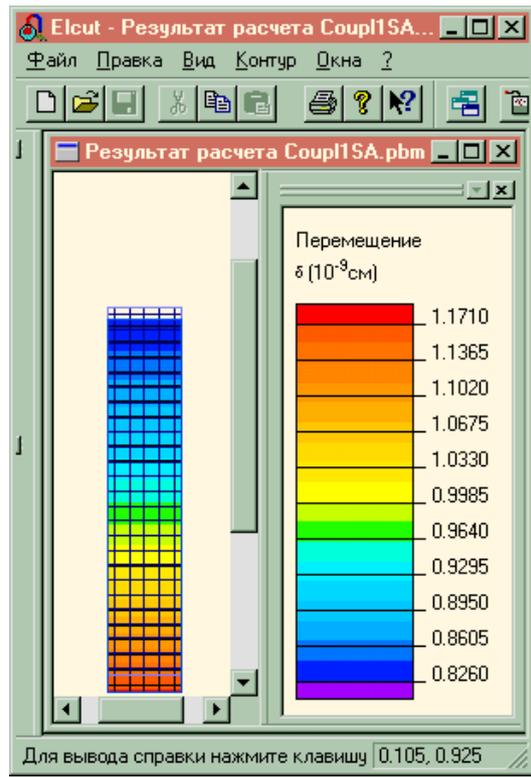


Рис.1.47



## Литература

1. Галлагер Р. Метод конечных элементов: основы / Пер. с англ. В.М.Картвешвили; Под ред. Н.В.Баничука. -М.: Мир, 1984. -428 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Пер. с англ.; Под ред. Б.Е. Победри. -М.: Мир, 1975. -541 с.
3. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация / Пер. с англ. Б.И.Квасова; Под ред. Н.С.Бахвалова. -М.: Мир, 1986. -318 с.
4. Зенкевич О., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред / Пер. с англ. О.П.Троицкого и С.В.Соловьева; Под ред. Ю.К.Зарецкого. - М.:Недра, 1974. -239 с.
5. В.П.Исаченко, В.А.Осипова, А.С.Сукомел. Теплопередача. - М.:Энергия, 1975. - 488 с.
6. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Пер. с франц. Л.Р.Волевича; Под ред. О.А.Олейника. -М.: Мир, 1972. -587 с.
7. Лурье А.И. Теория упругости. -М.: Наука, 1970. -940 с.
8. Обэн Ж.П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. -М.:Мир, 1977.
9. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. -М.: Мир, 1976. -464 с.
- 10.Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости: Учебное пособие. -М.: Наука, 1981. -688 с.
- 11.Сабоннадьер Ж.-К., Кулон Ж.-Л. Метод конечных элементов и САПР / Пер. с франц. В.А. Соколова, М.Б. Блеер; Под ред. Э.К. Стрельбицкого. -М.: Мир, 1989. -190 с.
- 12.Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Пер. с англ. А.А.Шестакова; Под ред. Б.Е.Победри -М.: Мир, 1979.-392 с.
- 13.Сильвестер П., Феррари Р. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / Пер. с англ. С.Н.Хотяинцева; Под ред. Ф.Ф.Дубровки. -М.: Мир, 1986. -229 с.
- 14.Системы автоматизированного проектирования : в 9-ти кн. Кн. 4. Математические модели технических объектов: Учеб. пособие для вузов / В.А.Трудоношин, Н.В. Пивоварова; Под ред. И.П. Норенкова. - М.: Высш. шк., 1986. -160 с.
- 15.Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / Пер.с англ. В.И.Игошкова; Под ред. Г.И.Марчука. -М.: Мир, 1977.-349 с.
- 16.Теория тепломассообмена: Учебник для технических университетов и вузов/ С.И. Исаев, И.А.Кожин, В.И. Кофанов и др.; Под ред. А.И. Леонтьева. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. -683 с.

17.Терлецкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика: Учеб. пособие для студентов университетов - М.: Высш.школа, 1980. -335 с.

