

Расчёт межпроводной индуктивности и ёмкости симметричных прямых пар методами Конформных отображений и конечных элементов.

Вишняков Е.М., Хвостов Д.В.

Показана работа конформных отображений на примере расчёта индуктивности и ёмкости неэкранированной бесконечной прямой симметричной двухпроводной линии. В том числе при вычислении параметров этой линии методом конечных элементов в программной среде ELCUT (<http://www.tor.ru/>).

Этой работой мы открываем цикл статей, посвящённых расчёту погонных ёмкостей и индуктивностей – важнейших первичных параметров любых кабельных конструкций: для передачи информации (телефонные и телеграфные провода, витые пары, коаксиальные кабели...), для передачи энергии (силовые кабели, воздушные линии электропередач...) и специального назначения (триады, каротажные кабели, подводные, шахтные, нефтяные...). Потому что именно ёмкость и индуктивность определяют скорость сигналов и волновое сопротивление линий. И, следовательно, величину и распространение напряжений и токов. А также искроопасность кабелей, используемых во взрывоопасных зонах.

Не исключено, что такое намерение может кого-то удивить, так как существует огромное количество учебной и методической литературы, а также фундаментальных монографий, посвящённых данному предмету. Как основополагающих трудов старых и заслуженных мастеров [1, 2], так и современных [3, 4]. И что здесь можно сказать существенно новое?

Тем не менее, неумолимый ход Времени заставляет по-новому взглянуть и на эту отрасль расчётной деятельности. Которая, казалось бы, досконально изучена и отшлифована десятилетиями труда многих и многих поколений инженеров.

21-й век начался как век информационных технологий и энергетики. Но прогресс этих отраслей невозможен без адекватного, а лучше и опережающего, развития кабельной индустрии – производства средств передачи сигналов и энергии. Этот процесс сопровождается быстрым ростом номенклатуры кабельных изделий и их компонентов, галопом цен на проводниковые и изолирующие материалы и общим ужесточением требований к качеству.

Всё вместе обуславливает ужесточение требований к точности технологических режимов и регламентов, к точности и достоверности контроля качества исходных материалов и продукции. А также значительное увеличение затрат на разработку новых изделий.

Последнее не в малой степени обусловлено низкой точностью и достоверностью применяемых до сих пор методик расчёта.

Это связано с тем, что указанные методики основаны на применении формул, полученных более полувека назад для некоторых простейших геометрий проводников и изоляторов. И в практическом применении они – всего лишь приближения. Не спасают и поправочные коэффициенты для геометрий, более приближенных к реальным, но тоже достаточно простым. Так как на все случаи жизни поправок нет, и результаты таких «расчётов» (а точнее говоря, оценок) зависят от произвола или, говоря мягче, интуиции расчётчика.

Конечно, интуиция мастера, за плечами которого не один десяток лет и тысячи километров кабелей – вещь ценная. Но в условиях быстрых изменений она может и подводить. Помимо прочего, её вообще надо освободить от тупой расчётной рутины. Это тем

более необходимо, что существенный прогресс в расчётном деле давно отсутствует. Чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить упомянутые выше работы, разделённые полувеком.

Нынешнее, не очень радужное, положение – это, разумеется, не результат чьего-то недомыслия. Напротив – это итог титанического труда и мысли инженеров и учёных прошлого века, вооружённых всего лишь арифмометрами, логарифмическими линейками, номограммами и таблицами. И можно только изумляться и восхищаться их беспримерными достижениями: авиация, космос, атомная бомба, лазеры, полупроводники...

Они же вооружили нас мощными персональными компьютерами. И тем самым закрыли эпоху арифмометров и номограмм, приближённых формул и поправок к ним. Открыв дорогу новым, «абсолютным» расчётным технологиям. Которые, как представляется, должны:

1. Обеспечить расчёт проектируемого изделия из «первых принципов».
2. Исключить какие-либо приближения и поправки.
3. Обеспечить расчёт с любой, наперёд заданной, степенью точности.

Здесь, однако, требуется уточнение. Дело в том, что устройство даже простейших кабельных сборок на самом деле настолько сложно, что оно не зубам даже самым продвинутым суперкомпьютерам. И для расчётов требуются упрощения, то есть работа интуиции. А вот как раз после этого расчёт и должен отвечать указанным выше требованиям.

Существуют разные методы расчёта электрических параметров «из первых принципов»:

1. с помощью вариационных процедур,
2. методом конечных разностей;
3. методом конечных элементов.

В первом вместо точной функции, характеризующей поле, например потенциала электрического поля $U(x,y)$, вводят приближённую $\bar{U}(x,y,a,b,c,d,...)$, удовлетворяющую граничным условиям, уравнению Лапласа и зависящую от ряда параметров $a,b,c,d,...$, которые подбирают с таким расчётом, чтобы обеспечить минимум энергии электрического поля $\sim \int E^2 d\Omega$ (интеграл по всему объёму Ω поля).

Во втором дифференциальное уравнение заменяют системой алгебраических для конечных разностей. Где, например, производную $\partial U/\partial x$ заменяют частным $\Delta U/\Delta x$.

Третий способ – как бы гибрид первых двух. Здесь объём Ω покрывают сеткой небольших участков – конечных элементов, обычно в форме симплексов (на плоскости – это треугольники, в трёхмерном объёме – тетраэдры). Внутри элементов поле представляют приближением, зависящим от подгоночных параметров. Например, для двумерных задач – плоскостями, проходящими через 3 узла сетки. И подбирают параметры с таким расчётом, чтобы значения $U(x,y)$ в узлах сетки обеспечивали минимум энергии поля, а на границах – граничные условия. Более подробно с этим методом можно ознакомиться в [5].

Разработано множество программ для решения задач с конечными элементами: ANSYS, NASTRAN, PATRAN.... Но для них необходимо мощное оборудование и высокая квалификация расчётчиков. Для решения двумерных задач (а к таковым относится большинство кабельных) более пригоден пакет ELCUT [6].

Поэтому предлагаемый вниманию цикл работ мы посвящаем исследованию существующей и доступной версии ELCUT, имея в виду его перспективы в реализации указанной выше «абсолютной» расчётно-кабельной технологии.

Забегая вперёд, отметим, что, как представляется на настоящий момент, в полном объёме это реализуемо лишь для «прямых» кабельных систем, то есть таких, где можно пренебречь эффектами скрутки. Кроме того, при известном искусстве, можно получить оценки влияния скрутки на ряд параметров линий. Есть, однако, и такие «скрученные» параметры, которые в существующей версии ELCUT оценить нельзя. Хотя сам по себе его метод позволяет точно решать все эти задачи. Так что у ELCUT есть перспектива стать

основным расчётным инструментом в кабельно-расчётном деле. Но, после надлежащей доработки, о чем подробнее в последующих статьях.

Если, однако, отвлечься от таких деталей, то уже первое знакомство с **ELCUT** убеждает в полезности этого инструмента в инженерной деятельности. Но у него есть два недостатка:

1. конечный размер геометрических моделей;
2. решение двумерных задач.

Первый ограничивает **ELCUT** при расчёте первичных параметров – погонной ёмкости и индуктивности линий с распределёнными параметрами.

Дело в том, что часть кабельной продукции оборудуют металлическими экранами, естественным образом ограждающими область электромагнитного поля в **ELCUT**. Но вот основная масса: телефонные линии, бытовая электропроводка, витые пары низших категорий, линии электропередач экранами не оборудованы. И в **ELCUT** такие задачи решают приближённо (пример – разбираемая ниже задача **Lab3_Cu**, приведенная в доступной для широкой общественности библиотеке демонстрационных программ).

Второе ограничивает тем, что многие практически важные кабельные объекты – структуры трёхмерные, так как при сборке сердечников кабелей их токопроводящие жилы, как правило, скручивают между собой. Равно как и сами жилы, если их свивают из нескольких (7, 19 и т.д.) проволок. И потому, на первый взгляд, применение **ELCUT** тут невозможно.

Тем не менее, обе эти задачи здесь могут быть решены: как точный расчёт неэкранированных кабельных конструкций, так и оценка влияния всех видов скруток.

Цель настоящей работы – показать, как без потерь точности решить (любую) «неэкранированную» задачу. А скрутки оставим для обсуждения в последующих статьях.

Индуктивность неэкранированной пары в решении задачи **Lab3_Cu** (http://www.tor.ru/elcut/courses/toe/rus/lab3_r.htm).

Сначала разберём решение этой задачи, посвящённой моделированию магнитного поля бесконечной прямой симметричной двухпроводной медной линии (рис. 1) по которой течёт переменный ток $J=300\text{A}$. Изолятор – воздух (в отличие от рассматриваемой ниже пары с изолированными проводами). Провода толстые и близкие: $a = 15\text{ мм}$ и $b = 59\text{ мм}$, так что существенны скин-эффект и эффект близости.

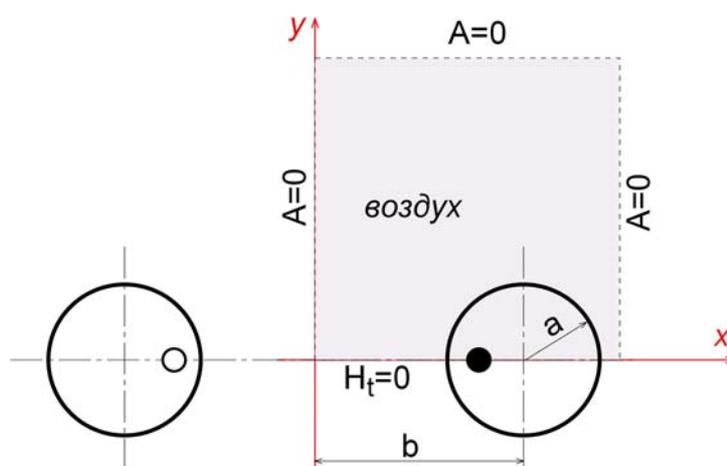


Рис. 1. Идея построения геометрической модели для прямой двухпроводной воздушной линии.

Здесь есть две плоскости зеркальной симметрии: одна проходит через оси проводников, рассекая их, а вторая, перпендикулярная ей, – через середину расстояния между проводами. Поэтому геометрическую модель задаче строят лишь в одном квадранте. В целом линия открыта в Космос и вектор-потенциал её магнитного поля $A \sim 1/D$ (D – расстояние от линии).

По этой причине в **Lab3_Cu** квадрант ограничили квадратом со стороной $D = 1000$ мм $\gg a, b$. На стороне квадрата, рассекающей проводники, касательная составляющая магнитного поля $H_t = 0$. На остальных трёх сторонах $A = 0$. Отметим, что на плоскости симметрии $A = 0$ точно, а на остальных сторонах – лишь приближённо.

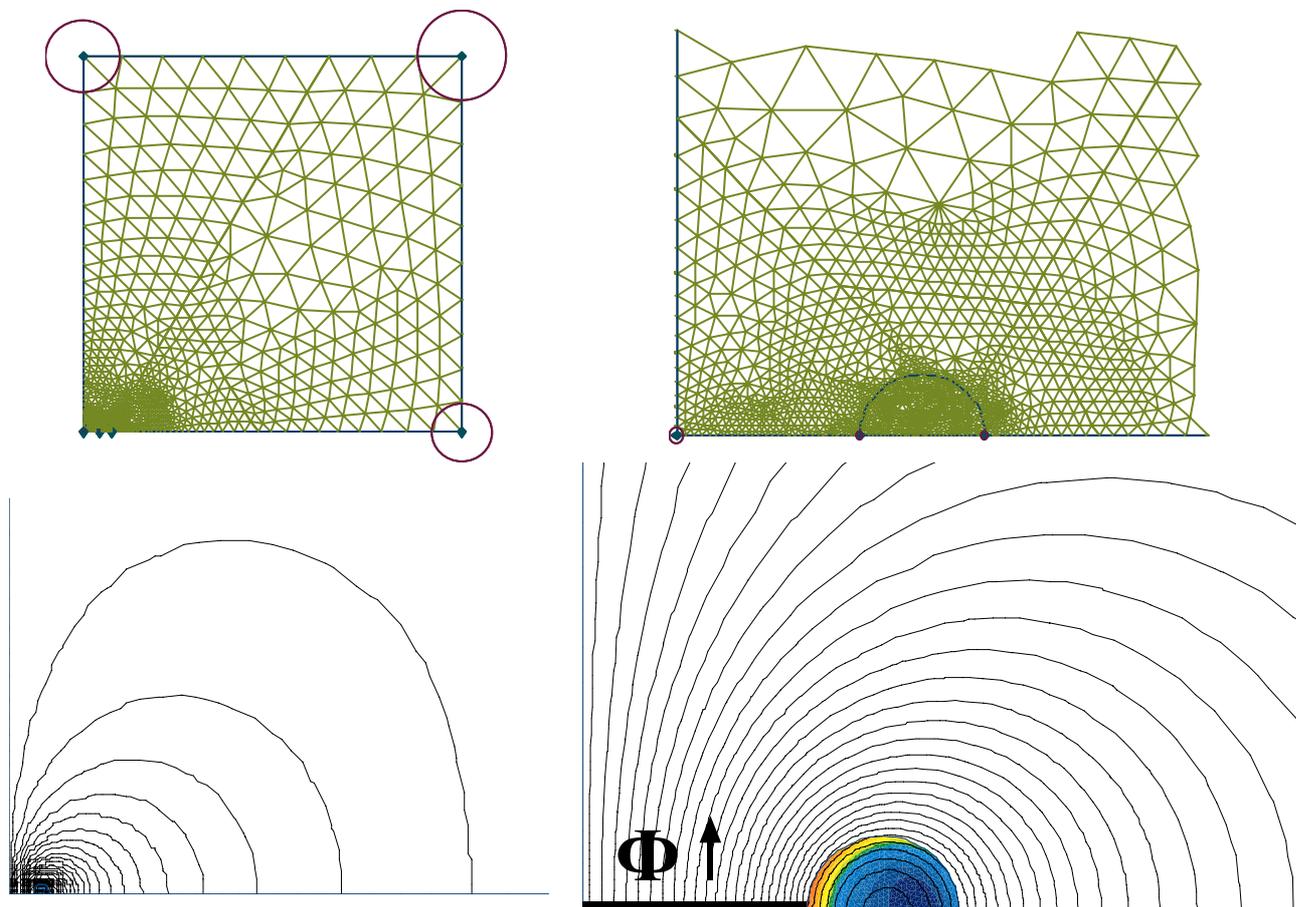


Рис. 2. Сетка конечных элементов (вверху) и распределение магнитного поля вокруг проводов (внизу) для прямой воздушной пары. Цветная раскраска провода – распределение плотности тока.

На рис. 2 представлена сетка конечных элементов (1925 узлов) и её фрагмент около провода. Ниже – карта полей: чёрные кривые – линии магнитного поля, цветная карта – распределение плотности тока: алый = 0.9 A/mm^2 , тёмно-синий = 0.5 A/mm^2 .

Для вычисления межпроводной индуктивности $L = \Phi/J$ в **ELCUT** вычислили магнитный поток между проводами $\Phi = 2.3402 \cdot 10^{-4} \text{ Вб}$ (расчётный контур – бирюзовая линия на рис. 2). Откуда $L = 0.78 \text{ мкГн/м}$. Точный же расчёт [7,8] даёт ёмкость и индуктивность

$$C = \epsilon\epsilon_0 \pi / \ln[b/a + (b^2/a^2 - 1)^{1/2}];$$

$$L = \mu_0/\pi \ln[b/a + (b^2/a^2 - 1)^{1/2}] = 0.81843 \text{ мкГн/м} \quad (3)$$

То есть на 5% больше. Таков «вес» магнитного поля вне расчётного блока. Для увеличения точности необходимо последовательно увеличивать площадь квадрата (соответственно увеличивая число узлов сетки) и наблюдать за сходимостью величины L .

Межпроводная индуктивность конформно преобразованной пары.

Но в ELCUT эту задачу можно решить точно. С этой целью конформно отобразим исследуемую пару в коаксиальную структуру (рис. 3) с радиусами $a'_1 = 15$ мм и $a'_2 = 116.06$ мм с помощью дробно-линейной функции [9] $w = M^2/(z - P)$ где $w = u + iv$; $z = x + iy$; $P = P_x + iP_y$ – полюс.

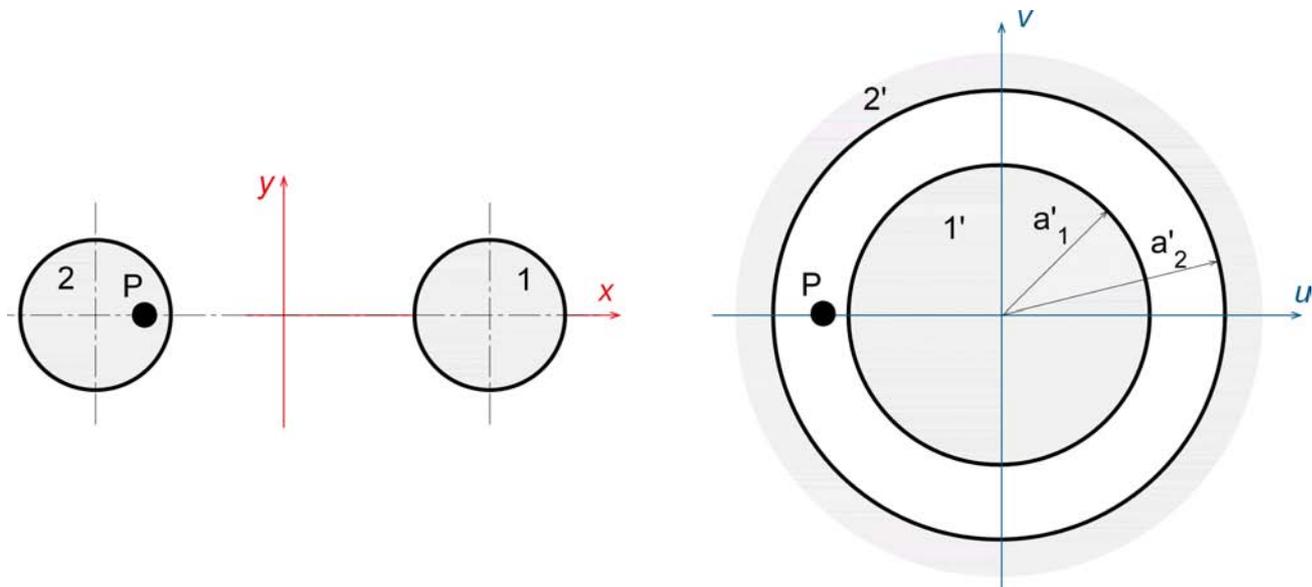


Рис. 3. Конформное отображение прямой симметричной параллельной воздушной пары в коаксиальную структуру с помощью дробно линейной функции с полюсом P .

По сути, это просто замена переменных $u = M^2(x - P_x)/r^2$; $v = -M^2(y - P_y)/r^2$, где $r^2 = (x - P_x)^2 + (y - P_y)^2$. Проще всего её провести в полярных координатах. Тогда решаемое в ELCUT уравнение Пуассона:

$$\partial(r\partial A/\partial r)/\partial r + \partial^2 A/\partial \varphi^2/r^2 + i\mu_0 g \omega A = -\mu_0 j_{стор} \quad (4)$$

преобразуется к виду:

$$R^4 [\partial(R\partial A/\partial R)/\partial R + \partial^2 A/\partial \varphi^2/R^2] / M^2 + i\mu_0 g \omega A = -\mu_0 j_{стор} \quad (5)$$

где $R = [u^2 + v^2]^{1/2} = M^2/r$

В ELCUT величину $j_{вихр} = i\mu_0 g \omega A$ называют плотностью вихревых токов, $j_{стор}$ – плотностью сторонних токов. По физическому смыслу первый – это ток самоиндукции проводника, вызываемый переменным магнитным полем протекающего через него тока $j = j_{вихр} + j_{стор}$, а второй по величине равен постоянному току, который протекал бы через проводник при том же падении напряжения на нём (то есть, при отсутствии индуктивного сопротивления).

В изоляторе $g = 0$, $j_{вихр} = 0$; $j_{стор} = 0$, уравнения (5) и (4) вырождаются в уравнения Лапласа и совпадают с точностью до обозначений переменных:

$$\partial(r\partial A/\partial r)/\partial r + \partial^2 A/\partial \varphi^2/r^2 = 0; \quad \partial(R\partial A/\partial R)/\partial R + \partial^2 A/\partial \varphi^2/R^2 = 0$$

То есть, в изоляторах конформное преобразование не меняет вид уравнения Лапласа (отметим попутно, что дробно-линейное отображение в некотором смысле не меняет и вид уравнений Пуассона (4) и (5) [9]). Это значит, что вместо приближённого решения безграничной задачи можно точно решить её конформную, ограниченную экраном, в который отображаем один из проводов. В данном случае – получить точно известные индуктивность и ёмкость коаксиального кабеля:

$$C = 2\pi\epsilon\epsilon_0 / \ln(a'_2/a'_1); \quad L = \mu\mu_0/2\pi \ln(a'_2/a'_1) \quad (3')$$

Проверим это с помощью **ELCUT**, для чего вычислим поток Φ магнитного поля вокруг жилы с током. Для этого достаточно вычислить поле в узком секторе (10° на рис. 4).

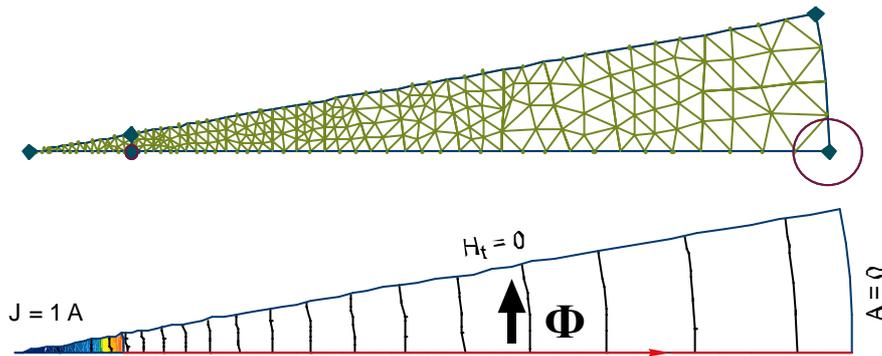


Рис. 4. Геометрическая модель для расчёта индуктивности коаксиальной структуры (вверху) и карта поля (внизу).

Тогда получим $L = \Phi / J = 0.81878$ мкГн/м, что всего на **0.04%** больше точного. И это всего при **254** узлах сетки (0.14 %, если узлов 119). Отметим попутно, что в **ELCUT** предусмотрен ещё более точный и быстрый способ вычисления индуктивных параметров, о чём подробнее – в одной из следующих статей.

Отображение пар в структуры, близкие к коаксиальным, полезно ещё и потому, что такие структуры имеют широкий минимум ёмкости (максимум индуктивности). На рис. 5 представлены графики зависимости ёмкости от смещения жилы относительно центра экрана. Как видно, небольшое смещение осей экрана и/или провода мало влияет на ёмкость. Цифры около кривых – отношение a'_2/a'_1 .

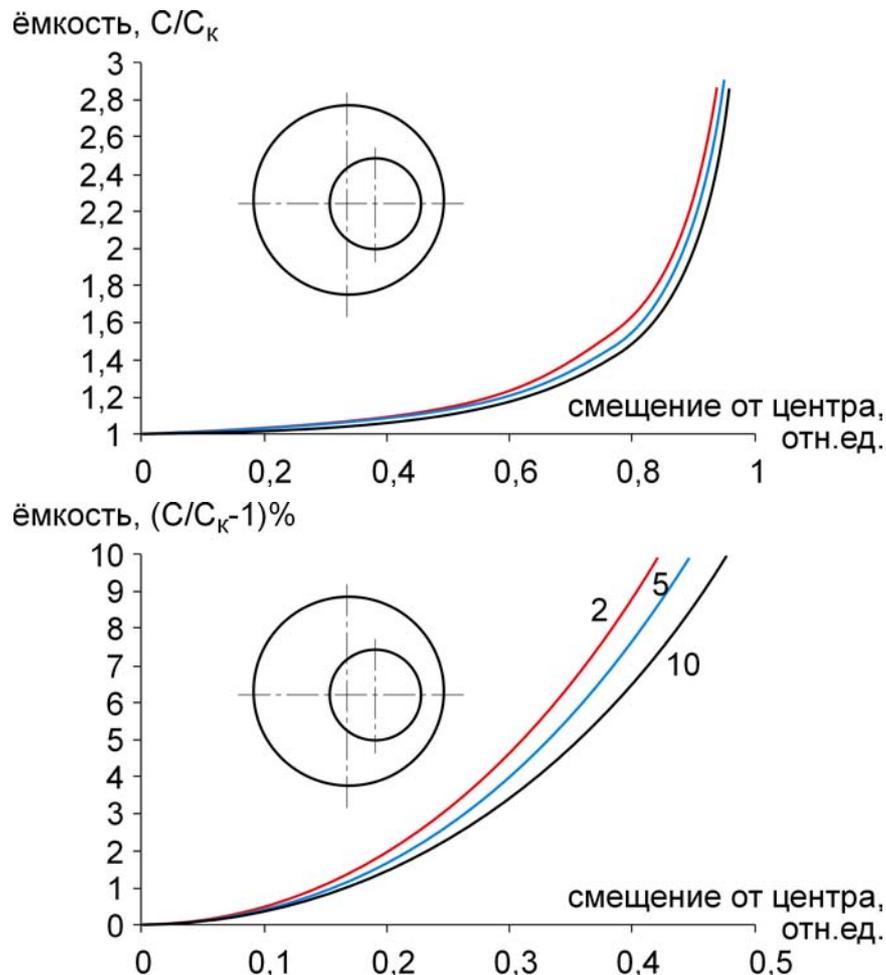


Рис. 5. Зависимость ёмкости эксцентричной пары проводов от смещения жилы относительно оси экрана.

Отметим, что такое смещение можно рассматривать и как частный случай искажения формы провода и/или экрана. Поэтому можно ожидать, что если пару произвольных проводов отобразить в почти коаксиальную фигуру, то выражения (3') дадут неплохое приближение к параметрам пары, точность которого можно оценить с помощью кривых на рис.5. Кроме того, практическая полезность данного наблюдения ещё и в том, что, получая точные значения параметров кабеля в среде **ELCUT**, расчётчик легко сравнит их с традиционными оценками, которые производят до сих пор с помощью (3').

Ёмкость незэкранированной прямой симметричной пары.

В задаче **Lab3_Cu** в качестве изолятора рассмотрен воздух. Но в реальных конструкциях изолятор, как правило, устроен сложнее. Вычислим в качестве примера ёмкость прямой изолированной пары: радиус проводов $a = 1$ мм, толщина изоляции $d = 0.3$ мм (полиэтилен, $\epsilon_1 = 2.5$), так что $b = 1.3$ мм. Пусть полюс $P = (b^2 - a^2)^{1/2} = 0.830662$ мм и масштаб $M^2 = 2 (b^2 - a^2)^{1/2} [b + (b^2 - a^2)^{1/2}] = 3.539722$ мм².

Тогда пара отобразится в коаксиальную структуру с радиусом жилы $a_1 = a = 1.000$ мм, экрана $a_2 = a [b/a + (b^2/a^2 - 1)^{1/2}]^2 = 4.540$ мм и центром 2.131 мм (рис. 6).

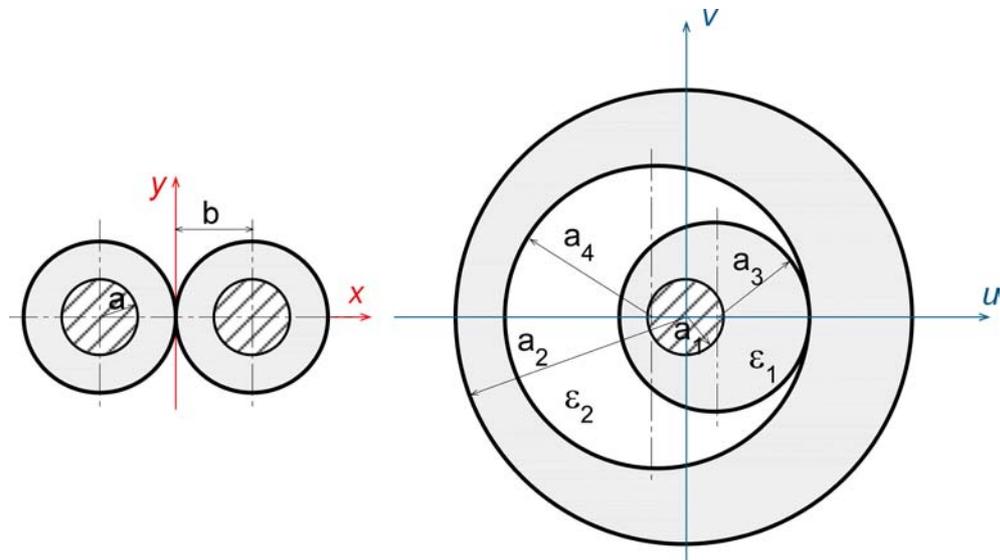


Рис. 6. Отображение прямой незэкранированной пары в структуру, близкую к коаксиальной.

Границы изоляции отобразятся в две касающиеся эксцентричные окружности с радиусами $a_4 = 3.131$ мм (центр 1.1304 мм) и $a_3 = 1.615$ мм (центр 2.647 мм).

На основании этих данных строим геометрическую модель **ELCUT** и вычисляем ёмкость пары $C = 61.13$ пФ/м с погрешностью не больше 0.1% при числе узлов ~ 200 .

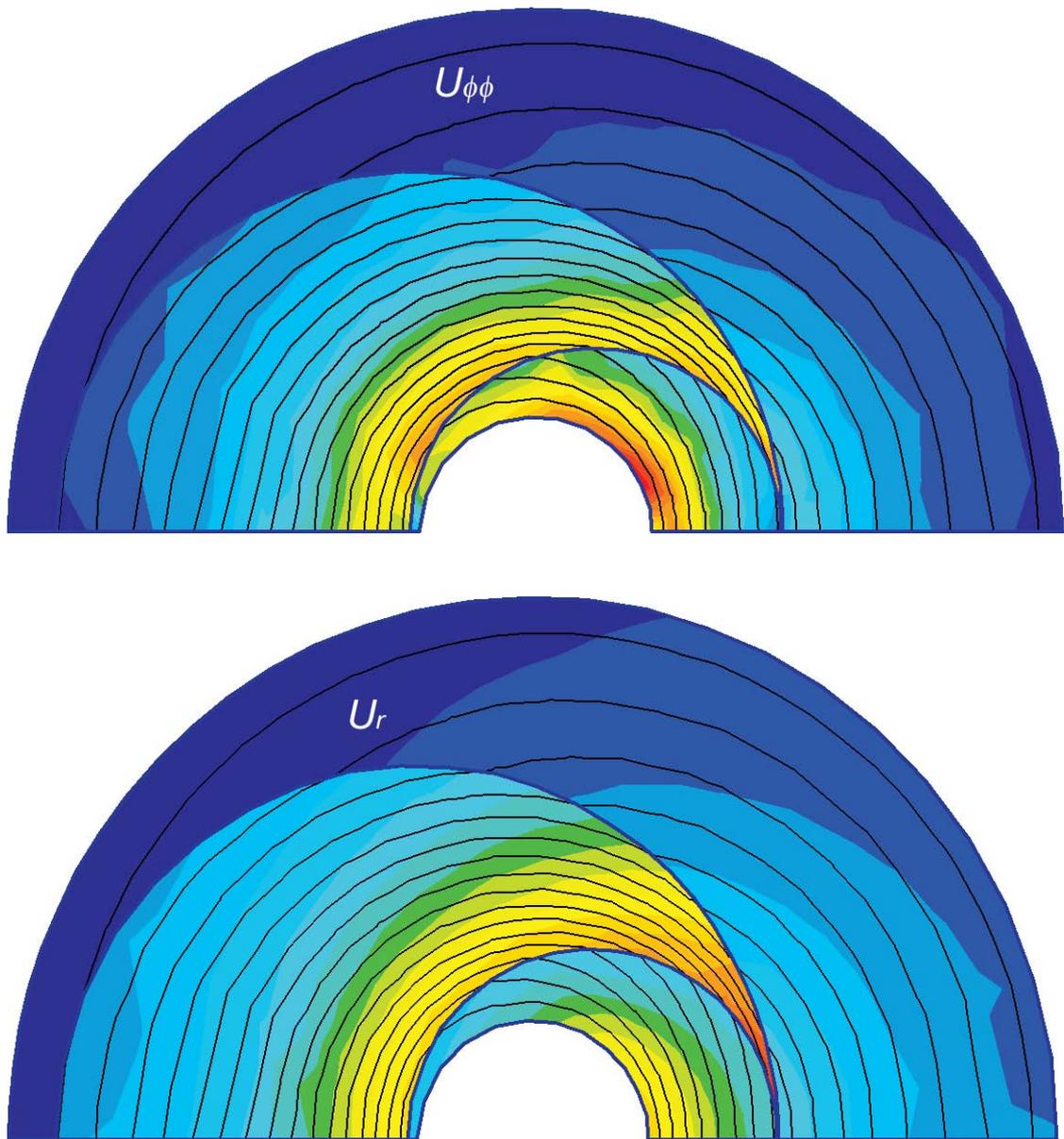


Рис. 7. Карта электрического поля в коаксиальном отображении уединённой неэкранированной прямой симметричной пары.

На карте полей (рис. 7) показано распределение электрического поля внутри конформного отображения пары: тонкие чёрные кривые – линии равного потенциала. Цветом обозначена величина радиальной составляющей напряжённости электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{U}\mathbf{r} = \partial\mathbf{U}\partial\mathbf{r}$, а также второй производной $\mathbf{U}\phi\phi = \partial^2\mathbf{U}/\partial\phi^2$. Эти величины полезны в исследованиях витых пар и скрученных многопроволочных жил, исследованию которых мы посвятим последующие статьи.

Картина поля вокруг пары – это (обратное) конформное отображение линий потенциала, изображённых на рис. 6. Если необходимо, можно пересчитать и отобразить другие величины и объекты. Но здесь в этом нет надобности.

Выводы.

1. С помощью **ELCUT** можно точно вычислить параметры любой открытой системы проводников, если с помощью конформного преобразования, например, дробно-линейного, отобразить её закрытую экраном. Поэтому дополнение математического инструментария **ELCUT** мастером (прямых и обратных) конформных отображений хотя бы в объёме справочника [10] позволит обеспечить максимальную точность вычислений межпроводной ёмкости и индуктивности любых нескрученных кабельных конструкций.
2. В общем случае конформное отображение модифицирует вид уравнений Лапласа и Пуассона. Например, появляются коэффициенты, пропорциональные степеням радиуса **R**. Потому целесообразно научить **ELCUT** работать с произвольными координатно-зависимыми коэффициентами при производных, а также координатно-зависимыми плотностями зарядов и токов в блоках (в правых частях уравнения (4), о чём подробнее в следующей статье).

Тогда **ELCUT** имеет шанс стать весьма востребованным инструментом в кабельно-расчётном деле.

Литература

1. Гроднев И.И., Лакерник Р.М., Шарле Д.Л. Основы теории и производство кабелей связи. – М, Л: Госэнергоиздат, 1956.
2. Кулешов В.Н. Теория кабелей связи. – М: Государственное издательство литературы по вопросам связи и радио 1950.
3. В.Е. Власов, Ю.А. Парфёнов. Кабели цифровых сетей электросвязи. Конструирование, технологии, применение. – М: Эко-Трендз, 2005.
4. А.И. Листратенков. Теоретические основы конструирования силовых кабелей и проводов. – М: Полиграф сервис, 2006.
5. Вишняков С.В., Гордюхина Н.М. Фёдорова Е.М. САЕ: Программы курсов, учебные примеры, пособия, материалы по ANSYS. 2005
http://cae.tsogu.ru/Learning/Ansys/ansys_learning.
6. Отсюда можно скачать студенческую версию **ELCUT 5.4**, 2007
http://www.tor.ru/elcut/free_soft_r.htm.
7. Иосель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. - Л.: Энергоиздат, 1981.
8. П.Л. Калантаров, Л.А. Цейтлин. Расчёт индуктивностей. – Л: Энергоатомиздат, 1986.
9. Более подробно это изложено в приложениях к нашим статьям, размещённым в разделе «Наука» сайта ОТИ МИФИ <http://www.oti.ru>.
10. Г Корн, Т Корн. Справочник по математике. – М: Наука, 1970.

Подробнее о конформном отображении можно прочитать:

- в монографии К. Каратеодори Конформное отображение. - М.-Л.: ОНТИ Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. Книгу можно скачать из библиотеки мехмата МГУ <http://lib.mexmat.ru/books/1663>
- Достаточно подробное изложение можно найти в статьях пятитомника «Математическая Энциклопедии».-М: БСЭ, 1979.
- В Институте космических исследований владеют техникой цифрового конформного отображения любых одно- и двух-связных областей в коаксиальные структуры <http://www.cosmos.ru/seminar/200105/abstract.html>.