

ЭНЕРГЕТИКА

Научная статья

УДК 621.311

EDN: LBGQWS

DOI: 10.21285/1814-3520-2025-1-33-50



Анализ влияния скин-эффекта на активное сопротивление в проводах линий электропередачи

А.В. Белосветов^{1✉}, В.З. Манусов²¹Сибирский государственный университет водного транспорта, Новосибирск, Россия²Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск, Россия

Резюме. Цель – анализ влияния скин-эффекта на активное сопротивление алюминиевых проводов с использованием математической модели, основанной на теории электромагнитного поля. В исследованиях применялась программа моделирования ELCUT, использующая метод конечных элементов. В качестве объекта моделирования были приняты провода: круглый алюминиевый и цилиндрический сталеалюминиевый сечением по 339 мм², а также провод марки АС 300/39. В работе было учтено, что реальная модель линии электропередачи является неоднородной, т.е. представляет собой проволочную конструкцию сталеалюминиевого провода. Верификация расчетов в используемой компьютерной программе осуществлялась через разбиение алюминиевого провода на две составляющие: круг сечением 39 мм² и внешнее кольцо сечением 300 мм². При оценке результатов моделирования алюминиевого провода на разных гармониках установлено совпадение полученных коэффициентов скин-эффекта с математической моделью (данный коэффициент отражает увеличение активного сопротивления провода на высшей гармонике по отношению к сопротивлению постоянному току). Для алюминиевого провода сечением 339 мм² активное сопротивление на 5-й гармонике увеличилось на 24%, на 7-й – на 40%, на 11-й – на 71% и на 13-й – на 84%. Это обстоятельство подтвердило необходимость учета скин-эффекта при оценке потерь электроэнергии в линиях электропередачи на высших гармониках. Авторами предложено рассматривать конструкцию провода марки АС в виде цилиндрического неоднородного провода, состоящего из стального круга внутри и полого алюминиевого круга снаружи. На примере провода АС 300/39 при определении коэффициента скин-эффекта данным способом погрешность не превышала 5% на исследуемом интервале гармоник. Таким образом, предложенный метод исследования, заключающийся в рассмотрении проводов марки АС как круглых цилиндрических, показывает возможность уточнения математической модели данных проводов.

Ключевые слова: активное сопротивление, скин-эффект, высшие гармоники, электромагнитная совместимость, потери электроэнергии

Благодарности. Работа выполнена с предоставлением авторам доступа к программе «ELCUT профессиональный» по заявке для выполнения учебной работы, отправленной в ООО «Тор», Санкт-Петербург.

Для цитирования: Белосветов А.В., Манусов В.З. Анализ влияния скин-эффекта на активное сопротивление в проводах линий электропередачи // iPolytech Journal. 2025. Т. 29. № 1. С. 33–50. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2025-1-33-50>. EDN: LBGQWS.

POWER ENGINEERING

Original article

Skin effect and active resistance of power transmission line wires

Anton V. Belosvetov^{1✉}, Vadim Z. Manusov²¹Siberian State University of Water Transport, Novosibirsk, Russia²Yugra State University, Khanty-Mansiysk, Russia

Abstract. The study aims to analyze the skin effect as applied to the active resistance of aluminum wires using a mathematical model based on the theory of electromagnetic fields. The study uses the Elcut finite element simulation software. The simulated object includes round aluminum and cylindrical steel-aluminum wires with a cross-section of 339 mm² each, as well as AS 300/39 wire. The nonuniformity of a real power transmission line with steel-aluminum wires is considered. Calculations were verified in the Elcut software by dividing the aluminum wire into two components: a circle with a cross-section of 39 mm² and an outer ring with a cross-section of 300 mm². The results of aluminum wire simulation at different harmonics have established a coincidence of the obtained skin effect coefficients with the mathematical model. This coefficient reflects an increase in the active resistance of the

wire at the highest harmonic in relation to direct current resistance. For an aluminum wire with a cross-section of 339 mm², the active resistance at the 5th, 7th, 11th, and 13th harmonic has increased by 24, 40, 71, and 84%, respectively. This circumstance confirmed the need to consider the skin effect in the assessment of power losses in power transmission lines at higher harmonics. We propose to simulate the AS wire as a cylindrical nonuniform wire consisting of a steel circle inside an aluminum ring. For AS 300/39 wire, the error of determining the skin effect coefficient using this method is below 5% in the studied harmonic range. Thus, the proposed research method considering AS wires as round cylindrical shows the possibility of refining their mathematical model.

Keywords: active resistance, skin effect, higher harmonics, electromagnetic compatibility, power losses

Acknowledgements. The work has been conducted with the author's access to the ELCUT Pro software upon the request for academic work sent to Tor Ltd, St. Petersburg.

For citation: Belosvetov A.V., Manusov V.Z. Skin effect and active resistance of power transmission line wires. *iPolytech Journal*. 2025;29(1):33-50. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2025-1-33-50>. EDN: LBGQWS.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время интерес к влиянию высших гармонических составляющих переменного тока возрастает. Ранее влияние высших гармоник (ВГ) было характерно для сетей низкого напряжения. На сегодняшний день развитие электрических систем идет по пути подключения множества крупных нелинейных нагрузок на уровнях среднего и высокого напряжения [1]. В электроэнергетических системах России характерно наличие мощных нелинейных нагрузок, подключенных на разных ступенях напряжения передачи и распределения электроэнергии, что и порождает возникновение ВГ в высоковольтных электрических сетях [2].

Нагрузками такого рода являются системы тягового электроснабжения (СТЭ), получающие энергию от систем внешнего электроснабжения (СВЭ) напряжением 110–220 кВ [3]. При питании СТЭ по линиям электропередачи (ЛЭП) значительной протяженности возникают резонансные явления, оказывающие негативное влияние как на тяговую сеть, так и на систему внешнего электроснабжения.

Так, например, в [4] описано влияние предприятий тяжелой промышленности по добыче угля на формирование гармоник и интергармоник. Это обусловлено тем, что на горно-перерабатывающих предприятиях России в основном используются тиристорные преобразователи напряжения и преобразователи частоты мощностью до 750 кВт [5], снижающие затраты на переработку руды, но вызывающие появление высших гармоник и импульсных перенапряжений [6–9].

Влияние распределенной генерации (РГ) на формирование высших гармоник, выдаваемых в локальную сеть, представлено в [10], где отдельно приведена связь резонанса на частотах гармоник с интеграцией РГ в сеть, включая результаты моделирования [11, 12].

Рост числа и мощности нелинейных нагрузок, порождающих гармонические составляющие в энергосистеме, ведет к ухудшению показателей качества электроэнергии (ПКЭЭ) [13]. Несоответствие ПКЭЭ требованиям ГОСТ 32144-2013³ приводит к сокращению срока службы электрооборудования и преждевременному выходу его из строя, что наносит существенный экономический ущерб для энергосистемы [14, 15]. Наряду с этим отрицательное влияние токов высших гармоник на воздушные линии (ВЛ) электропередачи высокого напряжения заключается в увеличении потерь электроэнергии или так называемых добавочных потерь, что также ухудшает технико-экономические показатели и энергоэффективность электроэнергетических систем⁴.

По результатам инструментальных обследований [16], приведенных за 2011–2012 гг., потери электроэнергии от несинусоидальности токов в воздушных линиях в среднем составляли порядка 2–2,5%, а в отдельных случаях [17] за 2009–2010 гг. они достигали 25% [18–22]. В настоящее время доля потерь от высших гармоник продолжает расти, в связи с чем их расчет и оценка являются актуальной задачей.

³ГОСТ 32144-2013. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. Введ. 01.07.2014. М.: Стандартинформ, 2014.

⁴Power System Harmonics Causes and Effects of Variable Frequency Drives Relative to the IEEE 519-1992 Standard. Режим доступа: <https://igate.alamedaelectric.com/Modicon%20Documents/AC%20Drive%20Power%20System%20Harmonics.pdf> (дата обращения: 28.09.2024).

Для выявления природы возникновения потерь от высших гармоник необходимо уточнить математические модели всех элементов электрических сетей, и, в первую очередь, модель линий электропередачи с учетом скин-эффекта на высших гармониках. С физической точки зрения, скин-эффект заключается в неравномерном распределении плотности электрического тока по поперечному сечению проводника. Иначе говоря, электрический ток в проводниках вытесняется от центра ближе к поверхности, причем данный эффект проявляется сильнее при увеличении частоты протекающего тока. В работах [23–25] авторы подробно изучают скин-эффект для сплошных круглых проводников, обычно используемых в системах распределения электроэнергии, однако там не рассматриваются сталеалюминиевые провода (неоднородные), а также провода с проволочной структурой, например, марки АС. В [26] анализируют влияние скин-эффекта на индуктивное сопротивление проводов ВЛ, но в работе нет упоминания об изменении активного сопротивления, которое в данном случае больше подвержено влиянию высших гармоник из-за скин-эффекта.

В настоящее время единые и стандартизированные модели, учитывающие влияние скин-эффекта на провода ВЛ, недостаточно изучены. Таким образом, разработка математической модели, адекватно отражающей процесс вытеснения тока к поверхности проводника, является весьма актуальной задачей. Отсюда возникает необходимость улучшения модели, позволяющей более достоверно определять коэффициент увеличения активного сопротивления проводов ВЛ $k_v(f)$ – отношение активного сопротивления на v -й гармонике $R_v(f)$ к омическому сопротивлению R_0 (сопротивлению проводника постоянному току).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭФФЕКТА ВЫТЕСНЕНИЯ ТОКА

Математическое описание скин-эффекта при протекании переменного тока по проводнику круглого сечения удобно представлять в цилиндрической системе координат (ЦСК) r, z и θ , совместив ось OZ с осью провода (рис. 1). Конструкцию сплошного круглого проводника характеризуют через радиус, который в ЦСК принимает значение $r = R$, м. В то время как его длина – $z = L$, м. Длину окружности (поверхность проводника) и площадь поперечного сечения описывают через угол θ . При этом полагаем, что обратный провод находится настолько далеко, что влиянием переменного магнитного потока, вызванного током в нем, на распределение тока в исследуемом проводе можно пренебречь⁵.

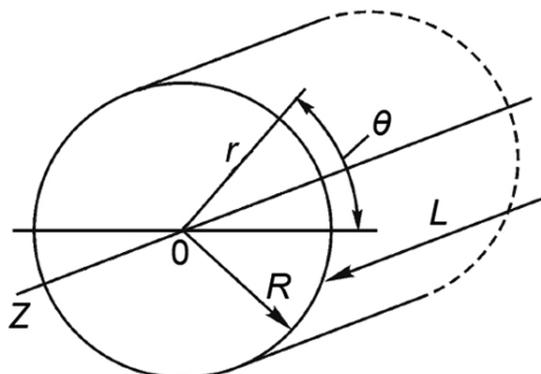


Рис. 1. Представление сплошного круглого провода в цилиндрической системе координат

Fig. 1. Representation of a solid round wire in a cylindrical coordinate system

Математическое представление явления скин-эффекта основано на теории электромагнитного поля⁶. Из нее следуют два уравнения, называемые линейными дифференциальными уравнениями для комплексных амплитуд плотности тока J и напряженности магнитного поля H .

⁵Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Часть 3. Теория электромагнитного поля: учебник. 5-е изд., перераб. М.: Госэнергоиздат, 1959. 232 с.

⁶Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники: учебник. Т. 3; 4-е изд. СПб.: Питер, 2003. 377 с.

$$\frac{d^2 J_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_m}{dr} = j\omega\mu\gamma J_m; \quad (1)$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{H}_m}{dr} - \frac{\dot{H}_m}{r^2} = j\omega\mu\gamma \dot{H}_m. \quad (2)$$

После введения новой переменной $x = r\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$ уравнения (1), (2) приводятся к более простому виду:

$$\frac{d^2 J_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_m}{dx} + J_m = 0; \quad (3)$$

$$\frac{d^2 \dot{H}_m}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{H}_m}{dx} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \dot{H}_m = 0. \quad (4)$$

Уравнения (3), (4) являются частными случаями уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0. \quad (5)$$

Функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя, называются функциями Бесселя [27, 28], общий интеграл которых выглядит следующим образом:

$$y = AJ_n(x) + BN_n(x), \quad (6)$$

где A и B – произвольные постоянные; $J_n(x)$ – функция Бесселя первого рода порядка n ; $N_n(x)$ – функция Бесселя второго рода порядка n .

При $n = 0$ получаем уравнение для плотности тока, при $n = 1$ – соответственно, для напряженности магнитного поля. Общие интегралы этих уравнений могут быть представлены в следующем виде:

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x) + B_0 N_0(x); \quad (7)$$

$$\dot{H}_m = A_1 J_1(x) + B_1 N_1(x), \quad (8)$$

где $J_0(x)$ и $N_0(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода нулевого порядка; $J_1(x)$ и $N_1(x)$ – функции Бесселя первого и второго рода первого порядка.

Так как, опираясь на труды Л.Р. Неймана⁵, К.С. Демирчяна⁶ и других авторов, на оси провода величины J_m и H_m не могут иметь бесконечно большие значения, то $B_0 = 0$ и $B_1 = 0$. Тогда уравнения (7) и (8) принимают следующий вид:

$$\dot{J}_m = A_0 J_0(x); \quad (9)$$

$$\dot{H}_m = A_1 J_1(x). \quad (10)$$

Из [29, 30] решение уравнения Бесселя – единственное с точностью до константы путем разложения в ряд⁷:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}, \quad n \geq 0. \quad (11)$$

При подстановке в уравнение (5) $x = x\sqrt{-j}$ общее решение имеет следующий вид:

$$y = AJ_n(x\sqrt{-j}). \quad (12)$$

⁷Садовой В.Д. Дифференциальное уравнение Бесселя: учеб. пособ. 2 изд., испр. и доп. М.: Московский автомобильно-дорожный гос. тех. ун-т, 2019. 100 с.

Решением уравнения (12) является ряд с мнимым аргументом $x\sqrt{-j}$:

$$J_n(x\sqrt{-j}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x\sqrt{-j}}{2}\right)^{2k+n}}{k!(n+k)!}, \quad n \geq 0. \quad (13)$$

При $n = 0$ имеем

$$\begin{aligned} J_0(x\sqrt{-j}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x\sqrt{-j}}{2}\right)^{2k+0}}{k!(0+k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x\sqrt{-j}}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot (\sqrt{-j})^{2k}}{(k!)^2} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \cdot (-j)^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате получим комплексный знакопеременный ряд:

$$J_0(x\sqrt{-j}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} = 1 + j \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + j \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} + \dots \quad (15)$$

Отделив действительную часть от мнимой, получаем

$$\begin{aligned} J_0(x\sqrt{-j}) &= \left[1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 - \frac{1}{(6!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} + \dots \right] + j \left[\frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \frac{1}{(7!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{14} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (16) удобно записывать в виде

$$J_0(x\sqrt{-j}) = \text{ber}_0(x) + j\text{bei}_0(x), \quad (17)$$

где

$$\text{ber}_0(x) = 1 - \frac{1}{(2!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(4!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^8 - \frac{1}{(6!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{12} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4k}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{bei}_0(x) &= \frac{1}{(1!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{(3!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \frac{1}{(5!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{10} - \frac{1}{(7!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{14} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{((2k+1)!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Функции $\text{ber}_0(x)$ (Bessel reelle – Бесселя вещественные) и $\text{bei}_0(x)$ (Bessel imaginaire – Бесселя мнимые) представляют собой так называемые функции Бесселя, связанные с функцией $J_0(x\sqrt{-j})$.

Выражение (17) в показательной форме имеет следующий вид:

$$J_0(x\sqrt{-j}) = \text{ber}_0(x) + j\text{bei}_0(x) = b_0(x)e^{j\beta_0(x)}, \quad (20)$$

где $b_0(x)$ – модуль функции Бесселя

$$b_0(x) = \sqrt{\text{ber}_0^2(x) + \text{bei}_0^2(x)}; \quad (21)$$

$\beta_0(x)$ – аргумент функции Бесселя

$$\beta_0(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{bei}_0(x)}{\operatorname{ber}_0(x)} \right). \quad (22)$$

Аналогичным образом задача может быть решена при подстановке $n = 1$ в уравнение (13), в итоге получаем

$$J_1(x\sqrt{-j}) = \sqrt{-j} \cdot (\operatorname{ber}_1(x) + j\operatorname{bei}_1(x)), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{ber}_1(x) &= \frac{1}{0! \cdot 1!} \left(\frac{x}{2}\right)^1 - \frac{1}{2! \cdot 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^5 + \frac{1}{4! \cdot 5!} \left(\frac{x}{2}\right)^9 - \frac{1}{6! \cdot 7!} \left(\frac{x}{2}\right)^{13} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4k+1}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{bei}_1(x) &= \frac{1}{1! \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^3 - \frac{1}{3! \cdot 4!} \left(\frac{x}{2}\right)^7 + \frac{1}{5! \cdot 6!} \left(\frac{x}{2}\right)^{11} - \frac{1}{7! \cdot 8!} \left(\frac{x}{2}\right)^{15} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4k+3}. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение (23) в показательной форме принимает следующий вид:

$$J_1(x\sqrt{-j}) = 1 \cdot M_1(x) \cdot e^{j\left(\theta_1(x) - \frac{\pi}{4}\right)} = b_1(x) e^{j\beta_1(x)}, \quad (26)$$

где $b_1(x)$ – модуль функции Бесселя

$$b_1(x) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{\operatorname{ber}_1^2(x) + \operatorname{bei}_1^2(x)} = \sqrt{\operatorname{ber}_1^2(x) + \operatorname{bei}_1^2(x)}; \quad (27)$$

$\beta_1(x)$ – аргумент функции Бесселя

$$\beta_1(x) = \theta_1(x) - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{bei}_1(x)}{\operatorname{ber}_1(x)} \right) - \frac{\pi}{4}. \quad (28)$$

Как показывают уравнения (18), (19), (23), (24), модули и аргументы функций Бесселя, получаемые в уравнениях (21), (22), (26), (27), – числа действительные. Следовательно, для их определения при анализе скин-эффекта проводника достаточно определить переменную $x = R\sqrt{\omega\mu\gamma}$, где R – радиус проводника, м; $\omega = 2\pi f$ – угловая частота, рад; f – частота электрического тока, протекающего через проводник, Гц; μ – абсолютная магнитная проницаемость проводника, Гн/м; γ – удельная проводимость, См/м.

Используя соотношение для провода круглого сечения, приведенное в трудах Л.Р. Неймана⁵, К.С. Демирчяна⁶ и других авторов, после подстановки $x = R\sqrt{\omega\mu\gamma}$ получим отношение комплексного сопротивления к омическому сопротивлению проводника:

$$\frac{Z_{\text{внутр}}}{r_0} = \frac{|Z|_{\text{внутр}}}{r_0} \cdot e^{j\varphi} = \frac{x}{2} \cdot \frac{b_0(x)}{b_1(x)} \cdot e^{j\left(\beta_0(x) - \beta_1(x) - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (29)$$

при этом $\varphi = \beta_0(x) - \beta_1(x) - \frac{\pi}{4}$ – угол, на который запаздывает по фазе напряженность магнитного поля относительно напряженности электрического поля на поверхности провода;

$|z|_{\text{внутр}}$ – модуль комплексного сопротивления проводника равен $\sqrt{r_{\text{внутр}}^2 + x_{\text{внутр}}^2}$; $b_0(x)$, $b_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ – модули и аргументы функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков комплексных чисел $J_0(x)$ и $J_1(x)$ на поверхности провода.

Выразив действительную часть в уравнении (28), получим коэффициенты увеличения активного сопротивления r к сопротивлению постоянному току r_0 для разных частот:

$$k_v(f) = \frac{r}{r_0} = \frac{x}{2} \cdot \frac{b_0(x)}{b_1(x)} \cdot \cos(\beta_0(x) - \beta_1(x) - 45^\circ). \quad (30)$$

Таким образом, оценка влияния скин-эффекта на проводники сводится к определению модулей и аргументов функций Бесселя первого рода нулевого и первого порядков $b_0(x)$, $b_1(x)$, $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Исследования влияния скин-эффекта проводились в программе моделирования ELCUT методом конечных элементов.

Первоначально рассмотрено влияние скин-эффекта на провод АС 300/39 без учета проволочной конструкции и неоднородной (сталеалюминиевой) структуры. Конструктивно данный провод представляет собой алюминиевый круг сечением 339 мм², геометрия которого описана в программе двумя способами.

На первоначальном этапе рассмотрено влияние скин-эффекта на проводник, аналогичный проводу АС 300/39 без учета проволочной и неоднородной структуры. Ниже представлено моделирование сплошного алюминиевого проводника сечением 339 мм² круглой формы в виде двух конструкций:

- круг сечением 339 мм², приведенный на рис. 2 а;
- однородный проводник, состоящий из круга 39 мм² и внешнего кольца (полый проводник) сечением 300 мм², приведенный на рис. 2 б.

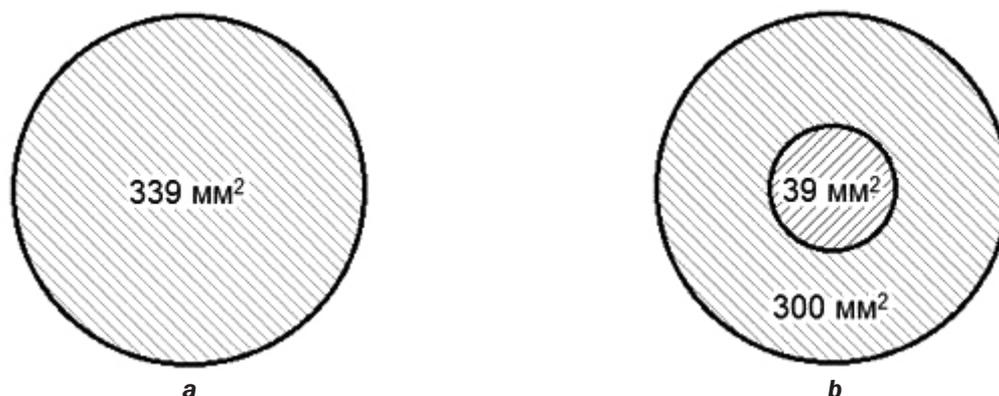


Рис. 2. Поперечное сечение сплошного алюминиевого проводника: а – круг сечением 339 мм²; б – круглый составной проводник

Fig. 2. Cross-section of a solid aluminium conductor: a – circle with the cross-section of 339 мм²; b – round composite conductor

На рис. 3 а приведена схема электрической цепи для сплошного алюминиевого проводника сечением 339 мм². На рис. 3 б представлена схема электрической цепи для составного проводника, при этом внешнее кольцо сечением 300 мм² имеет сопротивление R_1 , а внутренний круг сечением 39 мм² – R_2 . Стоит оговорить заранее, что ток из внешнего кольца не перетекает во внутренний круг, и наоборот. Постановка задачи требует рассматривать составной провод как два проводника, подключенных параллельно к источнику электродвижущей силы (ЭДС). ЭДС выдает среднеквадратическое значение переменного напряжения $|U| = 1$ В (1 VAC – от англ. Volts alternating current – напряжение переменного тока) различной частоты, приложенное к исследуемым проводникам.

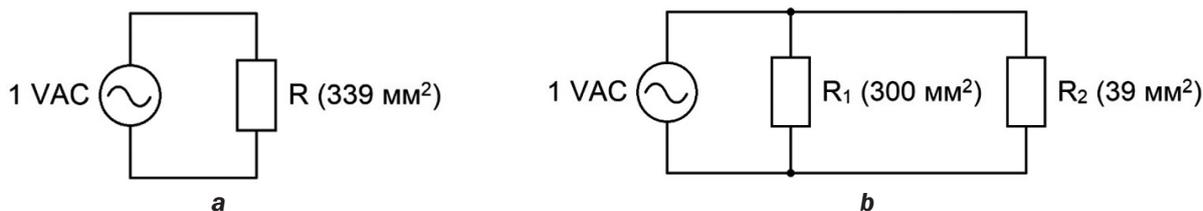


Рис. 3. Схема электрической цепи для расчета алюминиевого проводника: а – круг сечением 339 мм²; б – круглый составной проводник

Fig. 3. Electrical circuit diagram for aluminium conductor calculation: a – circle with the cross section of 339 mm²; b – round composite conductor

Сопротивлением, приведенным на рис. 3, является сам проводник, длина которого $L = 50$ м. Это обусловлено тем, что проводник сам является ограничителем тока $|I|$, величина которого не превышает длительно допустимого значения для провода данной конструкции.

Результат моделирования в виде значения тока $|I|$ и фазы φ_1 приведен к виду, удобному для сравнения с математической (эталонной) моделью скин-эффекта по формуле ниже:

$$R(f) = \frac{1}{|I(f)|} \times \cos(-\varphi_{I(f)}). \quad (31)$$

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛОШНОГО АЛЮМИНИЕВОГО ПРОВОДА

На рис. 4 а–d представлены результаты моделирования в виде спектрограмм распределения плотности тока по поперечному сечению проводов для различных частот, где видно, что на границах поверхности плотность тока не меняется, в то время как середина провода разгружается. Для обеих конструкций распределение плотности тока получилось одинаковым, поскольку составной проводник представляет собой сплошной провод сечением 339 мм².

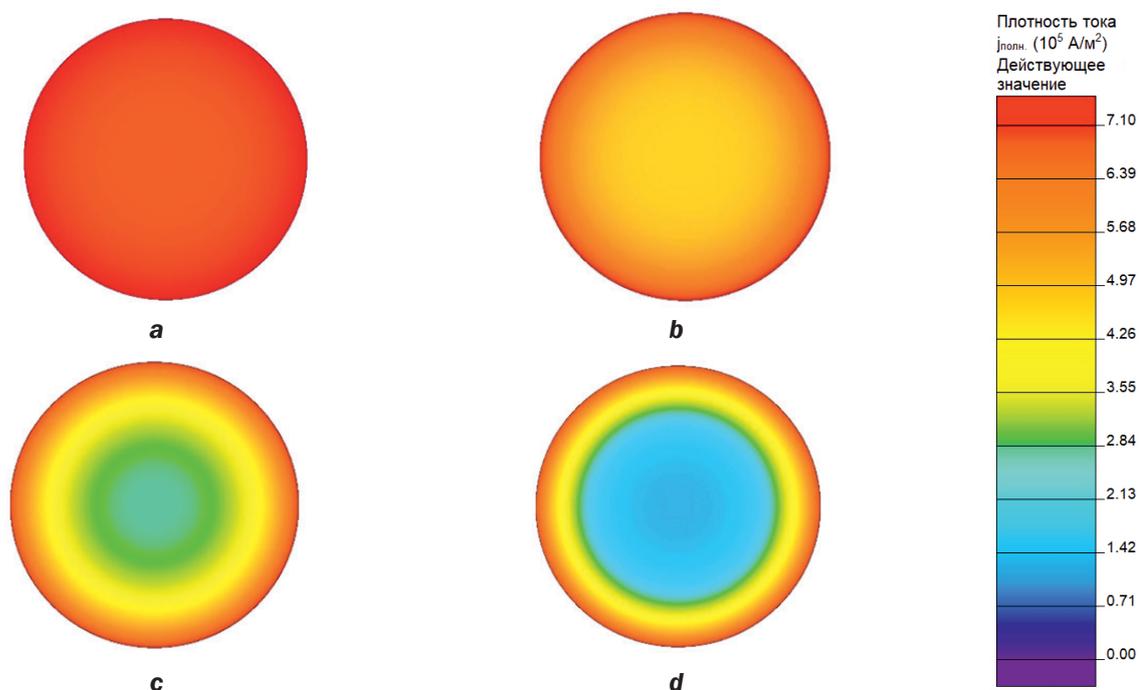


Рис. 4. Спектрограмма распределения тока по поперечному сечению алюминиевого провода: а – на частоте 50 Гц; б – на частоте 200 Гц; с – на частоте 400 Гц; д – на частоте 800 Гц

Fig. 4. Spectrogram of current distribution through the aluminium wire cross-section: a – at the frequency of 50 Hz; b – at the frequency of 200 Hz; c – at the frequency of 400 Hz; d – at the frequency of 800 Hz

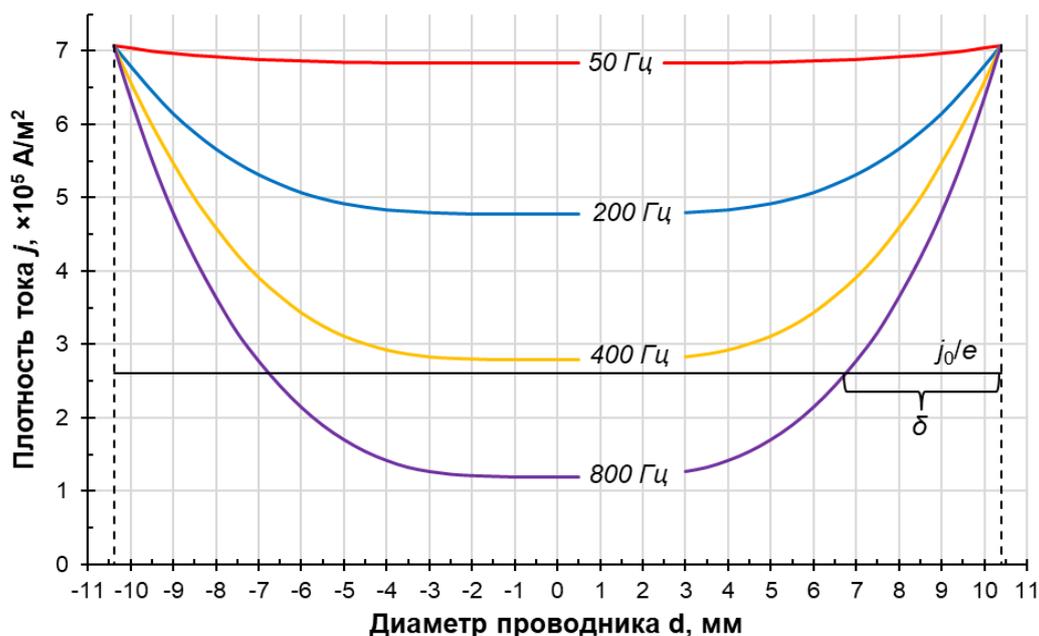


Рис. 5. Распределение плотности тока через поперечное сечение проводника на различных частотах
 Fig. 5. Current density distribution through the conductor cross-section at different frequencies

Рис. 5 численно отображает уменьшение плотности тока при приближении к центру проводника на разных частотах, однако наибольший интерес привлекает кривая, полученная на частоте 800 Гц. При убывании от периферии проводника на расстояние $\delta \approx 3,644$ мм плотность тока уменьшается в e раз и становится равной j_0/e . Величина δ называется глубиной скин-слоя.

Пример численных результатов моделирования сплошного алюминиевого проводника сечением 339 мм^2 для нескольких частот сведен в табл. 1. Суммарный ток, протекающий через составной проводник (см. рис. 2 б), равен току, протекающему через сплошной алюминиевый проводник в форме круга (см. рис. 2 а), и это справедливо для любой частоты f прикладываемого напряжения. Наличие угла φ_i говорит о смещении тока относительно прикладываемого к краям проводника напряжения $|U| = 1 \text{ В}$ (см. рис. 3), более этого, данное смещение стремится к -45° при увеличении частоты.

Таблица 1. Результаты моделирования алюминиевых проводов в программе ELCUT
 Table 1. Simulation results of aluminium wires in ELCUT software

Частота f , Гц	Круглый составной проводник						Круг сечением 339 мм^2	
	Кольцо 300 мм^2		Круг 39 мм^2		Составной провод 339 мм^2		$ I $, А	φ_i , °
	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °		
0	212,280	0	27,597	0	239,880	0	239,880	0
50	206,890	-9,266	26,666	-20,020	233,140	-10,489	233,140	-10,489
200	162,510	-26,764	18,671	-67,698	177,040	-30,727	177,040	-30,727
400	123,850	-33,354	10,935	-106,540	127,440	-38,065	127,440	-38,065
800	93,105	-37,650	4,767	-155,560	90,971	-40,304	90,971	-40,304

По выражению (30) определены активные сопротивления провода для различных частот. Например, на частоте 0 Гц (при постоянном токе) $R(0) = (1/239,880) \cdot \cos(0^\circ) = 4,169 \cdot 10^{-3}$ Ом, в то время как на частоте 800 Гц $R(800) = (1/90,971) \cdot \cos(40,304^\circ) = 8,383 \cdot 10^{-3}$ Ом. Применив уравнение (29), были получены коэффициенты увеличения активного сопротивления $k_v(f)$, а также пересчитаны сопротивления r_0 на единицу длины (погонные сопротивления) для гармоник от 0 до 20. При определении погонного активного сопротивления следует помнить, что длина моделируемого проводника задана $L = 50$ м.

Результаты данных, полученных при моделировании сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм², и расчеты по эталонной модели сведены в табл. 2.

Таблица 2. Коэффициенты увеличения активного сопротивления $k_v(f)$ и погонные сопротивления r_0 сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм² на различных гармониках

Table 2. Coefficients of increase of active resistance $k_v(f)$ and resistances per unit length r_0 of a solid aluminium wire with the cross-section of 339 мм² at different harmonics

Частота f , Гц	Гармоника ν	Математическая модель	Моделирование сплошного круга		Моделирование составного провода	
		$k_v(f)$, о.е.	r_0 , Ом/км	$k_v(f)$, о.е.	r_0 , Ом/км	$k_v(f)$, о.е.
0 (DC)	0	1	0,083	1	0,083	1
50	1	1,012	0,084	1,012	0,084	1,012
100	2	1,046	0,087	1,046	0,087	1,046
150	3	1,098	0,092	1,098	0,092	1,098
200	4	1,165	0,097	1,165	0,097	1,165
250	5	1,240	0,103	1,240	0,103	1,240
300	6	1,320	0,110	1,320	0,110	1,320
350	7	1,402	0,117	1,402	0,117	1,402
400	8	1,482	0,124	1,482	0,124	1,482
450	9	1,560	0,130	1,560	0,130	1,560
500	10	1,634	0,136	1,634	0,136	1,634
550	11	1,705	0,142	1,705	0,142	1,705
600	12	1,772	0,148	1,772	0,148	1,772
650	13	1,836	0,153	1,836	0,153	1,836
700	14	1,897	0,158	1,897	0,158	1,897
800	16	2,011	0,168	2,011	0,168	2,011
900	18	2,117	0,176	2,117	0,176	2,117
1000	20	2,216	0,185	2,216	0,185	2,216

Резюмируя данные из табл. 2, на высших гармониках возрастает активное сопротивление проводника по отношению к омическому сопротивлению: на 5-й гармонике увеличение составляет 24%, на 7-й – 40%, на 11-й – 71% и на 13-й – 84%. Это обстоятельно говорит о необходимости учета скин-эффекта при оценке «добавочных потерь» в проводнике от высших гармоник.

Относительная погрешность моделирования сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм² в сравнении с математической моделью приведена на рис. 6 а, в то время как для составного провода данный показатель представлен на рис. 6 б. Таким образом, разница между расчетами с применением дифференциальных уравнений Бесселя и программным моделированием составила менее 0,004%, что обусловлено погрешностью метода конечных элементов при задании начальных настроек для расчета рассмотренных моделей проводов.

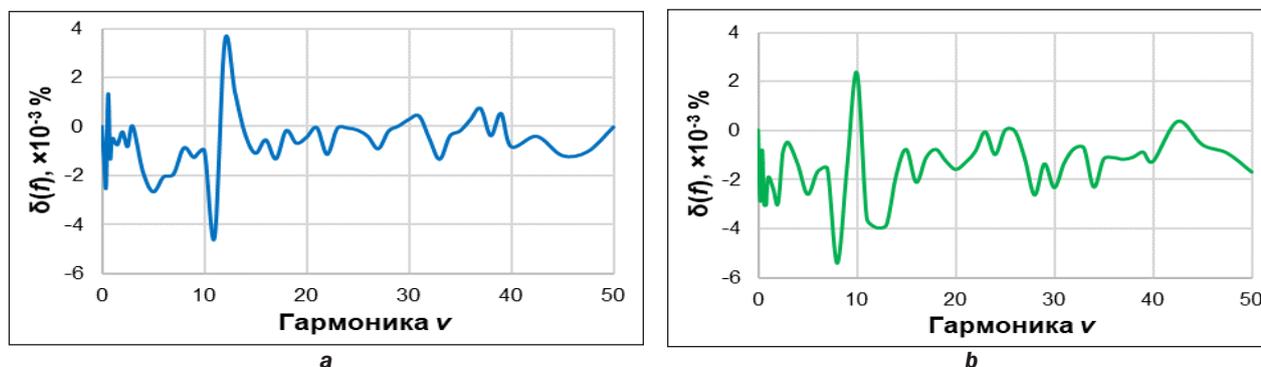


Рис. 6. Погрешность результатов моделирования по отношению к математической модели: а – сплошной алюминиевый провод сечением 339 мм²; б – составной алюминиевый провод

Fig. 6. Error of simulation results in relation to the mathematical model: a – solid aluminium wire with the cross section of 339 мм²; b – composite aluminium wire

Подводя итог, в результате моделирования сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм^2 в виде составного (см. рис. 2 *b*) доказана состоятельность оценки влияния скин-эффекта на проводники методом конечных элементов. На основании этого предлагается рассматривать влияние скин-эффекта на сталеалюминиевые провода ВЛ с использованием схемы электрической цепи (см. рис. 3 *b*) без учета скрутки проволок между собой на первоначальном этапе. Кроме того, модель, учитывающая явление эффекта вытеснения тока в проводах ВЛ, предполагает пренебрежение эффектом близости, поскольку расстояние между самими проводами значительно превышает диаметр проводника [31].

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЛЕАЛЮМИНИЕВОГО ПРОВОДА ЛИНИИ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

Результаты моделирования круглого неоднородного провода представлены на рис. 7 *a-d* в виде спектрограмм распределения плотности тока по поперечному сечению.

Согласно схеме электрической цепи (см. рис. 3 *b*) и выводам, приведенным ранее, проведено моделирование провода марки АС 300/39, рассматриваемого в виде двух конструкций:

- неоднородный проводник, состоящий из стального круга 39 мм^2 и внешнего алюминиевого кольца сечением 300 мм^2 (рис. 2 *b*);
- проволочная конструкция провода (рис. 8).

На рис. 8 *a-d* (аналогично рис. 7 *a-d*) приведены результаты моделирования провода АС 300/39. На рис. 9 численно отображено распределение плотности тока по поперечному сечению круглого сталеалюминиевого провода, где наблюдается перепад плотности тока на границе между сталью и алюминием. Рис. 10 иллюстрирует перепады плотности тока по поперечному сечению провода АС 300/39 в соответствии с линией разреза провода (рис. 8).

Численные результаты моделирования круглого сталеалюминиевого провода представлены в табл. 3, для провода АС 300/39 – в табл. 4. На высших гармониках смещение угла

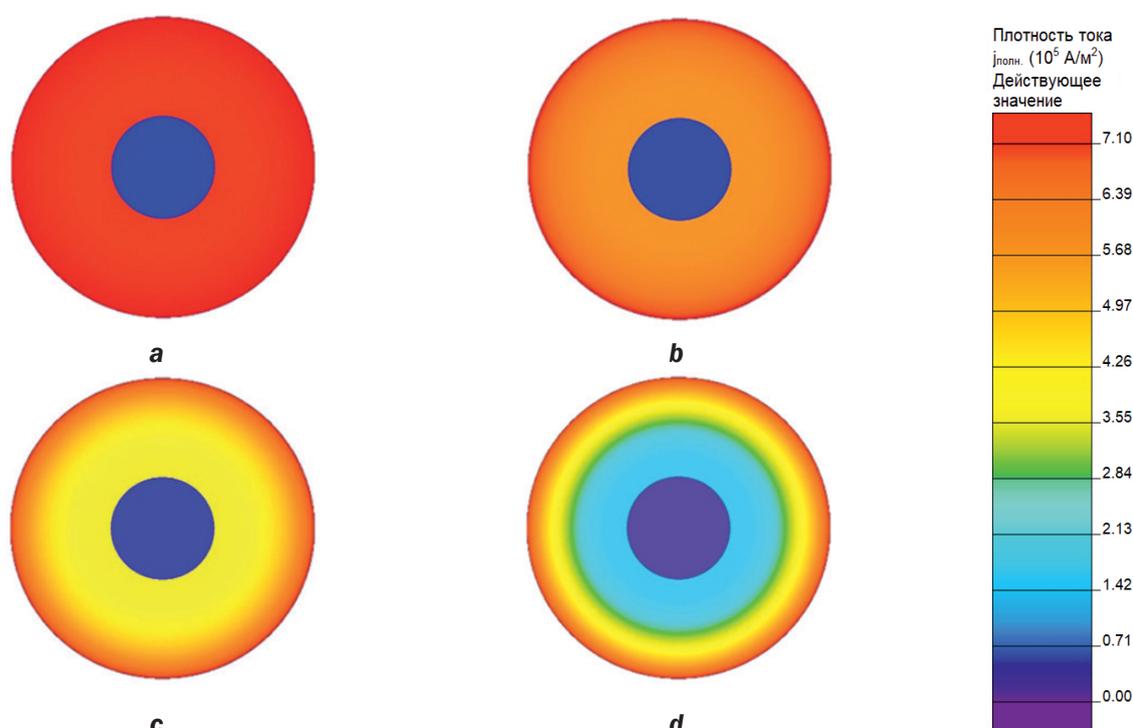


Рис. 7. Спектрограмма распределения тока по поперечному сечению неоднородного сталеалюминиевого провода: *a* – на частоте 50 Гц; *b* – 200 Гц; *c* – 400 Гц; *d* – 800 Гц

Fig. 7. Spectrogram of current distribution through the cross section of an inhomogeneous steel-aluminium wire: *a* – at the frequency of 50 Hz; *b* – 200 Hz; *c* – 400 Hz; *d* – 800 Hz

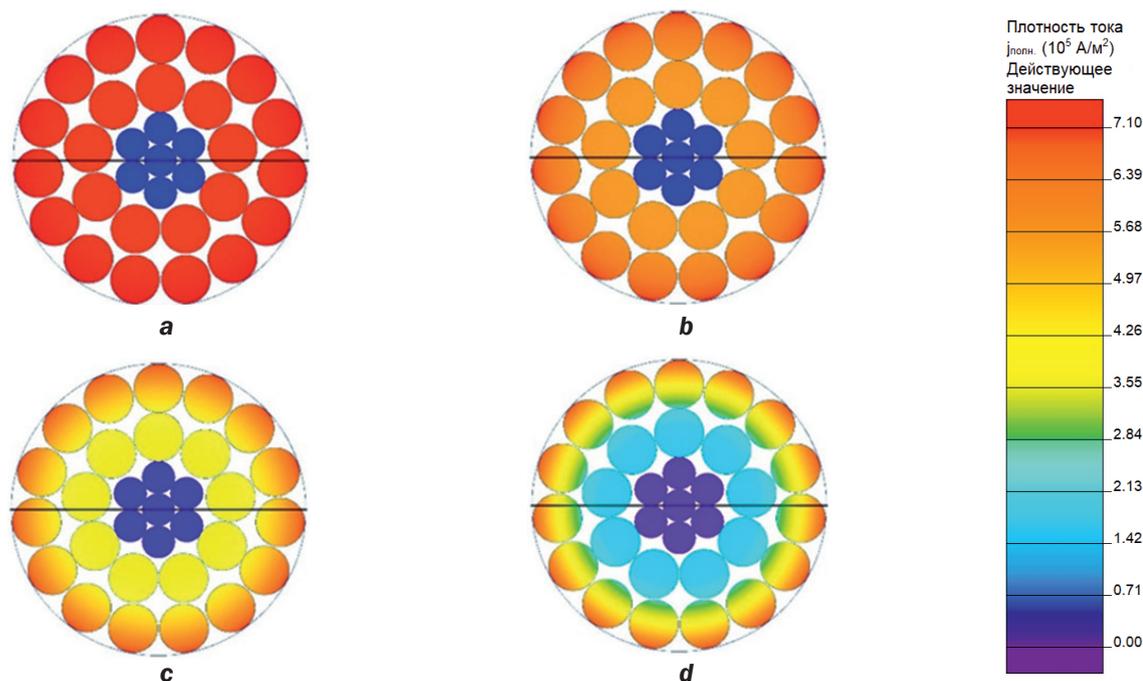


Рис. 8. Спектрограмма распределения тока по поперечному сечению провода АС 300/39: а – на частоте 50 Гц; б – 200 Гц; с – 400 Гц; д – 800 Гц

Fig. 8. Spectrogram of current distribution through the cross-section of the 300/39 steel-aluminium wire: а – at the frequency of 50 Hz; б – 200 Hz; с – 400 Hz; д – 800 Hz

протекающего тока φ_1 стремится к -45° для круглого неоднородного провода, однако для провода АС 300/39 это смещение продолжает увеличиваться за счет наличия диэлектрической среды. Это обстоятельство не оказывает влияния на активное сопротивление провода, рассматриваемое в данной работе.

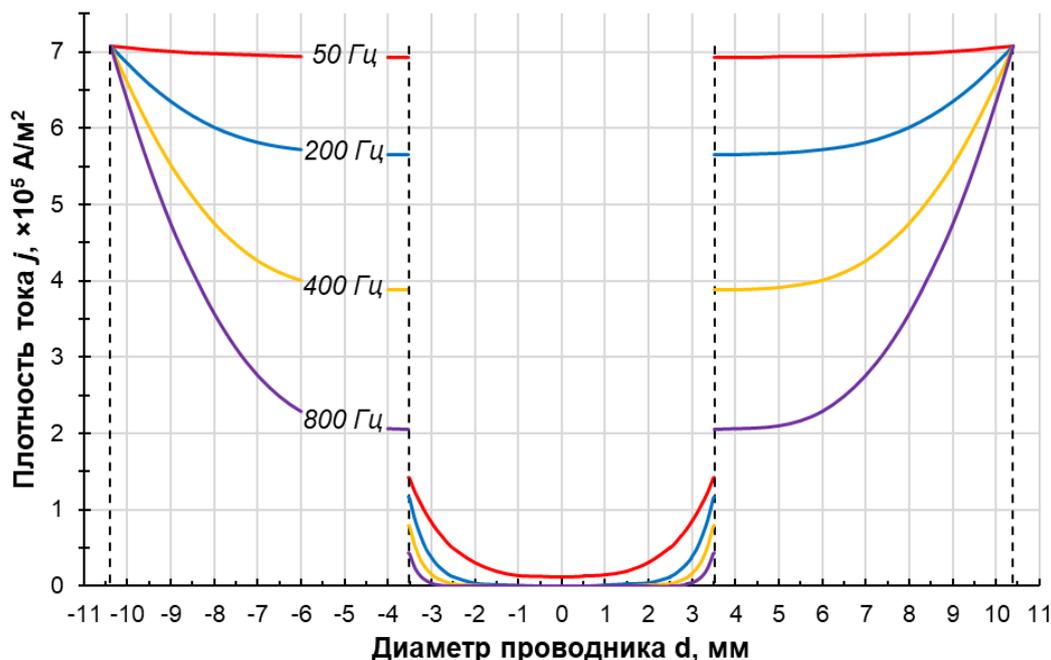


Рис. 9. Распределение плотности тока через поперечное сечение неоднородного сталеалюминиевого проводника на различных частотах

Fig. 9. Current density distribution through the cross section of an inhomogeneous steel-aluminium conductor at different frequencies

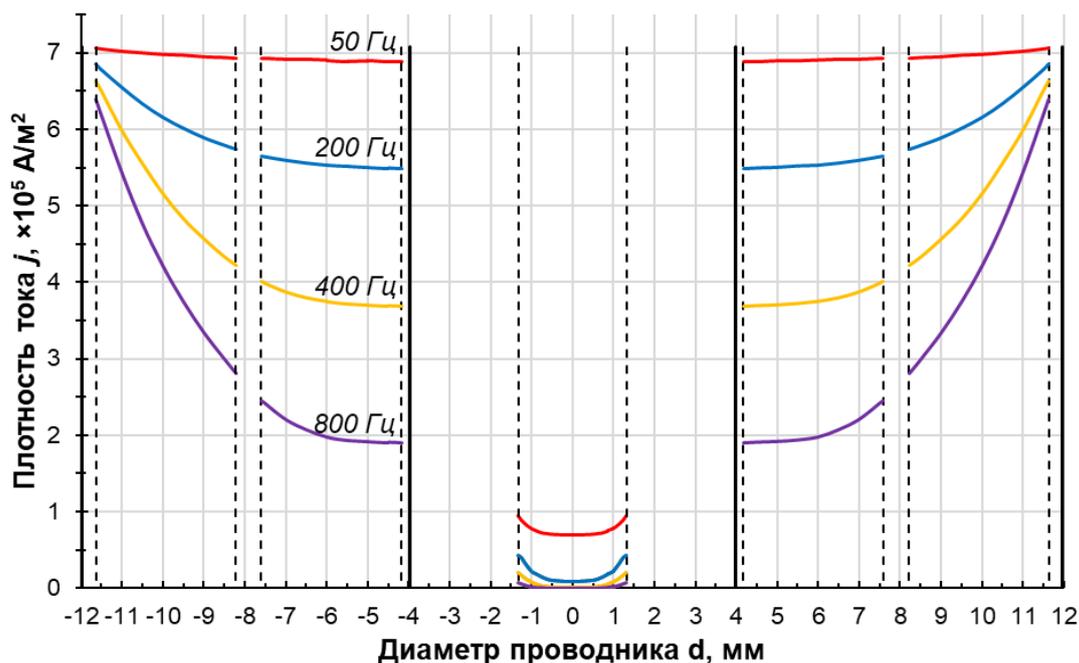


Рис. 10. Распределение плотности тока через поперечное сечение АС 300/39 на различных частотах
 Fig. 10. Current density distribution through the 300/39 steel-aluminium wire cross-section at different frequencies

Таблица 3. Результаты моделирования неоднородного сталеалюминиевого проводника
 Table 3. Simulation results of the inhomogeneous steel-aluminium wire

Частота f , Гц	Сплошной неоднородный сталеалюминиевый проводник					
	Алюминий (кольцо 300 мм ²)		Сталь (круг 39 мм ²)		Неоднородный провод 339 мм ²	
	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °
0	212,280	0	5,652	0	217,940	0
50	208,920	-7,723	1,752	-54,996	210,120	-8,074
200	176,180	-25,804	0,735	-92,860	176,470	-26,023
400	132,570	-36,650	0,360	-126,360	132,580	-36,806
800	91,761	-40,968	0,136	-168,480	91,678	-41,036
1200	75,086	-41,438	0,068	-199,050	75,023	-41,458
1600	65,571	-41,763	0,039	-224,630	65,532	-41,761
2000	59,037	-42,098	0,024	-247,120	59,015	-42,088

Таблица 4. Результаты моделирования провода АС 300/39 в программе ELCUT
 Table 4. Simulation results of the 300/39 steel-aluminium wire in ELCUT software

Частота f , Гц	Провод марки АС 300/39					
	Алюминий (300 мм ²)		Сталь (39 мм ²)		АС 300/39	
	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °	$ I $, А	φ_i , °
0	213,411	0	5,595	0	219,006	0
50	209,280	-8,513	3,567	-53,127	211,834	-9,191
200	173,540	-27,874	1,265	-100,002	173,932	-28,271
400	128,730	-39,442	0,577	-133,870	128,687	-39,698
800	87,918	-45,285	0,203	-175,800	87,786	-45,386
1200	70,695	-47,307	0,097	-206,010	70,605	-47,336
1600	60,467	-48,835	0,054	-231,040	60,414	-48,833
2000	53,328	-50,038	0,032	-252,840	53,298	-50,025

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Увеличение активного сопротивления, выраженное через $k_v(f)$ для сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм² (см. рис. 2 а), круглого неоднородного сталеалюминиевого провода (см. рис. 2 б) и провода марки АС 300/39 проиллюстрировано в табл. 5.

Таблица 5. Сравнительная оценка $k_v(f)$ сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм², круглого неоднородного сталеалюминиевого провода и провода АС 300/39 на различных гармониках

Table 5. Comparative estimation $k_v(f)$ of a 339 mm² solid aluminium wire, round inhomogeneous steel-aluminium wire and 300/39 steel-aluminium wire at different harmonics

Частота f, Гц	Гармоника ν	Математическая модель	Модель неоднородного сталеалюминиевого проводника	Моделирование АС 300/39
		$k_v(f)$, о.е.	$k_v(f)$, о.е.	$k_v(f)$, о.е.
0 (DC)	0	1	1	1
50	1	1,012	1,027	1,021
100	2	1,046	1,046	1,044
150	3	1,098	1,073	1,073
200	4	1,165	1,110	1,109
250	5	1,240	1,154	1,152
300	6	1,320	1,203	1,201
350	7	1,402	1,258	1,254
400	8	1,482	1,316	1,309
450	9	1,560	1,376	1,367
500	10	1,634	1,438	1,424
550	11	1,705	1,500	1,482
600	12	1,772	1,561	1,539
650	13	1,836	1,621	1,595
700	14	1,897	1,680	1,649
800	16	2,011	1,793	1,752
900	18	2,117	1,899	1,849
1000	20	2,216	1,998	1,939

Влияние скин-эффекта на активное сопротивление сталеалюминиевых проводов выражено в меньшей степени в сравнении со сплошным алюминиевым проводом. Например, на 5-й гармонике увеличение составляет 15% относительно омического сопротивления, на 7-й – 25%.

Относительная погрешность математической модели сплошного алюминиевого провода сечением 339 мм² в сравнении с результатами моделирования провода АС 300/39 (рис. 11) превышает 5%, начиная с 4-й гармоники. Погрешность моделирования сплошного сталеалюминиевого провода (см. рис. 11) относительно модели АС 300/39 не превышает 4% на интервале гармоник от 0 до 40.

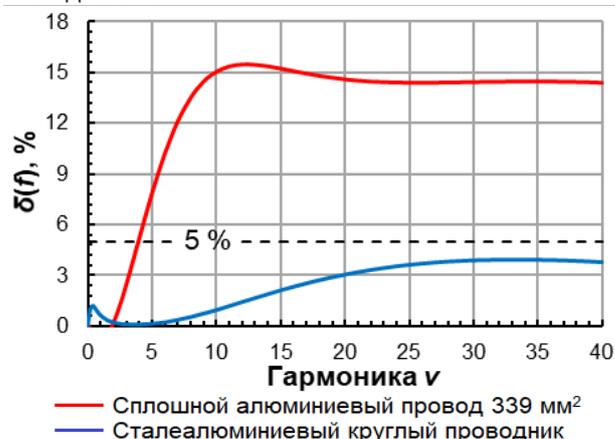


Рис. 11. Погрешность коэффициента скин-эффекта цилиндрических проводов относительно провода АС 300/39
Fig. 11. Skin-effect coefficient error of cylindrical wires relative to 300/39 steel-aluminium wire

Выше было рассмотрено влияние скин-эффекта на активное сопротивление проводов различной конструкции при температуре 20°C в интервале гармоник, представляющих практический интерес. Отметим, что при нагреве провода действие скин-эффекта на его активное сопротивление ослабляется из-за уменьшения удельной проводимости (это отразится на переменной).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено влияние скин-эффекта на увеличение активного сопротивления $k_V(f)$ сплошного алюминиевого провода в форме круга сечением 339 мм^2 . По результатам моделирования проводника можно заключить, что увеличение частоты f источника ЭДС $|U|$ (1 В) вызывает скин-эффект, который проявляется в понижении эффективного значения пропускаемого тока $|I|$ через проводник (см. табл. 1). Этим явлением и обусловлено неравномерное распределение тока пропускаемого по сечению проводника (см. рис. 5), при повышении частоты. Таким образом, с повышением частоты увеличивается погонное активное сопротивление проводника r_0 (см. табл. 2).

Расчеты круглого алюминиевого провода сечением 339 мм^2 , полученные при моделировании, совпадают с математической моделью, основанной на теории электромагнитного поля. Более того, моделирование методом конечных элементов раскрывает возможность анализа влияния скин-эффекта на сталеалюминиевые провода, что было подтверждено на примере провода АС 300/39.

Скин-эффект в проводах марки АС проявляется менее заметно в сравнении с конструкцией сплошного алюминиевого провода сечением, равным сумме алюминиевой и стальной частям провода ВЛ. При оценке аналитической моделью (формула (30) влияния скин-эффекта на активное сопротивление провода АС 300/39 погрешность, получаемая в расчетах, превысит 5%. Таким образом, необходимо уточнение математической модели проводов ВЛ, имеющих проволочную конструкцию.

На примере провода АС 300/39 доказана возможность рассмотрения данного провода в виде цилиндрического неоднородного провода, состоящего из круга внутри сечением 39 мм^2 и полого алюминия снаружи сечением 300 мм^2 . Это подтверждено результатами исследований, в которых погрешность на исследуемом интервале гармоник не превышала 5%. Конструкцию других проводов марки АС для математического представления предлагается рассматривать аналогично.

Список источников

1. Levačić G., Župan A., Čurin M. An overview of harmonics in power transmission networks // First International Colloquium on Smart Grid Metrology. 2018. <https://doi.org/10.23919/SMAGRIMET.2018.8369828>.
2. Арриллага Дж., Брэдли Д., Боджер П. Гармоники в электрических системах / пер. с англ. Е.А. Васильчикова; под ред. Ю.С. Железко. М.: Энергоатомиздат, 1990. 320 с.
3. Шандрыгин Д.А., Довгун В.П., Егоров Д.Э., Маньшин М.В. Анализ резонансных режимов в электроэнергетических системах с тяговой нагрузкой // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2020. Т. 24. № 2. С. 396–407. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-2-396-407>. EDN: MPFYPK.
4. Буй Нгок Хунг, Коверникова Л.И. Анализ возможности применения активных фильтров для снижения не-синусоидальности напряжения в системе электроснабжения одного из угольных карьеров Вьетнама // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2020. Т. 24. № 2. С. 318–332. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-2-318-332>. EDN: KCTRQU.
5. Пантелеев В.И., Кузьмин И.С., Завалов А.А., Тихонов А.В., Умецкая Е.В. Качество электрической энергии в системах электроснабжения горно-перерабатывающих предприятий России // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2021. Т. 25. № 3. С. 356–368. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2021-3-356-368>. EDN: SRSSJA.
6. Бебихов Ю.В., Егоров А.Н., Матул Г.А., Семенов А.С., Харитонов Я.С. Поиск путей повышения эффективности применения высоковольтного частотно-регулируемого электропривода в условиях горного производства // Естественные и технические науки. 2018. № 8. С. 228–234. EDN: XYUMDB.
7. Ashraf N., Abbas G., Abbassi R., Jerbi H. Power quality analysis of the output voltage of AC voltage and frequency controllers realized with various voltage control techniques // Applied Sciences. 2021. Vol. 11. Iss. 2. P. 538. <https://doi.org/10.3390/app11020538>. EDN: BSGOVR.

8. Dutta N., Kaliannan P., Subramaniam U. Experimental analysis of PQ parameter estimation of VFD drives // *Materials Science and Engineering: IOP Conference Series*. 2020. Vol. 937. Iss. 1. P. 012042. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/937/1/012042>.
9. Jyothi R., Sumitgupta, Rao K.U., Jayapal R. IoT application for real-time condition monitoring of voltage source inverter driven induction motor // *Innovative Data Communication Technologies and Application*. 2021. Vol. 59. P. 97–105. https://doi.org/10.1007/978-981-15-9651-3_8.
10. Ахмедов С.Б., Климов П.А. Влияние распределенной генерации на базе возобновляемых источников энергии с использованием силовой электроники на резонанс на гармонических частотах // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2020. Т. 24. № 1. С. 97–111. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-1-97-111>. EDN: JZCIJV.
11. Закарюкин В.П., Крюков А.В., Черепанов А.В. Моделирование резонансных процессов на высших гармониках в тяговых сетях переменного тока // *Современные технологии. Системный анализ. Моделирование*. 2016. № 3. С. 214–221. EDN: WMELHD.
12. Hu Haitao, Shao Yang, Tang Li, Ma Jin, He Zhengyou, Gao Shibin. Overview of harmonic and resonance in railway electrification systems // *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2018. Vol. 54. Iss. 5. P. 5227–5245. <https://doi.org/10.1109/TIA.2018.2813967>.
13. Анненков Е.О., Зубова Е.В., Селезнев А.С., Федосов Д.С. Оценка эффективности метода двух измерений при определении параметров схем замещения элементов электрической сети для высших гармонических составляющих токов и напряжений // *iPolytech Journal*. 2022. Т. 26. № 3. С. 401–414. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2022-3-401-414>.
14. Silvério E.T., Macedo Junior J.R. Measuring and modeling the skin effect for harmonic power flow studies // *Energies*. 2023. Vol. 16. Iss. 23. P. 7913. <https://doi.org/10.3390/en16237913>.
15. Zhang Xiao-Ping, Yan Zuanhong. Energy quality: a definition // *IEEE Open Access Journal of Power and Energy*. 2020. Vol. 7. P. 430–440. <https://doi.org/10.1109/OAJPE.2020.3029767>.
16. Боровиков В.С., Волков М.В., Иванов В.В., Литвак В.В., Мельников В.А., Погонин А.И. [и др.]. Режимные свойства электрических сетей 110 кВ юга России в обеспечении эффективности транспорта электроэнергии: монография. Томск: STT, 2013. 268 с. EDN: TZMHRJ.
17. Боровиков В.С., Волков М.В., Иванов В.В., Литвак В.В., Мельников В.А., Погонин А.И., Харлов Н.Н. Опыт корпоративного обследования электрических сетей 110 кВ Сибири: монография. Томск: Томский политехнический университет, 2010. 227 с. EDN: QMLILB.
18. Харлов Н.Н. Резонансные режимы многопроводных линий электропередачи // *Электричество*. 2009. № 12. С. 9–13.
19. Харлов Н.Н., Иванов В.В., Погонин А.В., Мельников В.А. Формирование уравнений установившихся несинусоидальных режимов электрических систем с учетом распределенности параметров ЛЭП // *Известия Томского политехнического университета*. 2009. Т. 314. № 4. С. 56–59. EDN: KVYIBF.
20. Харлов Н.Н., Боровиков В.С., Литвак В.В., Погонин А.В., Мельников В.А. Энергетическое обследование несинусоидальных режимов многопроводных линий электропередачи // *Электричество*. 2011. № 12. С. 12–15.
21. Боровиков В.С., Харлов Н.Н., Акимжанов Т.Б. О необходимости включения добавочных потерь от высших гармоник тока в технологические потери при передаче электрической энергии // *Известия Томского политехнического университета*. 2013. Т. 322. № 4. С. 91–93. EDN: QAREGB.
22. Akimzhanov T.B., Kharlov N.N., Borovikov V.S., Ushakov V.Y. Development of calculation methods for additional electrical power losses during transportation // *The 9th International Forum on Strategic Technology (Cox's Bazar, 21–23 October 2014)*. Cox's Bazar: IEEE, 2014. P. 351–354. <https://doi.org/10.1109/IFOST.2014.6991138>. EDN: UFWCJV.
23. Payne A. Skin effect, proximity effect and the resistance of circular and rectangular conductors. 2021. Режим доступа: https://www.researchgate.net/publication/351306996_SKIN_EFFECT_PROXIMITY_EFFECT_AND_THE_RESISTANCE_OF_CIRCULAR_AND_RECTANGULAR_CONDUCTORS (дата обращения: 25.09.2024).
24. Ramo S., Whinnery J.R., Van Duzer T. *Fields and waves in communication electronics*. 3rd ed. John Wiley & Sons, 1994. 858 p.
25. Ramo S., Whinnery J.R. *Fields and waves in modern radio*. 2nd ed. John Wiley & Sons, 1953. 576 p.
26. Monteiro J.H.A., Costa E.C.M., Pinto A.J.G., Kurokawa S., Gatous O.M.O., Pissolato J. Simplified skin-effect formulation for power transmission lines // *IET Science, Measurement & Technology*. 2014. Vol. 8. Iss. 2. P. 47–53. <https://doi:10.1049/iet-smt.2013.0072>.
27. Raven M.S. Skin effect in the time and frequency domain—comparison of power series and Bessel function solutions // *Journal of Physics Communications*. 2018. Vol. 2. No. 3. P. 035028. <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aab4a8>.
28. Terman F.E. *Radio engineer's handbook*. Electrical and electronic engineering series. 1st ed. New York; London: McGraw-Hill Book Company, 1943. 1015 p.
29. Кафтanova Ю.В. *Специальные функции математической физики*. Харьков: Новое слово, 2009. 596 с.
30. Анго А. *Математика для электро- и радиоинженеров* / пер. с фр.; под общей ред. К.С. Шифрина. М.: Наука, 1965. 780 с.
31. Kennelly A.E., Laws F.A., Pierce P.H. Experimental researches on skin effects in conductors // *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. 1915. Vol. 34. Iss. 2. P. 1953–2021. <https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1915.4765283>.

References

1. Levačić G., Župan A., Čurin M. An overview of harmonics in power transmission networks. In: *First International Colloquium on Smart Grid Metrology*. 2018. <https://doi.org/10.23919/SMAGRIMET.2018.8369828>.
2. Arrillaga J., Bradley D., Bodger P. Power system harmonics. (Russ. ed.: *Garmoniki v elektricheskikh sistemah*. Moscow: Energoatomizdat; 1990, 320 p.)
3. Shandrygin D.A., Dovgun V.P., Egorov D.E., Manshin M.V. An analysis of resonant modes in electric power systems with a traction load. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2020;24(2):396-407. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-2-396-407>. EDN: MPFYPK.
4. Bui Ngoc Hung, Kovernikova L.I. The applicability of active filters for reduction of voltage non-sinusoidality in the power supply system of a coal mine in Vietnam. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2020;24(2):318-332. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-2-318-332>. EDN: KCTRQU.
5. Panteleev V.I., Kuzmin I.S., Zavalov A.A., Tikhonov A.V., Umetskaya E.V. Power quality in power supply systems of mining and processing enterprises in Russia. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2021;25(3):356-368. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2021-3-356-368>. EDN: SRSSJA.
6. Bebikhov Yu.V., Egorov A.N., Matul G.A., Semenov A.S., Kharitonov Ya.S. Search of ways to improve the efficiency of application of high-voltage frequency-regulated electric drive in conditions of mining production. *Natural and Technical Sciences*. 2018;8:228-234. (In Russ.).
7. Ashraf N., Abbas G., Abbassi R., Jerbi H. Power quality analysis of the output voltage of AC voltage and frequency controllers realized with various voltage control techniques. *Applied Sciences*. 2021;11(2):538. <https://doi.org/10.3390/app11020538>. EDN: BSGOVR.
8. Dutta N., Kaliannan P., Subramaniam U. Experimental analysis of PQ parameter estimation of VFD drives. In: *Materials Science and Engineering: IOP Conference Series*. 2020;937(1):012042. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/937/1/012042>.
9. Jyothi R., Sumitgupta, Rao K.U., Jayapal R. IoT application for real-time condition monitoring of voltage source inverter driven induction motor. *Innovative Data Communication Technologies and Application*. 2021;59:97-105. https://doi.org/10.1007/978-981-15-9651-3_8.
10. Akhmedov S.B., Klimov P.L. Effect of renewable energy-based distributed generation with power invertors on resonance at harmonic frequencies. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2020;24(1):97-111. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-1-97-111>. EDN: JZCIJV.
11. Zakaryukin V.P., Kryukov A.V., Cherepanov A.V. Modelling of highest harmonics resonant processes in alternating current traction nets. *Modern technologies. System analysis. Modeling*. 2016;3:214-221. (In Russ.). EDN: WMELHD.
12. Hu Haitao, Shao Yang, Tang Li, Ma Jin, He Zhengyou, Gao Shibin. Overview of harmonic and resonance in railway electrification systems. *IEEE Transactions on Industry Applications*. 2018;54(5):5227-5245. <https://doi.org/10.1109/TIA.2018.2813967>.
13. Annenkov E.O., Zubova E.V., Seleznev A.S., Fedosov D.S. Effectiveness of the method of two measurements in determining the parameters of equivalent circuits of electrical network elements for the highest harmonic components of currents and voltages. *iPolytech Journal*. 2022;26(3):401-414. (In Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2022-3-401-414>.
14. Silvério E.T., Macedo Junior J.R. Measuring and modeling the skin effect for harmonic power flow studies. *Energies*. 2023;16(23):7913. <https://doi.org/10.3390/en16237913>.
15. Zhang Xiao-Ping, Yan Zuanhong. Energy quality: a definition. *IEEE Open Access Journal of Power and Energy*. 2020;7:430-440. <https://doi.org/10.1109/OAJPE.2020.3029767>.
16. Borovikov V.S., Volkov M.V., Litvak V.V., Kharlov N.N., Mel'nikov V.A., Pogonin A.I., et al. *Regime properties of electrical networks 110 kV in the south of Russia in ensuring efficient transport of electricity*. Tomsk: STT; 2013, 268 p. (In Russ.). EDN: TZMHRJ.
17. Borovikov V.S., Volkov M.V., Ivanov V.V., Litvak V.V., Mel'nikov V.A., Pogonin A.I., Kharlov N.N. *Experience of orporate surveying of 110 kV electrical networks in Siberia*. Tomsk: Tomsk Polytechnic University; 2010, 227 p. (In Russ.). EDN: QMLILB.
18. Kharlov N.N. Resonance modes of multi-wire power transmission lines. *Elektrichestvo*. 2009;12:9-13. (In Russ.).
19. Kharlov N.N., Ivanov V.V., Pogonin A.V., Melnikov V.A. Formation of equations of steady non-sinusoidal modes of electric systems subject to state of distribution of power line parameter. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2009;314(4):56-59. (In Russ.). EDN: KVIYBF.
20. Kharlov N.N., Borovikov V.S., Litvak V.V., Pogonin A.V., Mel'nikov V.A. Energy survey of non-sinusoidal modes of multi-wire power transmission lines. *Elektrichestvo*. 2011;12:12-15. (In Russ.).
21. Borovikov V.S., Kharlov N.N., Akimzhanov T.B. On the need to include additional losses from higher current harmonics in process losses during electric power transmission. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2013;322(4):91-93. (In Russ.). EDN: QAREGB.
22. Akimzhanov T.B., Kharlov N.N., Borovikov V.S., Ushakov V.Y. Development of calculation methods for additional electrical power losses during transportation. In: *The 9th International Forum on Strategic Technology*. 21–23 October 2014, Cox's Bazar. Cox's Bazar: IEEE; 2014, p. 351-354. (In Russ.). <https://doi.org/10.1109/IFOST.2014.6991138>. EDN: UFWCJV.

23. Payne A. Skin effect, proximity effect and the resistance of circular and rectangular conductors. 2021. Available from: https://www.researchgate.net/publication/351306996_SKIN_EFFECT_PROXIMITY_EFFECT_AND_THE_RESISTANCE_OF_CIRCULAR_AND_RECTANGULAR_CONDUCTORS [Accessed 25th September 2024].
24. Ramo S., Whinnery J.R., Van Duzer T. *Fields and waves in communication electronics*. John Wiley & Sons; 1994, 858 p.
25. Ramo S., Whinnery J.R. *Fields and waves in modern radio*. 2nd ed. John Wiley & Sons; 1953, 576 p.
26. Monteiro J.H.A., Costa E.C.M., Pinto A.J.G., Kurokawa S., Gatous O.M.O., Pissolato J. Simplified skin-effect formulation for power transmission lines. *IET Science, Measurement & Technology*. 2014;8(2):47-53. <https://doi.org/10.1049/iet-smt.2013.0072>.
27. Raven M.S. Skin effect in the time and frequency domain—comparison of power series and Bessel function solutions. *Journal of Physics Communications*. 2018;2(3):035028. <https://doi.org/10.1088/2399-6528/aab4a8>.
28. Terman F.E. *Radio engineer's handbook. Electrical and electronic engineering series*. New York; London: McGraw-Hill Book Company; 1943, 1015 p.
29. Kaftanova Yu.V. *Special functions of mathematical physics*. Har'kov: Novoe slovo; 2009, 596 p. (In Russ.).
30. Angot A. *Complements de mathematiques. A l'usage des ingenieurs de lelekerotechnique et des telecommunica-tions*. Paris, 1957. (Russ. ed.: *Matematika dlya elektro- i radioinzhenerov*. Moscow: Nauka; 1965, 780 p.)
31. Kennelly A.E., Laws F.A., Pierce P.H. Experimental researches on skin effects in conductors. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*. 1915;34(2):1953-2021. <https://doi.org/10.1109/T-AIEE.1915.4765283>.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Белосветов Антон Витальевич,
аспирант,
Сибирский государственный университет водного
транспорта,
630099, г. Новосибирск, ул. Щетинкина, 33, Россия
✉ belosvetov-anton@mail.ru

Манусов Вадим Зиновьевич,
д.т.н., профессор,
профессор Физико-математической школы,
Югорский государственный университет,
628011, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, 16, Россия
Manusov36@mail.ru

Заявленный вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготов-
ку публикации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный
вариант рукописи.

Информация о статье

Статья поступила в редакцию 18.12.2024 г.; одобрена
после рецензирования 20.01.2025 г.; принята к пу-
бликации 30.01.2025 г.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Anton V. Belosvetov,
Postgraduate Student,
Siberian State University of Water Transport,
33, Shchetinkina str., Novosibirsk 630099, Russia
✉ belosvetov-anton@mail.ru

Vadim Z. Manusov,
Dr. Sci. (Eng.), Professor,
Professor of the Physics and Mathematics School,
Yugra State University,
16, Chekhova str., Khanty-Mansiysk 628011, Russia
Manusov36@mail.ru

Authors' contribution

The authors contributed equally to this article.

Conflict of interests

The authors declare no conflict of interests.

The final manuscript has been read and approved by all
the co-authors.

Information about the article

The article was submitted 18.12.2024; approved
after reviewing 20.01.2025; accepted for publication
30.01.2025.