

О модели «скин-эффекта» в проводнике при наличии высших гармоник

БЕЛОСВЕТОВ А.В., МАНУСОВ В.З., ОСИПОВ Д.С., ШЕПЕЛЕВ А.О.

About the «skin effect» model in a conductor in the presence of higher harmonics

BELOSVETOV A.V., MANUSOV V.Z., OSIPOV D.S., SHEPELEV A.O.

Рассмотрены и проанализированы существующие модели учета «скин-эффекта» в проводниках. Разработана математическая модель, отличающаяся повышенной точностью и позволяющая определить коэффициент увеличения активного сопротивления по отношению к сопротивлению постоянному току $k_{\nu}(f)$ для проводников различного сечения, включая сталеалюминиевые провода марки АС. Разработана модель, основанная на кусочно-линейной аппроксимации зависимости $k_{\nu}(f)$ с учетом сечения проводников. Модель позволяет учитывать дополнительные потери активной мощности от высших гармоник при повышении частоты до 1000 Гц.

Ключевые слова: активное сопротивление проводников, переменный ток, «скин-эффект», высшие гармоники, потери активной мощности, коэффициент увеличения активного сопротивления.

DOI: 10.53891/00135860-2025-1-2-8

В России основные мероприятия по снижению потерь электроэнергии направлены на ограничение перетоков реактивной мощности, при этом недостаточное внимание уделяется ограничению потерь от высших гармонических составляющих токов (высших гармоник). Потери активной мощности существенно влияют на технико-экономические показатели систем электроснабжения. Одной из причин погрешности определения потерь активной мощности является искажение синусоидальности кривой питающего тока и напряжения. Это обстоятельство обусловлено тем, что потребители электроэнергии включают в себя электроприемники с нелинейной вольт-амперной характеристикой. Поэтому проблемы, возникающие из-за высших гармоник, в основном характерны для сетей низкого напряжения. Развитие электрических систем идет по пути подключения множества крупных нелинейных нагрузок на уровнях среднего и даже высокого напряжения [1]. Высшие гармоники отчасти негативно влияют на воздушные линии (ВЛ) электропередач высокого напря-

The existing models of accounting for the «skin effect» in conductors are considered and analyzed. A mathematical model has been developed that is characterized by increased accuracy and allows determining the coefficient of increase in active resistance relative to direct current resistance $k_{\nu}(f)$ for conductors of various cross-sections, including aluminum steel wires of the AC brand. A model based on a piecewise linear approximation of the $k_{\nu}(f)$ dependence, taking into account the cross section of the conductors, has been developed. The model allows you to take into account additional losses of active power from higher harmonics when the frequency increases to 1000 Hz.

Key words: active resistance of conductors, alternating current, "skin effect", higher harmonics, loss of active power, coefficient of increase of active resistance.

жения, которые в России являются наиболее распространенными.

Известно, что токи высших гармоник вызывают дополнительные потери мощности и энергии в электрических сетях. По оценкам инструментальных обследований [2] за 2011 – 2012 гг. потери электроэнергии от несинусоидальности токов в воздушных линиях в среднем составляли порядка 2 – 2,5 %, а в отдельных случаях в 2009 – 2010 гг. они достигали 25 % [3].

Для выявления природы возникновения потерь от высших гармоник необходимо уточнить математические модели всех элементов электрических сетей, и в первую очередь, модели линий электропередачи с учетом «скин-эффекта» от высших гармоник. В настоящее время нет единой и стандартизированной модели, учитывающей влияние «скин-эффекта». Таким образом, разработка математической модели, адекватно отражающей процесс вытеснения тока к поверхности проводника, является весьма актуальной задачей.

В статье предлагается модель, позволяющая более точно определять коэффициент увеличения

активного сопротивления проводов – отношение активного сопротивления на ν -й гармонике $R_\nu(f)$ к сопротивлению проводника постоянному току R_0 :

$$k_\nu = \frac{R_\nu(f)}{R_0}. \quad (1)$$

Выражение (1) уточняет дополнительные потери активной мощности и электроэнергии в электрических системах от повышения частоты переменного тока.

Оценка дополнительных потерь от высших гармоник

Согласно [4, 5] дополнительные потери активной мощности, вызванные протеканием высших гармоник:

$$\Delta P_{\Sigma\nu} = 3 \sum_{\nu=2}^n I_\nu^2 \cdot R_1 \cdot k_{r\nu}, \quad (2)$$

где ν – номер гармоники;

n – число учитываемых гармоник;

I_ν – ток ν -й гармоники, А;

R_1 – активное сопротивление на основной частоте (гармонике), Ом;

$k_{r\nu}$ – коэффициент, учитывающий влияние поверхностного эффекта (как правило, его принимают равным $k_{r\nu} = 0,47\sqrt{\nu}$).

Следует отметить, что выражение (2) является приближенным и не учитывает конструкцию и сечение проводов; кроме того, выражение (2) не позволяет оценить потери от высших гармоник с требуемой точностью.

В статье предлагается учитывать активное сопротивление ν -й гармоники, выраженное через сопротивление проводника постоянному току:

$$R_\nu(f) = R_0 \cdot k_\nu(f). \quad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим формулу для дополнительных потерь электроэнергии от высших гармоник:

$$\Delta W_\Sigma = 3 \sum_{\nu=2}^n I_\nu^2 \cdot R_0 \cdot k_\nu(f) \cdot t_i, \quad (4)$$

где t_i – время протекания ν -й гармоники, оцениваемое при помощи вейвлет-анализа [6].

Эволюция математической модели учета «скин-эффекта»

Формула Умова-Пойнтинга

Полагаем, что наиболее точная математическая модель, описывающая влияние частоты тока на сопротивление проводника, приведена в [7] на основе теоремы Умова-Пойнтинга:

$$R = \frac{\sqrt{\omega\gamma\mu_\alpha} b_0}{2\pi r_{np} \gamma b_1} \cos(\beta_0 - \beta_1 - 45^\circ), \quad (5)$$

где $\omega = 2\pi f$ – угловая частота электрического тока; f – частота тока, Гц;

b_0 – модуль функции Бесселя нулевого порядка первого рода;

b_1 – модуль функции Бесселя первого порядка первого рода;

β_0 – аргумент функции Бесселя нулевого порядка первого рода;

β_1 – аргумент функции Бесселя первого порядка первого рода;

γ – удельная проводимость проводника, См/м;

μ_α – магнитная проницаемость проводника, Гн/м;

r_{np} – радиус проводника, м.

Значения b_0 , b_1 , β_0 , β_1 можно определить с помощью данных, приведённых в [7]; эти значения были получены путем решения функции Бесселя:

$$x = r_{np} \sqrt{\omega\gamma\mu_\alpha}. \quad (6)$$

Выражение (5) является достаточно сложным, так как требует решения уравнения Бесселя, поэтому в инженерных расчетах практически не применяется.

Формула Неймана

На основе формулы (5) была получена упрощенная формула Неймана [8]:

$$\frac{R}{R_0} = \begin{cases} 1 + \frac{\chi^4}{3} & \text{при } \chi < 1; \\ \chi + \frac{1}{4} + \frac{3}{64\chi} & \text{при } \chi > 1; \\ \chi + 0,265 & \text{при } \chi > 30, \end{cases} \quad (7)$$

где $\chi = \frac{r_{np}}{2} \sqrt{\frac{\omega\mu_\alpha\gamma}{2}}$ – промежуточный пара- (8)

метр, используемый в расчетах;

R/R_0 – отношение активного сопротивления проводника переменного тока к сопротивлению постоянного тока.

Формула Пейна

В [9] предлагается рассчитывать отношение активного сопротивления переменному току к сопротивлению проводника на постоянном токе для алюминиевых проводов по выражению [10]:

$$\delta_\infty = \frac{83}{\sqrt{f}}, \quad (9)$$

где δ_∞ – глубина поверхностного слоя, мм;

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = 1 + \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \quad (10)$$

где R_{AC} – сопротивление проводника переменному току;
 R_{DC} – сопротивление проводника постоянного тока.

Промежуточный параметр χ рассчитывается по формуле:

$$\chi = \frac{3,96}{d/\delta} + \frac{3,8}{(d/\delta)^2} + \frac{18}{(d/\delta)^3}, \quad (11)$$

где d – диаметр проводника, мм.

Формула Международной электротехнической комиссии

В настоящее время для учёта «скин-эффекта» применяют выражение [11]:

$$R = R'(1 + \gamma_s + \gamma_p), \quad (12)$$

где R' – сопротивление проводника постоянному току при максимальной рабочей температуре, Ом;
 γ_s – коэффициент, учитывающий поверхностный эффект;
 γ_p – коэффициент, учитывающий эффект близости кабелей.

Для упрощения расчетов рабочая температура принимается равной 20 °С, тогда $R' = R_0$.

В [11] для определения параметра γ_s используются следующие выражения:

$$\gamma_s = \begin{cases} \frac{x_s^4}{192 + 0,8x_s^4} & \text{при } 0 < x_s \leq 2,8; \\ -0,136 - 0,0177x_s + 0,0563x_s^2 & \text{при } 2,8 < x_s \leq 3,8; \\ 0,354x_s - 0,773 & \text{при } x_s > 3,8. \end{cases} \quad (13)$$

Параметр x определяется выражением:

$$x_s = \sqrt{\frac{8\pi f k_s}{R'} \cdot 10^{-7}}, \quad (14)$$

где k_s – экспериментальный коэффициент, зависящий от конструкции токопроводящей жилы.

Поскольку расстояние между проводами ВЛ значительно превышает диаметр самого проводника, то эффектом близости можно пренебречь ($\gamma_p \sim 0$).

Формула Жежеленко

В [12] было отмечено, что частотную характеристику активных сопротивлений элементов сети следует принимать, исходя из условий резкого проявления поверхностного эффекта:

$$R(n) = R_0 \sqrt{n}, \quad (15)$$

где n – номер гармоники.

Формула Манусова

В [13] была предложена следующая модель учёта «скин-эффекта»:

$$R(n) = R_0 \sqrt[3]{n}. \quad (16)$$

Предлагаемая модель

В статье предлагается достаточно простое выражение для учета «скин-эффекта», которое также обладает высокой точностью:

$$k_v = \begin{cases} 1 + \frac{\chi^4}{3 + 0,8\chi^4} & \text{при } 0 \leq \chi \leq 1; \\ 0,45\chi^2 - 0,051\chi + 0,864 & \text{при } 1 \leq \chi \leq 1,36; \\ \chi + 0,267 & \text{при } \chi \geq 1,36, \end{cases} \quad (17)$$

где $\chi \approx \frac{\sqrt{S \cdot n}}{42,4}$, промежуточный параметр, используемый в расчетах;
 n – номер гармоники;
 S – сечение проводника, мм².

Анализ математических моделей

Выполним сравнительный анализ точности представленных моделей «скин-эффекта» для отдельно взятых сечений. На рис. 1 приведены результаты расчетов по различным формулам для сплошных алюминиевых проводников сечением 50, 150 и 300 мм².

Из рис. 1 следует, что расчеты по упрощенным моделям (выражения 15, 16) дают завышенные значения $k_v(f)$, погрешность которых явно выходит за 5 % относительно формулы Умова-Пойнтинга (выражение 5) на интервале гармоник от нуля до 40, представляющем для исследований практический интерес [14].

На рис. 2 приведены значения $k_v(f)$, рассчитанные по наиболее точным выражениям (5, 7, 10, 12, 17); из рис. 2 следует, что предложенная в статье модель обладает высокой точностью, она же является самой простой из рассматриваемых.

На рис. 3 указаны относительные погрешности, полученные по выражениям (7, 10, 12, 17) по отношению к выражению Умова-Пойнтинга.

Выполненные исследования позволяют утверждать, что для учета «скин-эффекта» целесообразно использовать формулу МЭК и формулу, предложенную в статье. Среднее отклонение полученных значений составляет примерно 0,1 %. Наименее точными являются формула Неймана и формула Пейна: среднее отклонение полученных значений по формуле Неймана составляет 0,9 %, по формуле Пейна – примерно 1 %.



Рис. 1. Сравнительная оценка $k_v(f)$ для сечений 50 (а); 150 (б) и 300 мм² (в): 1 – формула Умова-Пойнтинга; 2 – формула Неймана; 3 – формула Пейна; 4 – формула МЭК; 5 – формула Жежеленко; 6 – формула Манусова; 7 – предложенная модель

Сравнение формулы МЭК и предложенной модели приведено на рис. 4, из которого следует, что оба метода являются равнозначными в отношении точности расчетов, однако предложенный метод оказывается наиболее эффективным ввиду своей простоты.

Математическая модель «скин-эффекта» для воздушных линий электропередачи

Провода воздушных линий электропередачи обладают рядом особенностей по сравнению с обычными проводниками со сплошным круглым сечением. Ниже рассматривается про-

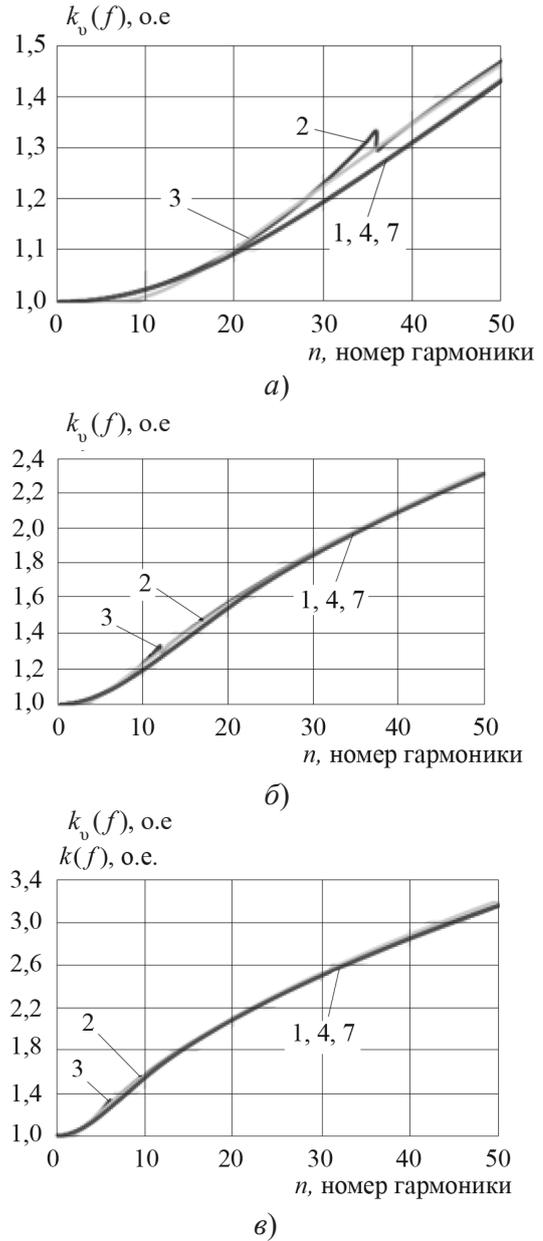


Рис. 2. Сравнительная оценка $k_v(f)$ для сечений 50 (а); 150 (б) и 300 мм² (в): 1 – формула Умова-Пойнтинга; 2 – формула Неймана; 3 – формула Пейна; 4 – формула МЭК; 7 – предложенная модель

вод марки АС 300/39 как сплошной алюминиевый проводник, сечение которого равно сечению алюминиевой части (300 мм²), пренебрегаем скрученностью проволок и эффектом близости.

Моделирование «скин-эффекта» у проводника сплошного сечения

Моделирование «скин-эффекта» у проводника со сплошным сечением 300 мм² было выполнено в программе Elcut [15] (рис. 5).

На рис. 6,а приведена сравнительная оценка параметра $k_v(f)$ модели «скин-эффекта» в программе Elcut и расчетов по формуле Умова-Пой-

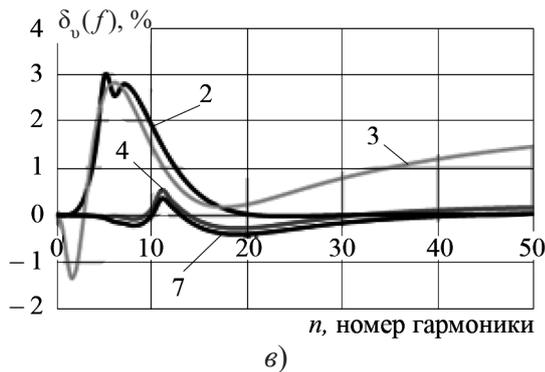
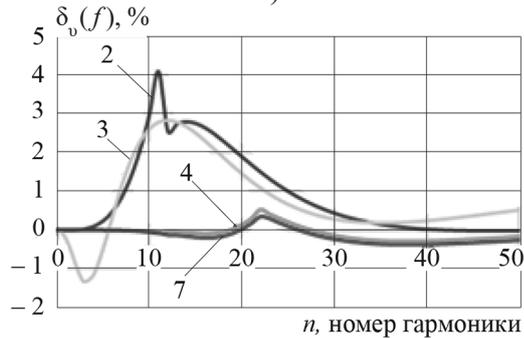
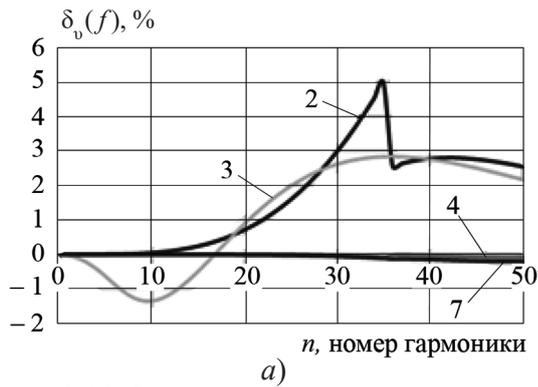


Рис. 3. Сравнительная оценка $\delta_v(f)$ для сечений 50 (а); 150 (б) и 300 мм² (в): 2 – формула Неймана; 3 – формула Пейна; 4 – формула МЭК; 7 – предложенная модель

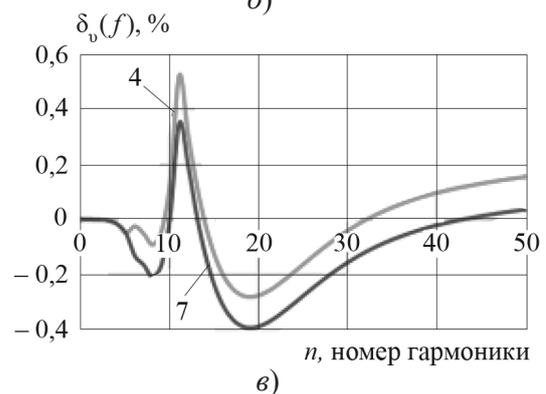
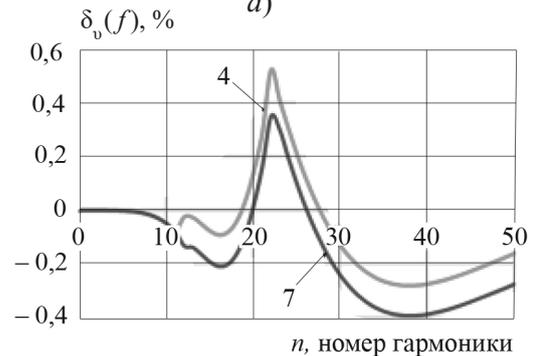


Рис. 4. Сравнительная оценка $\delta_v(f)$ для сечений 50 (а); 150 (б) и 300 мм² (в): 4 – формула МЭК; 7 – предложенная модель

нтинга, где видно практическое совпадение результатов; рис. 6,б отображает погрешность расчетов по программе Elcut и расчетов по предложенной модели относительно формулы Умова-Пойнтинга.

На рис. 6,а приведена сравнительная оценка параметра $k_v(f)$ модели «скин-эффекта» в программе Elcut и расчетов по формуле Умова-Пойнтинга, где видно практическое совпадение результатов; рис. 6,б отображает погрешность расчетов по программе Elcut и расчетов по предложенной модели относительно формулы Умова-Пойнтинга.

Моделирование «скин-эффекта» проводника с учетом стальной жилы

На первом этапе рассчитаем сплошной неоднородный проводник, состоящий из стального сердечника и алюминиевой части. В качестве

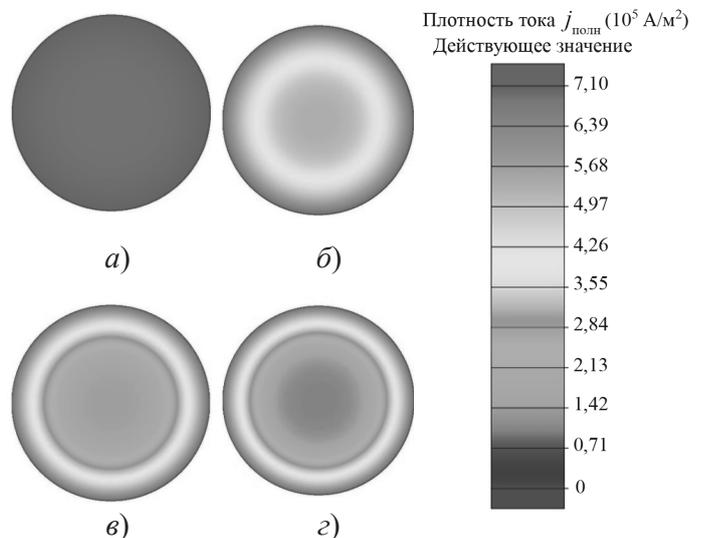


Рис. 5. Вытеснение тока к поверхности проводника сечением 300 мм² при частоте 50 (а); 400 (б); 800 (в); 1000 Гц (г)

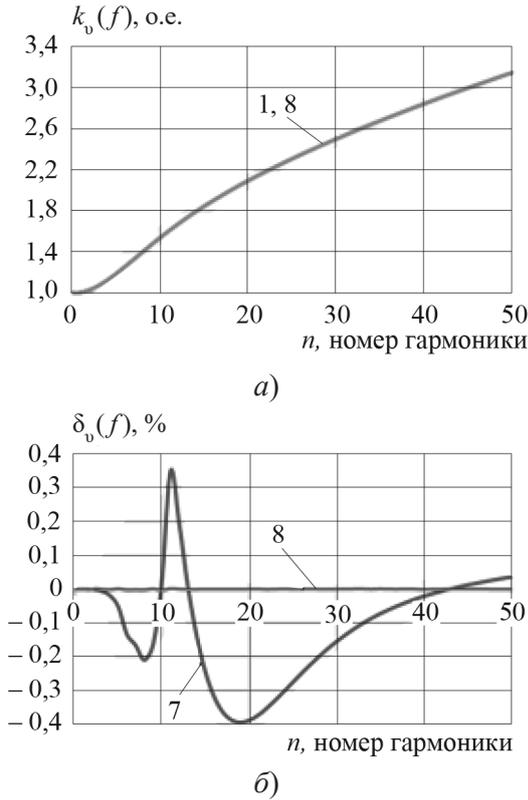


Рис. 6. Сравнительная оценка параметров для сечения 300 мм²: $k_v(f)$ (а); $\delta_v(f)$ (б): 1 – формула Умова-Пойнтинга; 7 – предложенная модель; 8 – модель Elcut (конечно-элементный анализ)

примера рассмотрим проводник марки АС 300/39. Наглядное отображение «скин-эффекта» у провода такой конструкции приведено на рис. 7.

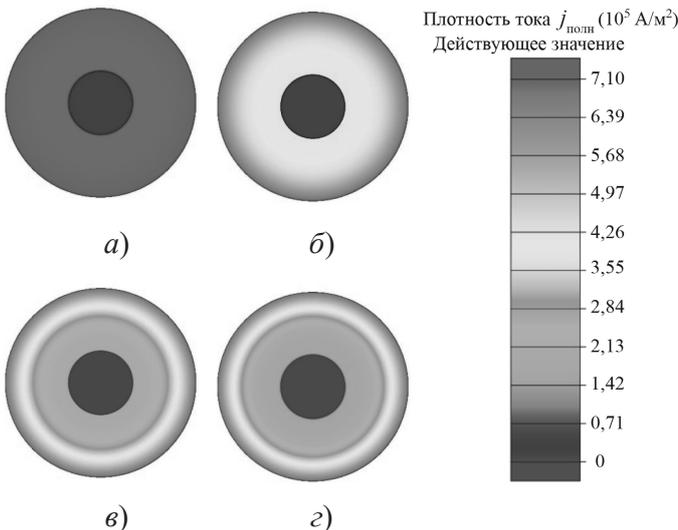


Рис. 7. Вытеснение тока к поверхности неоднородного проводника при частоте 50 (а); 400 (б); 800 (в) и 1000 Гц (г)

Результаты моделирования «скин-эффекта» проводника такой конструкции приведены на рис. 8.

На рис. 9 приведена зависимость относительной погрешности расчета сталеалюминиевого проводника по предложенной модели по срав-

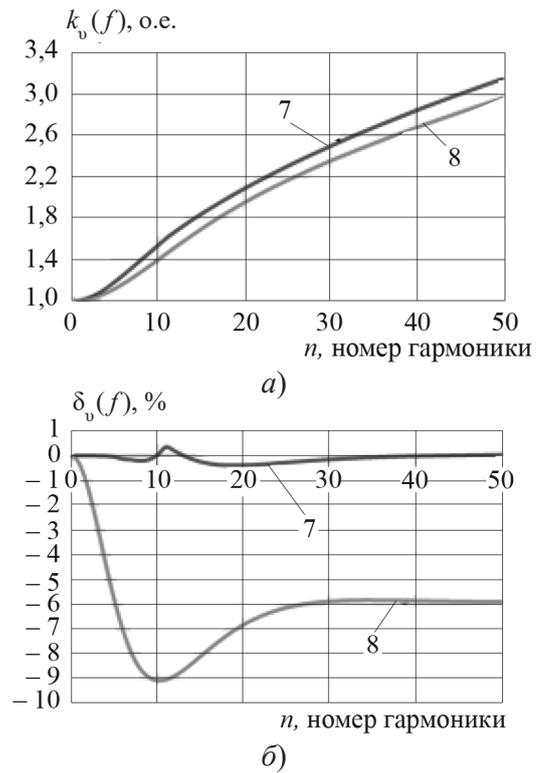


Рис. 8. Сравнительная оценка параметров для проводника сечением 300/39 мм²: $k_v(f)$ (а); $\delta_v(f)$ (б): 7 – предложенная модель; 8 – модель Elcut (конечно-элементный анализ)

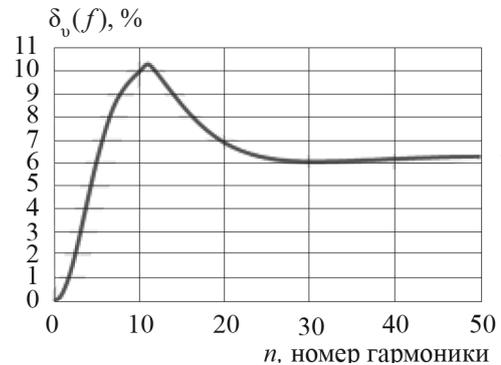


Рис. 9. Погрешность предложенной модели $\delta_v(f)$ для сталеалюминиевого проводника

нению с расчетом неоднородного проводника в программе Elcut.

Оценка точности предложенной модели по сравнению с расчетом в программе Elcut (рис. 8) показала, что на начальном этапе уточнения модели учета «скин-эффекта» в проводах ВЛ погрешность около 10 % является удовлетворительной, поскольку в реальных электрических сетях крайне редко применяют точный расчет значений поверхностного эффекта.

Выводы

В данной работе был выполнен анализ существующих моделей учёта «скин-эффекта», необходимых для достоверной оценки потерь

электроэнергии в электрических системах. Общеизвестные методы для их определения наглядны, просты по принципу, и применяются в ущерб точности.

1. Для оценки потерь электроэнергии в электрических системах, вызванных «скин-эффектом», наиболее обоснованной является формула из теоремы Умова-Пойнтинга, которая отличается большой сложностью по сравнению с другими моделями. В реальной практике применение данной формулы нецелесообразно.

2. Максимальная погрешность предложенной модели для рассматриваемых сечений проводов не превышает 0,3 % для гармоник от нуля до 40.

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ (тема "Разработка моделей вейвлет анализа нестационарных режимов электрических сетей для повышения надежности и эффективности электроснабжения потребителей", код темы: FENG-2023-0005). Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

This work was supported by ongoing the national assignment by the Ministry of Science and Higher Education in the Russian Federation (theme "Model building for wavelet analysis of non-steady behavior in electric power systems for reliability growth effectiveness for electric power supply to a customer", theme code: FENG-2023-0005) funding. No additional grants to carry out or direct this particular research were obtained.

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

The authors of this work declare that they have no conflicts of interest.

Список литературы

1. Levačić G., Župan A., Čurin M. An overview of harmonics in power transmission networks / First International Colloquium on Smart Grid Metrology. Croatia, 2018.
2. Боровиков В.С., Волков М.В., Иванов В.В. и др. Режимные свойства электрических сетей 110 кВ юга России в обеспечении эффективности транспорта электроэнергии. Томск, 2013.
3. Боровиков В.С., Волков М.В., Иванов В.В., Литвак В.В., Мельников В.А., Погонин А.И., Харлов Н.Н. Опыт корпоративного обследования электрических сетей 110 кВ Сибири. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010.
4. Жежеленко И.В. Электрические потери от высших гармоник в системах электроснабжения // Электрика. 2010. № 4.
5. Долингер С.Ю. и др. Оценка дополнительных потерь мощности от высших гармоник в элементах систем электроснабжения // Омский научный вестник. 2009. № 1.
6. Осипов Д.С., Долгих Н.Н., Горовой С.А., Поплавская В.Е. Анализ дополнительных потерь от высших гармоник в сетях 380 В с помощью алгоритмов пакетного вейвлет-преобразования // Омский научный вестник. 2018. № 6.
7. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. М.: Гардарики, 2007.
8. Нейман Л.Р., Калантаров П.Л. Теоретические основы электротехники. Ч. 3. М.: Госэнергоиздат, 1959.
9. Payne A. Skin Effect, Proximity Effect and the Resistance of Circular and Rectangular Conductors. Article. May, 2021.
10. Ramo S., Whinnery J.R., Van Duzer T. Fields and Waves in Communication Electronics. John Wiley & Sons, 1994.
11. IEC 60287-1-1. Electric cables. Calculation of the current rating. Part 1-1: Current rating equations (100% load factor) and calculation of losses. General. 2014.
12. Жежеленко И.В. Высшие гармоники в системах электроснабжения промпредприятий. М.: Энергоатомиздат, 1994.
13. Манусов В.З., Хрипков В.В., Фролова В.В. Сравнительный анализ математических моделей для определения коэффициента увеличения активного сопротивления проводников от высших гармоник // Научные проблемы транспорта Сибири и Дальнего Востока. 2018. № 1.
14. ГОСТ 32144-2013. Электрическая энергия. Совместимость технических средств электромагнитная. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. М.: Стандартинформ, 2014.
15. ELCUT 6.6. Программа моделирования электромагнитных и температурных полей. ООО «Тор»: Санкт-Петербург, 2024. URL: <https://elcut.ru> (дата обращения: 12.02.2024).