

**ELCUT – ИНЖЕНЕРНЫЙ ИНСТРУМЕНТ МКЭ-МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ****С. Д. Дубицкий, О.Я. Ильина**Производственный кооператив ТОР
Санкт-Петербург

Предметом доклада является программный комплекс ELCUT – пакет программ для моделирования температурных, электромагнитных и упругих полей методом конечных элементов. ELCUT представляет собой зрелый коммерческий продукт с более чем 20-летней историей, имеющий сотни пользователей в России, США, Германии, Франции, Италии, Японии, и многих других странах.

Рассматриваются модельные представления и допущения, положенные в основу пакета ELCUT: физическая модель процессов, модель материала, геометрическая модель, модель дискретизации, модель взаимодействия с пользователем. Обсуждаются ограничения, достоинства и недостатки, заложенные в принятые модели. Приводятся примеры решения теплофизических задач.

По-видимому, на нашей конференции единственный доклад начинается утверждением, что он не содержит никакой научной новизны. Мы представляем инструмент – комплекс программ для моделирования температурных полей методом конечных элементов ELCUT [2]. Главнейшее требование пользователей к инструменту – доверие. Все остальные важные параметры, такие как функциональные возможности, удобство использования, стоимость, сложность обучения и т.п., играют существенную роль при выборе подходящей программы из имеющихся на рынке альтернатив. Однако, если пользователь не доверяет результатам моделирования, то ни о каком полезном использовании инструмента речи быть не может.

Именно требование доверия к результатам численных расчетов приводит к необходимости использовать только выверенные и апробированные формулировки задач, схемы дискретизации, методы решения уравнений, алгоритмы визуализации и представления результатов. В этом смысле мы декларируем отсутствие в докладе научной новизны.

В основу развитого инструмента численного анализа температурных, электромагнитных и упругих полей, каким является программный комплекс ELCUT, положена целая система взаимосвязанных модельных представлений. Рассмотрим кратко их особенности и допущения. Затем продемонстрируем практическое применение описанных принципов на примере решения простой задачи теплопроводности.

Физическая модель**Уравнение поля**

Физической моделью решаемой задачи является уравнение теплопроводности. При моделировании задачи расчета температурного поля в двумерном пространстве оно принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -q(T) - c(T) \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.a) \quad \text{- в плоско-параллельной}$$

геометрии, и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) = -q(T) - c(T) \rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.6) \quad \text{- в осесимметричной}$$

геометрии,

где:

T - температура;

t - время;

$\lambda_{x(y,z,r)}$ - компоненты тензора теплопроводности (в линейной постановке);

$\lambda(T)$ - теплопроводность, как функция температуры, представленная кубическим сплайном (анизотропия не поддерживается в нелинейной постановке);

q - удельная мощность тепловыделения, в линейной постановке - константа, в нелинейной постановке - задаваемая кубическим сплайном функция температуры;

$c(T)$ - удельная теплоемкость, в линейной постановке - константа, в нелинейной постановке - задаваемая кубическим сплайном функция температуры;

ρ - плотность материала.

Приведенные уравнения очерчивают круг задач, которые может решать ELCUT: это задачи теплопроводности, диффузии, а также задачи стационарного и квазистационарного электрического и магнитного поля. Весьма похожее уравнение с некоторыми модификациями описывает плоско-напряженное или осесимметричное упругое состояние, которое также может быть рассчитано пакетом ELCUT.

За пределами возможностей пакета остается моделирование задачи гидро- и газодинамики.

Хотя наш доклад посвящен применению ELCUT для задач теплофизики, нельзя не упомянуть возможность расчета электромагнитного поля [5], включая вихревые токи (эффект близости и скин-эффект). Этот факт открывает широкие возможности для решения мультидисциплинарных задач, охватывающих разные области физики. ELCUT способен связывать задачи между собой, используя результат решения одной задачи в качестве источников или начальных условий для другой задачи. Так, например, пользователи ELCUT успешно решают задачи индукционного нагрева, которые требуют совместного решения уравнений электромагнитного поля и теплопроводности. Другой пример – ELCUT может рассчитанное температурное поле для учета термических напряжений в задаче упругого напряженного состояния.

Граничные условия

Уравнения 1 решаются совместно с граничными условиями. В задачах теплопроводности ELCUT предусматривает следующие виды граничных условий (рис. 1):

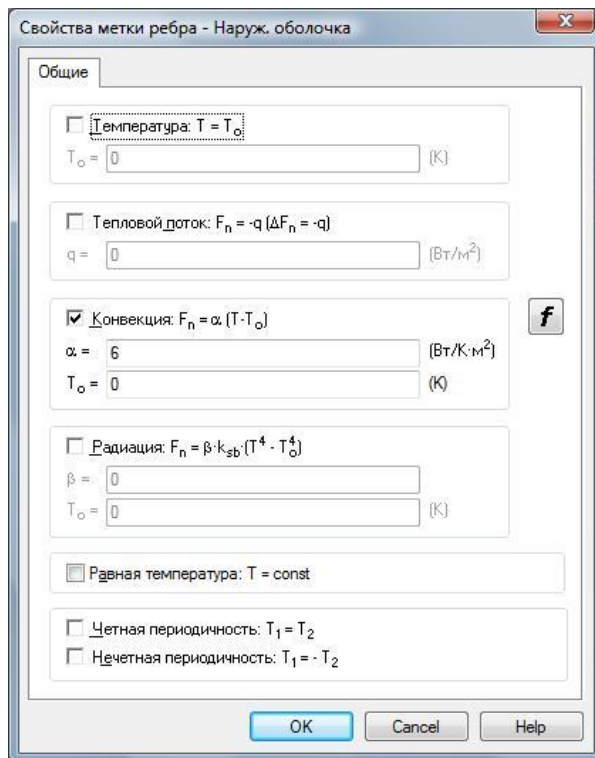


Рис. 1 Виды граничный условий в задачах теплопроводности.

- Граничное условие 1-ого рода: известная температура на границе области, заданная в виде константы или функции от координат и времени;
- Граничное условие 2-ого рода: известная нормальная к границе составляющая плотности теплового потока, заданная в виде константы или функции от координат и времени.
- Граничное условие конвекции $F_n = \alpha(T - T_0)$, управляемое двумя параметрами: коэффициентом конвективного теплообмена α и температурой омывающей среды T_0 . Оба параметра могут зависеть от координат и от времени.
- Граничное условие радиационного теплообмена $F_n = k_{SB} \beta (T^4 - T_0^4)$, также управляемое двумя параметрами: коэффициент радиационного теплообмена k_{SB} ($0 < k_{SB} \leq 1$) и температура удаленного тела, с которым осуществляется теплообмен - T_0 . Оба параметра могут зависеть от координат и времени.
- Специальные граничные условия включают в себя условия четной и нечетной симметрии, а также особый вид граничного условия 1-ого рода, когда температура поверхности постоянна, но заранее неизвестна.

Приведенный перечень показывает возможности и ограничения ELCUT. Так, очевидно, что использованная модель радиационного теплообмена описывает ситуацию, когда исследуемая расчетная область окружена со всех сторон поверхностью с постоянной температурой и поглощающими свойствами, причем эта поверхность удалена на достаточное расстояние.

При моделировании конвекции ELCUT требует априорного знания коэффициента конвекции и температуры омывающей среды, который в некоторых реальных задачах сам может являться предметом расчета.

Это ограничение частично может быть преодолено возможностью доступа к функциональности ELCUT из собственных программ пользователя или других пакетов анализа, таких как Matlab, Excel и т.п. Подробнее об этом см. в разделе **Программный интерфейс**.

Объемный источник тепловыделения в той или иной части модели может быть задан константой, функцией от времени и/или координат, а также функцией от температуры, которая задается таблицей и аппроксимируется кубическим сплайном.

Модель материала

В расчетной области, представляющей моделируемую физическую систему, может быть задано любое число различных материалов со своими свойствами. Модель материала, использованная в ELCUT, описывается тремя параметрами:

1. *Коэффициент теплопроводности λ* , который может быть постоянным для данного материала или зависеть от температуры. В последнем случае зависимость задается в табличной форме и аппроксимируется кубическим сплайном.

Если теплопроводность не зависит от температуры, то она может быть задана двухкомпонентным тензором для моделирования анизотропных свойств.

2. *Удельная теплоемкость C* , которая также может зависеть от температуры.
3. *Плотность материала ρ* .

Простая и эффективная модель материала пригодна для решения многих практических задач. Основные ограничения состоят в том, что пока нет возможности задать анизотропные свойства у нелинейного материала. Функциональные зависимости нелинейного типа (от температуры) задаются для всего материала в целом, что несколько затрудняет (но не запрещает) одновременное задание зависимости от температуры и от координат.

ELCUT включает библиотеку свойств популярных материалов. Кроме того, на сайте пакета www.elcut.ru [1] доступны для свободной загрузки библиотеки материалов, подготовленные пользователями ELCUT.

Геометрическая модель

Моделирование температурного поля всегда начинается с описания геометрии расчетной области. ELCUT на сегодняшний день является двумерным пакетом. Это означает, что расчетная область должна обладать трансляционной или осевой симметрией (рис. 2)

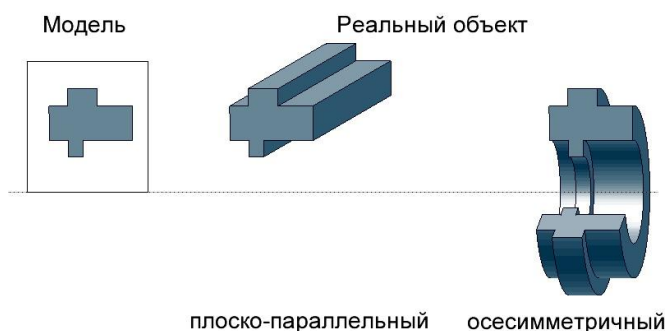


Рис. 2 Плоско-параллельная и осесимметричная геометрия

ELCUT оснащен геометрическим редактором для работы с геометрической моделью. Геометрия модели может быть также импортирована из программ AutoCAD и т. п. через формат обмена DXF или из программы SolidWorks. Двумерная геометрическая модель основана на понятиях вершины (точка в 2D), ребра (отрезок прямой или дуга окружности) и блока (подобласть, ограниченная ребрами).

Важной особенностью геометрической модели ELCUT является тот факт, что она надежно справляется с висячими ребрами, изолированными вершинами и прочими трудными для реализации деталями. При проведении новых ребер расчетная область автоматически разбивается на блоки, либо, напротив, при удалении ребер разделенные

ими блоки автоматически склеиваются. Любой объект или группу объектов можно переместить или размножить.

Геометрическим объектам можно назначить имя, которое используется для ассоциации физических свойств и граничных условий с элементами геометрии. Именованные объекты объединяются в дерево для удобства визуальной навигации.

Модель дискретизации

Для решения дифференциального уравнения в частных производных (1) ELCUT использует метод конечных элементов (МКЭ). В соответствии с этим, расчетная область должна быть разбита на большое число непересекающихся элементов выбранной формы. В пределах каждого конечного элемента температурное поле аппроксимируется функцией заданного вида, параметры которой являются предметом расчета.

Принятая в ELCUT модель дискретизации задачи состоит в следующем:

1. Используется только один тип конечного элемента – линейный треугольный элемент с тремя степенями свободы (симплекс). Это означает, что температура внутри каждого треугольника линейно зависит от координат, а параметрами зависимости являются значения температуры в вершинах треугольника.
2. Приложены специальные усилия, включающие выбор и реализацию алгоритмов, для того чтобы максимально быстро обрабатывать большое количество треугольников при скромном потреблении ресурсов компьютера. Так, на стандартном офисном компьютере можно решить задачу с несколькими миллионами треугольников за считанные секунды.
3. Построение сетки конечных элементов производится полностью автоматически. Двухэтапный алгоритм корректно обрабатывает неодносвязные области, различия в длинах геометрических элементов в 2-3 порядка, узкие длинные элементы и другие сложности.
4. Пользователю предоставлен удобный механизм для ручного контроля густоты сетки конечных элементов, который позволяет сгущать сетку в областях резкого изменения поля или там, где требуется более детальное знание распределения температуры.
5. Наряду с ручным контролем густоты сетки реализован алгоритм автоматического сгущения сетки на основе апостериорной оценки погрешности решения задачи, полученного на грубой сетке. Уточнение сетки может проводиться итеративно, что позволяет автоматически сформировать идеальную сетку для достижения требуемой точности.

Поскольку ELCUT способен моделировать нестационарные процессы, наряду с рассмотренной выше пространственной дискретизацией, необходима также дискретизация во временной области.

ELCUT использует метод Эйлера с постоянным шагом по времени, либо с автоматическим адаптивным выбором временного шага. В последнем случае длина очередного шага выбирается на основе вычисления нормы вариации производной по времени для всех узлов сетки, оценки характеристического времени задачи и характерного размера сетки.

Метод геометрической декомпозиции

Техника метода конечных элементов связана с необходимостью построения и решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности. Особенностью матрицы СЛАУ в методе конечных элементов является высокая степень разреженности (малое количество ненулевых элементов). Невозможно построить работоспособный алгоритм для реальных задач без учета разреженного характера матрицы.

Указанное обстоятельство стало основой для специальной отрасли вычислительной математики – алгоритмов решения разреженных СЛАУ. Особенность состоит, в частности, в том, что алгоритм решения СЛАУ наряду с обычными параметрами (быстрота, сходимость, устойчивость) предлагается и анализируется совместно со схемой хранения ненулевых элементов матрицы в памяти машины.

Разработчиками ELCUT предложен и с успехом реализован **метод геометрической декомпозиции** для решения разреженной СЛАУ. Работа метода начинается на этапе пространственной дискретизации задачи. Последняя проводится в три этапа:

1. Прежде всего, дискретизируется граница области, т.е. каждое ребро модели. При этом учитываются пожелания пользователя относительно густоты сетки.
2. На втором этапе расчетная область нарезается на подобласти (домены) специально выбранного размера. Разрезание преследует две цели:
 - a. Во-первых, ликвидация геометрических неодносвязностей, висячих ребер вершин и т.п.
 - b. Во-вторых, целью разрезания является получение набора доменов, которые затем будут разбиты на заранее оцененное оптимальное число треугольников.
Нарезка осуществляется специально разработанным алгоритмом на основе системы штрафов.
3. Затем каждый домен, полученный в результате нарезки, триангулируется (разбивается на треугольники). Триангуляция выполняется фронтальным методом (стягиванием текущей границы) с последующей итеративной регуляризацией.

Пример расчетной области и ее трехэтапная дискретизация показана на рис. 3 и 4:

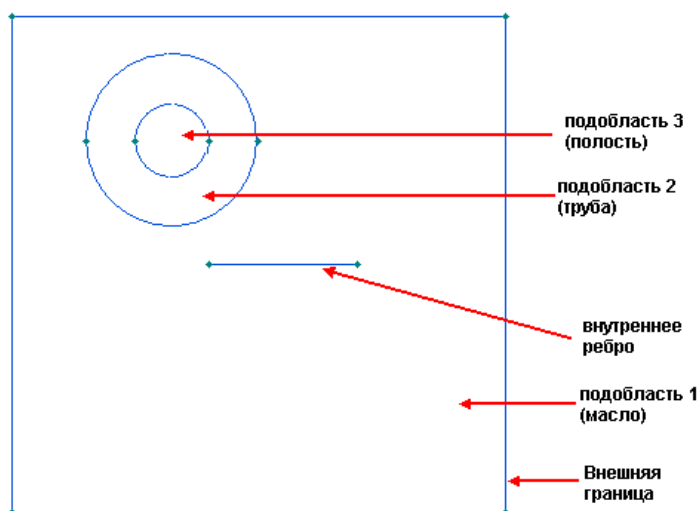


Рис. 3 геометрия условной расчетной области

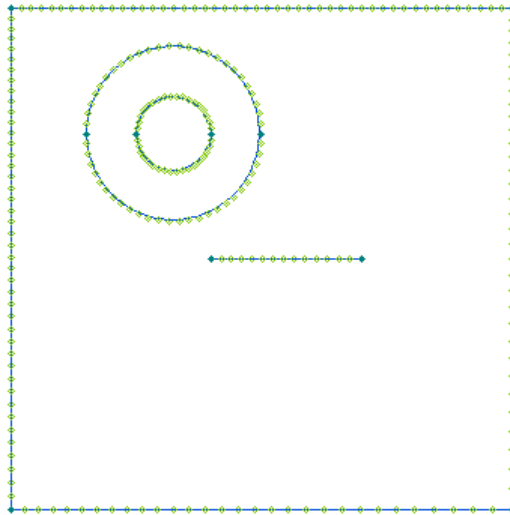


Рис 4а
 Дискретизация ребер модели производится полностью автоматически, либо с учетом пожеланий пользователя к густоте сетки

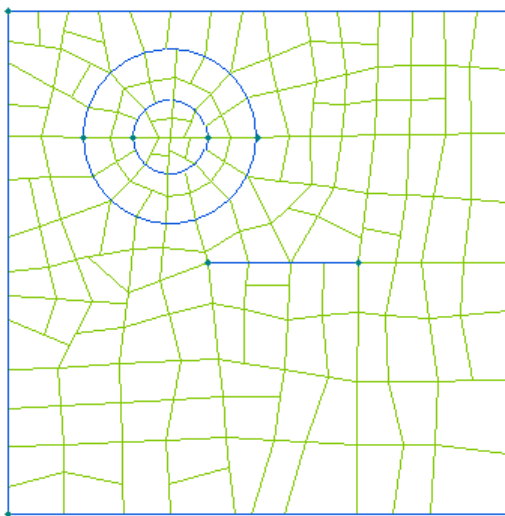


Рис. 4б
 Область разрезается на домены с заранее оцененным оптимальным числом конечных элементов

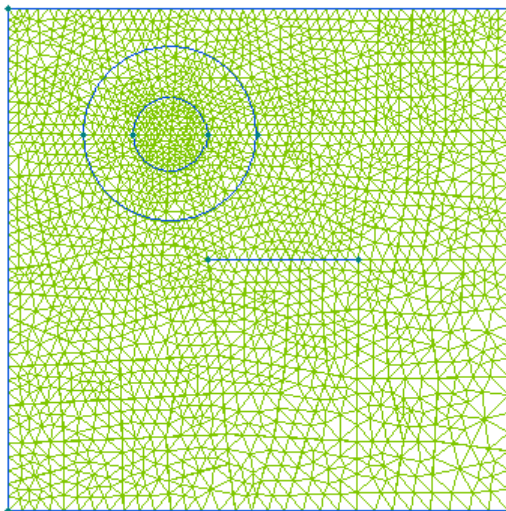


Рис.4в
 Каждый из доменов триангулируется, т.е. заполняется сеткой из треугольников.
 Форма треугольников итерационно улучшается алгоритмом регуляризации.

Рис.4 последовательная дискретизация области, показанной на рис. 3

Полученная дискретная модель приспособлена для блочного формирования и хранения матрицы СЛАУ. Блоки матрицы соответствуют конечным элементам, полученным в результате триангуляции каждого отдельно домена. Специальный блок матрицы, соответствующий каркасу доменной структуры, осуществляет связь всех блоков между собой.

СЛАУ решается итерационным методом сопряженных градиентов. Как известно, метод сопряженных градиентов для хорошей сходимости требует провести процедуру предобуславливания – эквивалентное преобразование матрицы, улучшающее ее вычислительные свойства. Предобуславливание по сути похоже на неполное, но быстрое решение системы уравнений, которое удается выполнить на основе блочной организации матрицы СЛАУ.

Если исходное физическое уравнение нелинейное, применяется схема Ньютона-Рафсона, оптимизированная для лучшего взаимодействия с итерационным решателем СЛАУ.

Все вышеописанные мероприятия, которые в совокупности составляют метод геометрической декомпозиции, позволяют формировать матрицу СЛАУ и решать ее чрезвычайно эффективно. Практически, время решения линейной стационарной задачи любой размерности не превышает нескольких секунд. Эффективность метода геометрической декомпозиции количественно характеризуется экспериментально полученной зависимостью времени решения от числа степеней свободы:

$$t = k \cdot N^m \quad (2)$$

где

- t - время решения,
- k - коэффициент пропорциональности,
- N - число степеней свободы задачи (примерно равно числу узлов сетки)
- m - показатель степенной функции.

Эксперименты показывают, что значение показателя m примерно равно 1.1, против характерного для обычных методов m=2.

Модель взаимодействия с пользователем

Успех программного инструмента в значительной степени зависит от удачной организации взаимодействия с пользователем. Каждый пользователь, знакомясь с новым пакетом с целью решения своей задачи, опирается на свою ментальную модель технологии постановки и решения задачи. Эта мысленная модель сформирована под влиянием всего предшествующего опыта пользователя: образования, профессиональной деятельности, круга чтения и личностных качеств.

Со своей стороны, разработчики программного комплекса также опираются на некоторую ментальную модель работы с задачами. Эта модель диктует технические и эргономические решения, принимаемые в процессе организации взаимодействия человека и программы.

Есть множество частных параметров, по которым оценивается степень удачности пользовательского интерфейса программы. Однако, в конечном счете, впечатление пользователя всецело определяется тем, насколько его личная ментальная модель организации процесса расчета совпадает с моделью, на которую опираются разработчики.

Отзывы многих пользователей ELCUT из разных стран неизменно говорят о дружественном интерфейсе пакета, удобстве работы с ним и положительном эмоциональном фоне. Такая информация позволяет сделать вывод о хорошей степени совпадения ментальных моделей большинства пользователей и разработчиков пакета ELCUT, что отчасти можно объяснить сходством образовательных и профессиональных навыков.

Экранный интерфейс

Основной объем операций с ELCUT пользователь осуществляют в интерактивном режиме, взаимодействуя с программой через систему меню, окон, панелей ввода и графического отображения. Интерфейс ELCUT постоянно поддерживается в современном

состоянии, в духе особенностей последних версий операционной системы Windows Vista и Windows 7. ELCUT также может без ограничений работать на Windows XP.

Основные элементы графического взаимодействия с ELCUT показаны на рис. 5.

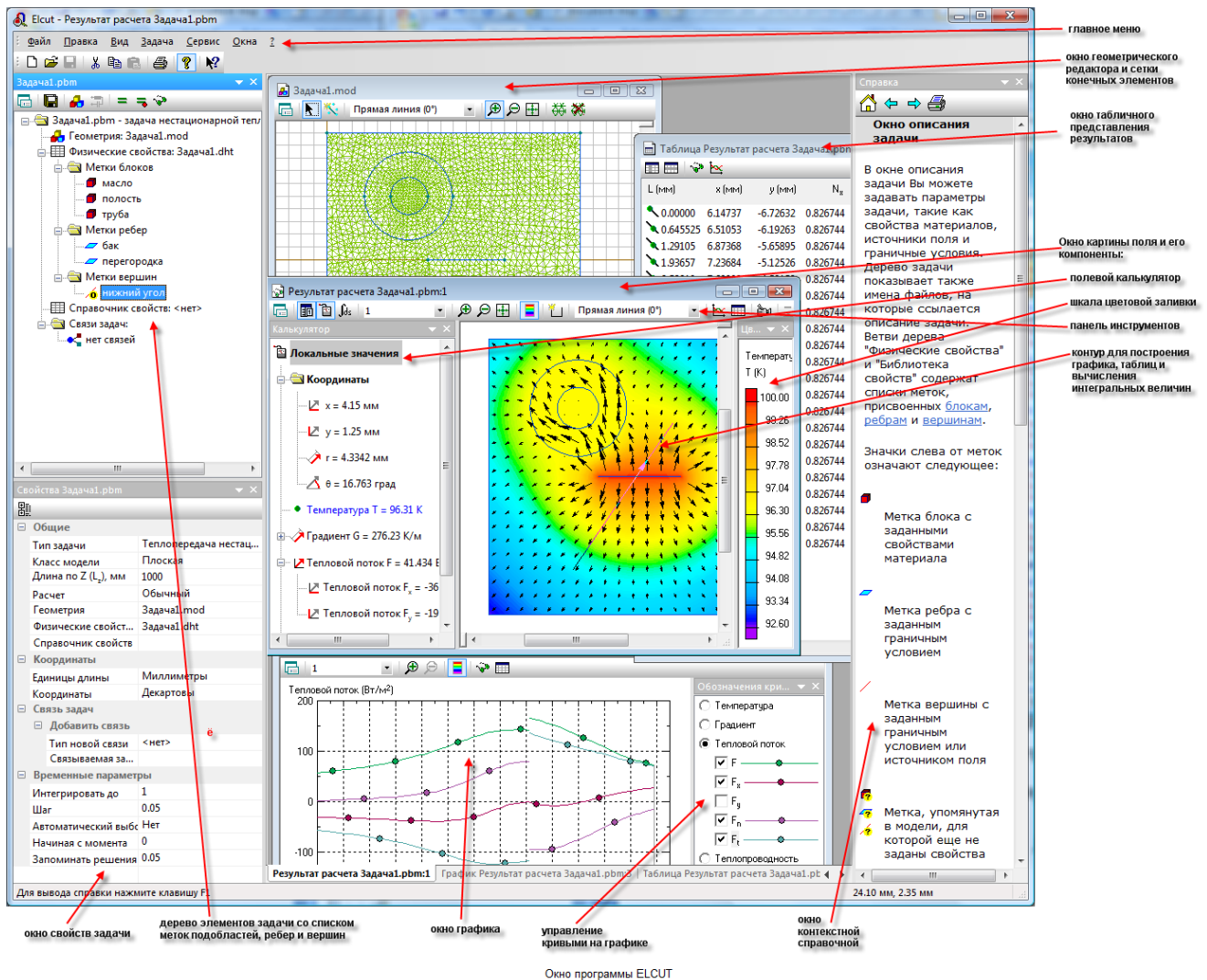


Рис. 5 Элементы графического интерфейса ELCUT

Представление результатов включает следующие возможности:

- рисование картины поля (цветная карта, изотермы, семейства векторов);
- калькулятор локальных и интегральных физических величин;
- таблицы и графики, изображающие распределение физических величин в пространстве и во времени;
- экспорт результатов расчета в графическом и табличном виде, в том числе и для передачи в другие программы (Matlab, Excel).

Кроме основного ядра, ELCUT включает в себя несколько дополнительных программ-надстроек, которые расширяют функциональность базового пакета. Важнейшей из настроек является **LabelMover** –инструмент для параметрического анализа, оптимизации и статистического анализа погрешностей. Интуитивно ясный визуальный интерфейс **LabelMover** позволяет организовать серию расчетов с закономерно изменяющимися геометрическими или физическими параметрами модели, найти оптимальное решение в пространстве нескольких параметров с ограничениями.

Отдельный интерес представляет режим статистического моделирования, который позволяет оценить влияние производственных, технологических или иных отклонений величин от номинала на статистическое распределение конструктивных параметров.

Пользователь ELCUT также может писать собственные надстройки и расширения, используя широкий выбор популярных языков программирования: Visual Basic, C++, C#, Delphi, Matlab и скриптовых языков, таких как VBScript, JScript, PowerShell.

Программный интерфейс

ELCUT является открытой системой, позволяющей дописывать недостающую функциональность и интегрировать его в состав более крупных комплексов и технологических цепочек [3].

Наряду с интерактивным режимом взаимодействия, ко всем функциональным возможностям ELCUT можно получить доступ из программы пользователя. Комплекс программных средств, документации и примеров для программного доступа к ELCUT называется *технология ActiveField*.

ActiveField основан на технологии межпрограммного взаимодействия COM. Многие прикладные пакеты (AutoCAD, SolidWorks, Matlab, Excel, Word и пр.), а также большинство современных языков программирования совместимы с COM, и могут взаимодействовать с ELCUT программным путем.

Пользователи ELCUT, используя технологию ActiveField, расширяют функциональность ELCUT не только для вывода результатов и автоматизации расчетов, но даже в плане физической постановки задачи, сопрягая между собой процессы из разных областей физики. Так, например, на сайте программы [1] можно ознакомиться с работами наших пользователей в области индукционного нагрева стальных заготовок и электропрогрева бетона при зимней укладке.

Пример решения задачи

В качестве иллюстрации приведем пример практической задачи, разобранный на сайте [1] программы ELCUT - Фундамент мелкого заложения. Статьи и файлы задачи можно свободно загрузить с сайта и просмотреть при помощи бесплатной Студенческой версии ELCUT.

Рассматривается малозаглубленный фундамент малоэтажного дома, конструкция которого в ряде случаев позволяет снизить расход материалов и стоимость строительства. Однако, в некоторых случаях приходится предпринимать специальные меры для теплоизоляции такого фундамента. Один из приемов – установка под фундамент пенополистирольной теплоизолирующей плиты.

Эскиз расчетной области задачи представлен на рис. 6.

Задача состоит в оценке теплового сопротивления двух конструкций фундамента: с теплоизолирующей плитой и без нее.

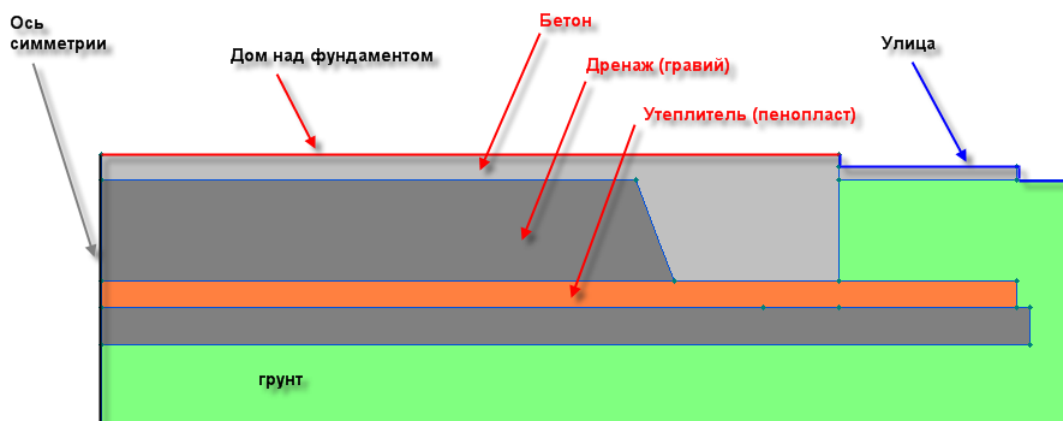


Рис. 6 Эскиз расчетной области в задаче теплоизоляции фундамента мелкого заложения

Задача симметрична относительно вертикальной плоскости, поэтому рассмотрим только правую половину.

Структура состоит из нескольких материалов (грунт, дренаж, бетон, полистирол) и граничных условий двух типов: заданная температура на границе («Дом»: $+20\text{ }^{\circ}\text{C}$, «Улица»: $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$) и естественное граничное условие нулевого нормального потока на оси симметрии задачи (слева).

Поскольку ELCUT не позволяет решать открытые задачи, мы искусственно ограничим расчетную область снизу и справа на расстоянии, в несколько раз превышающем размеры фундамента.

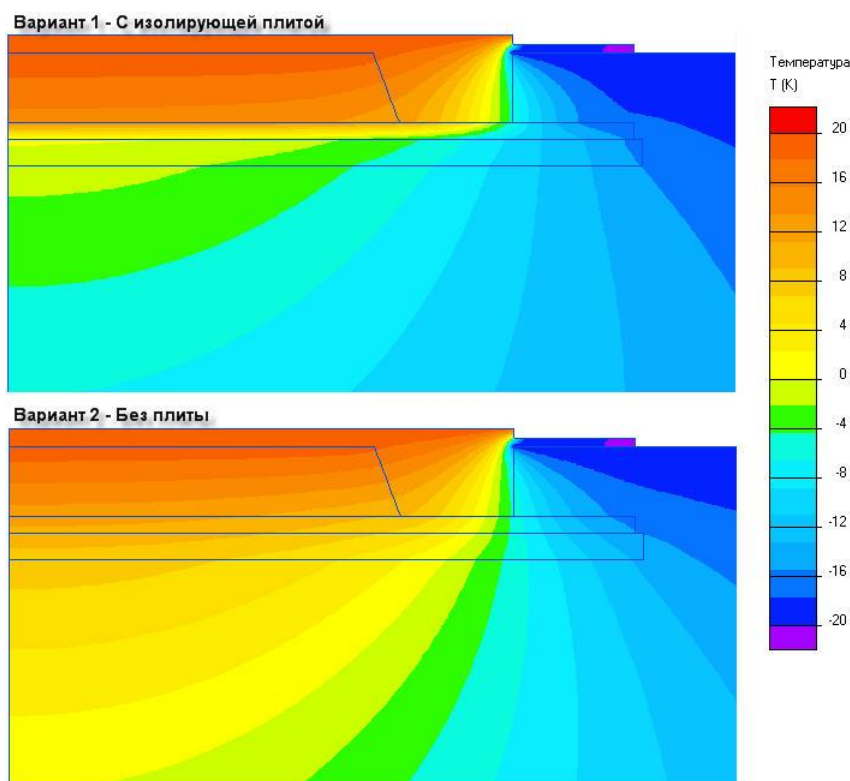


Рис. 7 Картина температурного поля в фундаменте (2 варианта)

Тепловое сопротивление рассчитывается как отношение разности температур к тепловому потоку. Разность температур в задаче задана граничными условиями (температура внутри помещения $T_0=+20\text{ }^{\circ}\text{C}$, наружная $T_1=-20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Тепловой поток через

поверхность, представленную контуром L , представляет собой интеграл по контуру L вида:

$$\Phi = \int_L (-\lambda \cdot \text{grad}(T)) \cdot dl \quad (4)$$

Проведем контур интегрирования, охватывающий целиком конструкцию фундамента и воспользуемся полевым калькулятором ELCUT для вычисления значения теплового потока:

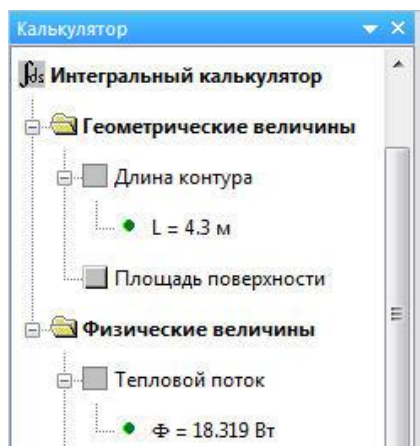


Рис. 8 Интегральный калькулятор ELCUT

Интегральный калькулятор показывает значение теплового потока на 1 метр длины фундамента в направлении оси Z (перпендикулярно плоскости модели).

Сравнение значений теплового потока в двух вариантах задачи (с изолирующей плитой и без нее) показывает, что наличие плиты сокращает потери тепла через фундамент на 10%.

Заключение

Программа ELCUT представляет собой зрелый программный продукт для моделирования полей разной физической природы в двумерной постановке методом конечных элементов. Существуя на рынке более 20 лет, он завоевал признание сотен пользователей в России, Америке, Европе, Азии и Австралии.

Уникальной особенностью ELCUT является его направленность на инженеров и исследователей, которые не считают полевое моделирование своей основной специальностью. ELCUT также отлично подходит в качестве первого конечно-элементного пакета для аудиторного [4] и самостоятельного обучения. Накоплен большой опыт применения ELCUT в учебном процессе по разным дисциплинам в ведущих ВУЗах России. Не последнюю роль играет также интерфейс программы и документации к ней на русском языке и возможность получить квалифицированную поддержку в инженерной службе компании TOP.

Хотя основные усилия разработчиков пакеты сосредоточены на его электромагнитной части, ELCUT с успехом используется для расчета температурных полей [6], несмотря на то, что в этом секторе рынка имеется множество серьезных конкурентов.

Знакомство с ELCUT лучше всего начинать с загрузки бесплатной Студенческой версии и просмотра большой коллекции примеров. На сайте представлены также десятки статей, обобщающих опыт пользователей и множество видеоматериалов учебного, и обзорного характера.

Литература

1. Официальный сайт программы ELCUT www.elcut.ru

2. ELCUT Моделирование полей методом конечных элементов. Версия 5.7. Руководство пользователя.- Производственный кооператив ГОР, Санкт-Петербург, 2009. 339с.
3. С.Д. Дубицкий ELCUT 5.1 – платформа разработки приложений анализа полей. – Exponenta Pro. . Математика в приложениях №1(5) 2004, стр.20-26
4. James R. Claycomb Applied Electromagnetics Using QuickField™ & MATLAB. – Infinity Science Press, 2008.- ISBN: 978-0763777517, 400 pages
5. С.Д. Дубицкий ELCUT – конечно-элементный анализ низкочастотного электромагнитного поля. EDA Express *Журнал о технологиях проектирования и производства электронных устройств*, М., ОАО Родник Софт, № 12 2005., стр. 24-29
6. Ерохин С.Н., Ляшков В.И Исследование теплопроводности рабочего органа адсорбционного аппарата. – в сб. "Теплофизические измерения при контроле и управлении качеством": Сб. мат 5-й международной теплофизической школы. – Тамбов, -2004. –Том 2. -С. 26 –28