

МАСШТАБИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОГРАММЕ ELCUT НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

(применительно к динамическим процессам диффузии полей)

При моделировании процессов диффузии физических полей (т.е. распространения потоков массы, тепла или электромагнитного поля) в чрезвычайно малых или чрезвычайно больших по размерам объектах длительность этих процессов по времени также может быть или чрезвычайно малой, или очень большой. При этом нет необходимости выполнять моделирование исключительно в реальных масштабах размеров объекта и времени протекания процесса. Благодаря применению теории подобия, можно облегчить задачу моделирования, сводя ее к удобным для пользователя пространственным и временным рамкам. Суть такого подхода заключается в следующем.

Пользуясь программой Elcut, при моделировании нестационарных процессов теплопередачи или проникновения электромагнитного поля, мы строим в графическом редакторе образ модели и задаем граничные условия и параметры среды: для тепловых задач – это коэффициент теплопроводности λ , удельная теплоемкость C и плотность среды ρ ; для электромагнитных задач – это магнитная проницаемость μ и коэффициент электропроводности среды σ . При нелинейных свойствах среды эти параметры могут быть заданы определенными функциональными зависимостями. Существенно, что при моделировании используются натуральные единицы измерения размеров и времени.

Теория подобия позволяет от реальных размеров объекта и реальной длительности процесса перейти к иным размерам и иной длительности, сохраняя при этом картину протекания процесса во времени и пространстве подобной той, какая может иметь место в реальном объекте. Этот переход основывается на том, что для подобия процессов нет необходимости соблюдать равенство всех отдельно взятых параметров задачи, а нужно лишь обеспечить равенство некоторой комбинации этих параметров, которую мы называем критерием подобия. Для однородных изотропных сред характеристическим параметром, обуславливающим протекание нестационарных процессов, является коэффициент диффузии поля. Для тепловых процессов он равен

$$D_{\text{heat}} = \lambda / (C \cdot \rho), \quad [\text{м}^2 / \text{сек}]$$

а для электромагнитных процессов

$$D_{\text{mag}} = 1 / (\mu \cdot \sigma) \quad [\text{м}^2 / \text{сек}].$$

Для полного подобия процессов в расчетной модели с измененными параметрами задачи по сравнению с исходной (базовой) моделью этот коэффициент должен быть связан с пространственно-временными характеристиками модели. Для этого используются так называемые приведенные (т.е. безразмерные) значения коэффициентов диффузии исходной модели (D_1^*) и расчетной модели (D_2^*):

$$D_1^* = D_1 T_1 / X_1^2 ; \quad D_2^* = D_2 T_2 / X_2^2 .$$

Здесь индексы 1 или 2 присвоены исходной модели и расчетной модели, соответственно; D_1 и D_2 – это размерные значения коэффициентов диффузии в одной и другой модели; T_1 и T_2 - это характеристические времена длительности процесса для одной и другой модели (именно это время вводится в свойства задачи); X_1 и X_2 - это характеристический размер одной и другой модели. При моделировании одномерных процессов распространения поля - это размер модели в направлении распространения поля.

Равенство приведенных значений коэффициентов диффузии является необходимым условием подобия картины полей в двух моделях различного масштаба:

$$D_1^* = D_2^* .$$

Иными словами, приведенные значения коэффициента диффузии (и их равенство) являются критериями подобия процессов.

В случае, когда среда моделируемого объекта обладает линейными свойствами, т.е. коэффициент диффузии не зависит от времени, от координат и от величин поля, это условие в совокупности с условием идентичности граничных условий в обеих рассматриваемых моделях является достаточным условием подобия картины полей.

При моделировании процессов диффузии поля в среде с нелинейными свойствами для подобия процессов в моделях различного масштаба необходимо дополнительно обеспечить подобие функциональных зависимостей приведенных значений коэффициентов диффузии от величин поля или же от времени и координат. Проще всего это дополнительное условие выполняется при моделировании проникновения поля в ферромагнетик, обладающий электропроводностью. Для его выполнения достаточно ввести одну и ту же кривую намагничивания $B=f(H)$ в базовую модель и в модель с измененными пространственно-временными характеристиками. При этом достигается совпадение численных значений поля в обеих моделях в преобразованных масштабах координат и времени, если привлечь дополнительное условие о равенстве значений магнитной индукции в установившемся режиме.

Доказательством подобия картины распределения поля в пространстве и времени служит продление решения задачи о диффузии поля до установившегося состояния, когда диффузия прекращается. В этом состоянии для тепловой задачи с граничными условиями I рода градиент температуры становится постоянной величиной вдоль координаты, а для задачи о нестационарной диффузии магнитного поля однородным становится распределение магнитной индукции вдоль координаты. Коль скоро в сопоставляемых моделях подобие полей достигается при полном завершении диффузионного процесса, то такое подобие возможно и на более ранних этапах по времени при согласованном изменении масштабов координат и времени.

Примеры.

1. В файле Heat_Diff_1.pbm в квази-одномерном рассмотрении сформулирована задача нестационарного прогрева полосы из однородного материала длиной $L_1=5\text{м}$ с заданным коэффициентом диффузии тепла $D_1=5\text{e-}04\text{м}^2/\text{сек}$ при граничных условиях I рода: в начале полосы ($x=0$) задана фиксированная температура $t_1=80^\circ\text{C}$, и в конце полосы ($x=L_1$) задана температура $t_2=0^\circ\text{C}$. Задана длительность процесса $T_1=5000$ сек. По истечении этого времени устанавливается распределение температуры по длине полосы, показанное на рис.1.
2. В файле Heat_Diff_2.pbm при аналогичных условиях сформулирована задача нестационарного прогрева полосы из такого же материала длиной $L_2=0,5\text{м}$ при заданной длительности процесса $T_2=50\text{сек}$ и прежнем значении коэффициента диффузии тепла $D_2=5\text{e-}04\text{м}^2/\text{сек}$. В конце этого времени устанавливается распределение температуры, показанное на рис.2, которое полностью подобно распределению температуры на рис.1. Это достигается благодаря тому, что при $D_1=D_2$ соотношение между характерными размерами и временами задач было выбрано из условия равенства приведенных значений коэффициентов диффузии, т.е. $T_1/T_2=(L_1/L_2)^2$.
3. В файле Sample1.pbm в квази-одномерном приближении сформулирована задача о нестационарной диффузии магнитного поля в полосу из ферромагнитного материала, кривая намагничивания которого $B=f(H)$ задана в табличном виде (Табл.1), а электропроводность считается постоянной величиной: $\sigma=1\text{e}06\text{См/м}$. Длина полосы $L_1=0,5\text{м}$, длительность процесса задана равной $T_1=10\text{сек}$. На границах полосы заданы граничные значения векторного потенциала: в начале полосы ($x=0$) потенциал $A_1=0,8\text{Вб/м}$, а в конце полосы ($x=L_1$) потенциал

$A_2=0$. В конце заданного времени устанавливается однородное распределение магнитной индукции по длине ($B=1,6\text{Тл}$), показанное на рис.3. Такое распределение является признаком завершения процесса диффузии поля в данный образец.

4. В файле Sample2.pbm в квази-одномерном приближении сформулирована задача о нестационарной диффузии магнитного поля в полосу длиной $L_2=5\text{м}$ из такого же ферромагнитного материала и с такой же кривой намагничивания $B=f(H)$, как в предыдущей задаче. Разность значений векторного потенциала на краях полосы ($A_1 - A_2$) увеличена до 8Вб/м (здесь $A_1=8\text{Вб/м}$ и $A_2=0$). Этим обеспечивается достижение такого же уровня магнитной индукции в установившемся режиме ($1,6\text{Тл}$), как и в предыдущей задаче. Одинаковый уровень магнитной индукции в конце процесса служит гарантией одинакового влияния нелинейности магнитных свойств материала на распределение поля. Полученное распределение магнитной индукции по длине полосы для различных моментов времени показано на рис.4. Наблюдается значительное подобие в распределении поля, причем подобие тем сильнее, чем ближе процесс подходит к установившемуся режиму. Некоторое отличие в распределении поля возможно на начальных этапах диффузии поля, когда формируется насыщение приграничных слоев материала при внезапном включении поля на границе. Равенство коэффициентов диффузии может быть установлено по параметрам μ , σ для установившегося режима

СОДЕРЖАНИЕ ПАПКИ (файлы задач ELCUT)

Задача Heat_Diff_1:	Задача Sample_1:
Heat_Diff_1.pbm	Sample_1.pbm
Heat_Diff_1.mod	Sample_1.mod
Heat_Diff_1.dht	Sample_1.dht
Heat_Diff_1.res	Sample_1.res
Задача Heat_Diff_2:	Задача Sample_2:
Heat_Diff_2.pbm	Sample_2.pbm
Heat_Diff_2.mod	Sample_2.mod
Heat_Diff_2.dht	Sample_2.dht
Heat_Diff_2.res	Sample_2.res

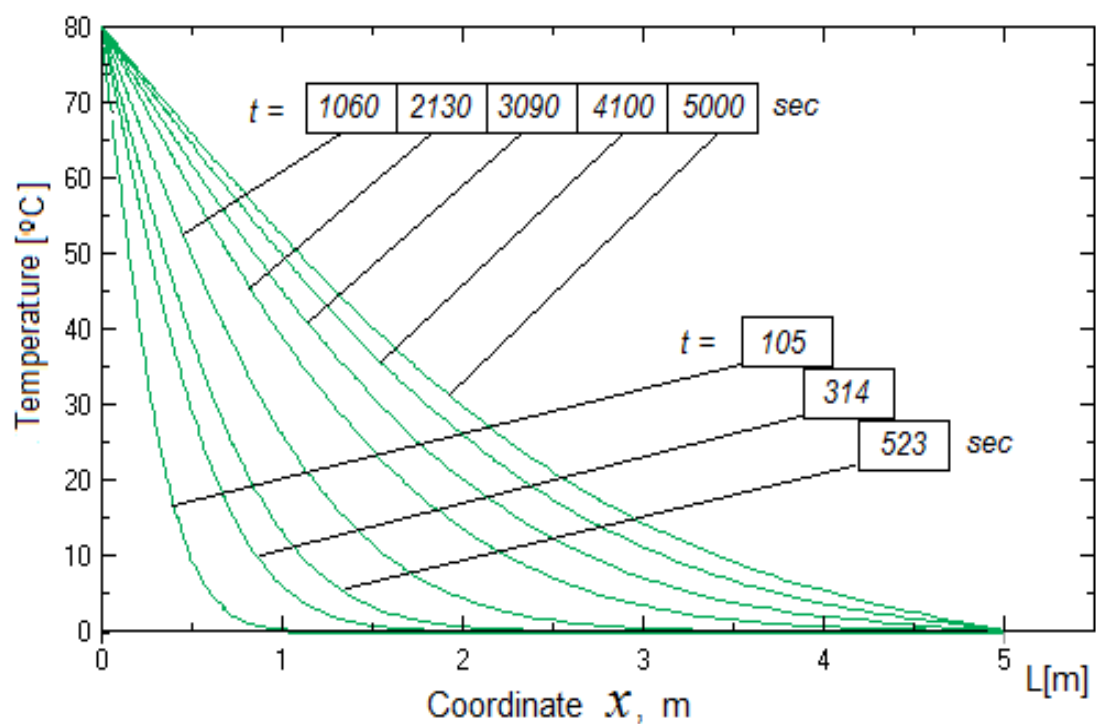


Рис. 1.

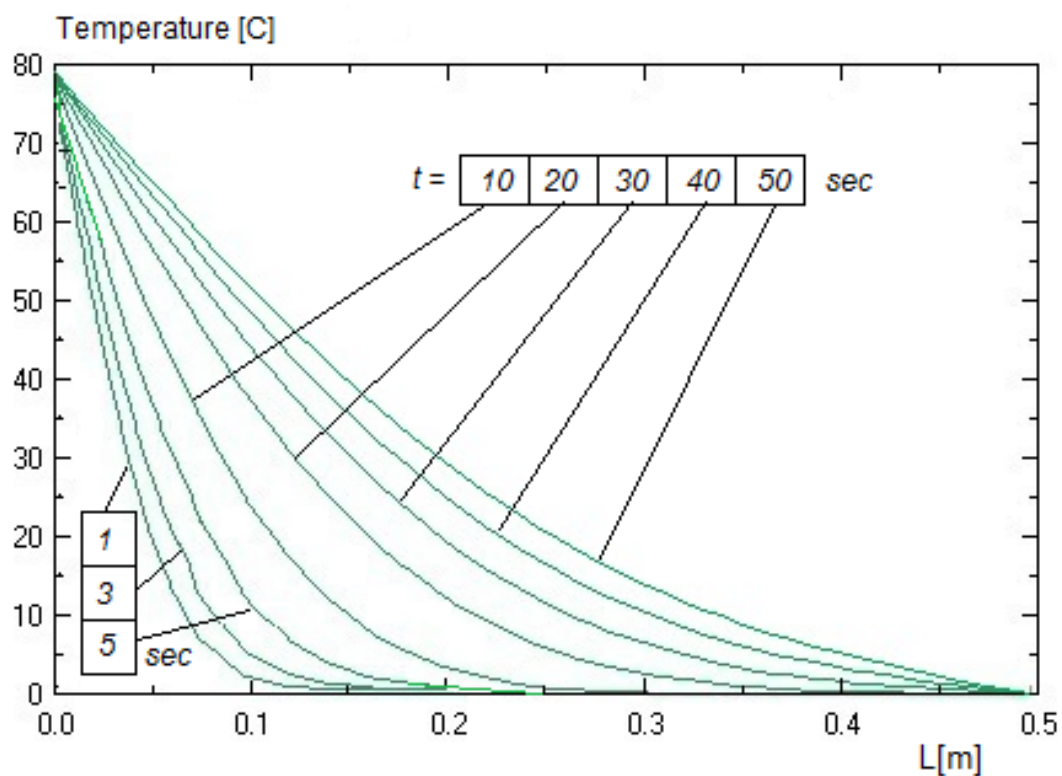


Рис. 2.

Таблица 1. Кривая намагничивания

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B, Тесла	0	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.3
H, А / м	0	140	171	211	261	318	397	502	647	843	1140	1580	2500	4400	7800	13000	22000	34200	$2 \cdot 10^5$

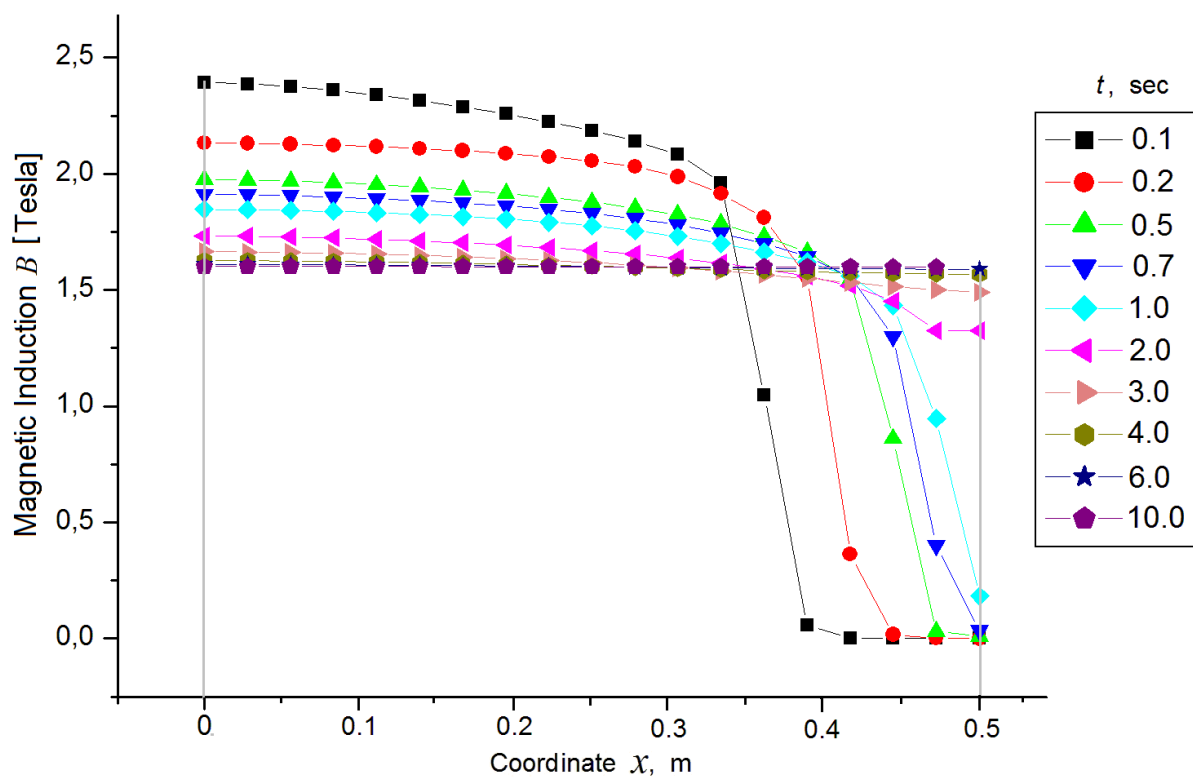


Рис. 3.

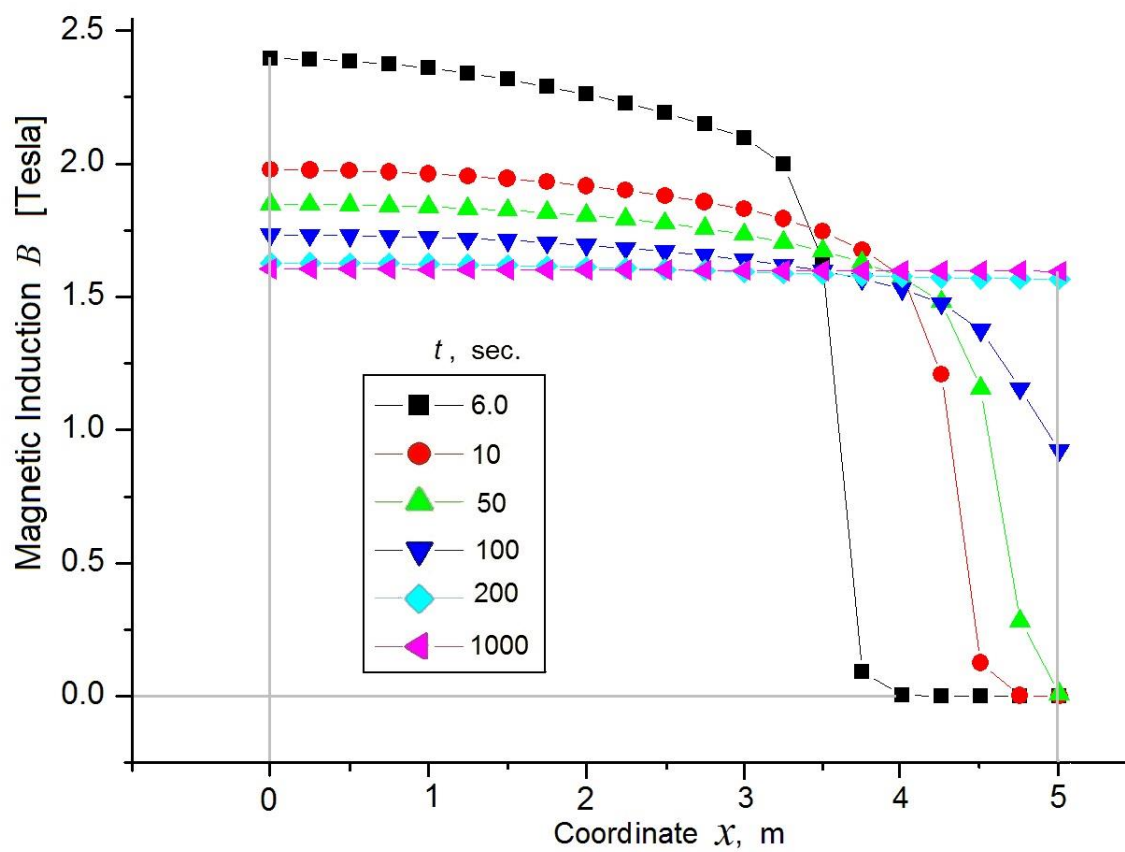


Рис. 4.