

На правах рукописи

ВЕСЕЛОВА Ирина Евгеньевна

**РАЗРАБОТКА И ОБОСНОВАНИЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЕТА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ
В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Иваново 2010

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина»

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Кадников Сергей Николаевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Сбитнев Станислав Александрович

кандидат технических наук
Чиндилов Денис Викторович

Ведущая организация: ОАО НИИ «Электропривод»,
г. Иваново

Защита состоится «28» июня 2010 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д 212.064.03 при Ивановском государственном энергетическом университете по адресу: 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34, корпус «Б», аудитория 237.

Отзывы (в двух экземплярах, заверенные печатью) просим присылать по адресу: 153003, г. Иваново, ул. Рабфаковская, 34, Ученый совет ИГЭУ.

Тел.: (4932) 38-57-12; факс (4932) 38-57-01

E-mail: uch_sovet@ispu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ивановского государственного энергетического университета (ул. Рабфаковская, 34), с авторефератом на сайте ИГЭУ www.ispu.ru.

Автореферат разослан « » _____ 200 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

А. А. Шутьпин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Одной из назревших проблем теоретической электротехники является разработка эффективных методов расчета электромагнитного поля (ЭМП) в анизотропной среде. Она существует, например, в электродинамике, где решение задач, связанных с излучением и дифракцией электромагнитных волн, сдерживается (в отличие от изотропной среды) отсутствием точных формул для функций Грина в среде с произвольной (прямоугольной) анизотропией. В силовой электротехнике проблема расчета поля в анизотропной среде возникает, например, при моделировании электромагнитных устройств, содержащих шихтованные магнитопроводы, которые представляют так называемую мелкослоистую анизотропную среду. Известные универсальные численные методы для расчета поля в этом случае не применимы, в связи с чем учет влияния обмотки на распределение поля, потери мощности, индуктивности обмоток и т.д. производится в настоящее время по приближенным методикам, основанным на решениях частных задач и результатах натуральных экспериментов. Возможность применения универсальных численных методов появляется после замены мелкослоистой среды сплошной анизотропной средой. Как известно, для линейных сред наиболее продуктивен метод граничных интегральных уравнений (ГИУ). В отличие от метода конечных элементов (МКЭ), он позволяет учитывать геометрическую и функциональную специфику моделируемых устройств, а также характеристики различных конструкционных материалов, в частности анизотропию (что для МКЭ недоступно), за счет чего достигается относительно высокая точность и экономичность.

Однако, несмотря на большие потенциальные возможности метода ГИУ, его применение сдерживается рядом факторов. Так, при построении математических моделей для расчета поля в анизотропных средах возникают интегралы со специфическими свойствами ядер, не имеющие прямых аналогов в теории интегральных уравнений и ранее не исследовавшиеся. Вследствие этого появляется ряд проблем как при построении математических моделей, так и при обосновании возможности их практического применения. В частности, возникают вопросы, связанные с построением формул для предельных значений производных потенциалов на граничных поверхностях, существованием и единственностью решений, регуляризацией полученных систем интегральных уравнений при обосновании возможности их практического применения.

Наличие таких вопросов позволяет сделать вывод о том, что теоретическое обоснование математических моделей для расчета поля в анизотропной среде фактически отсутствует. В связи с этим можно утверждать, что тема данной работы является актуальной как с практической, так и с теоретической точки зрения.

Целью работы является разработка математических моделей в форме интегральных уравнений для расчета электромагнитного поля в однородной и кусочно-однородной анизотропных средах, а также обоснование возможности их практического использования.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. Разработка методики построения математических моделей для расчета электромагнитного поля в анизотропной среде.
2. Обоснование возможности применения полученных моделей с помощью теоретического анализа и численного эксперимента.

Методы исследований. Поставленные задачи решались с использованием теории интегральных уравнений, теории потенциала и методов численного решения интегральных уравнений.

Научная новизна и значимость полученных результатов заключается в следующем:

1. Разработаны новые математические модели на основе метода разделения областей в форме систем интегральных уравнений для расчета магнитостатического поля в однородной анизотропной среде.
2. Обоснована возможность численной реализации разработанных моделей с использованием теории сингулярных интегральных уравнений и теории потенциала.
3. Получены новые формулы, являющиеся аналогами закона Био-Савара-Лапласа для однородной анизотропной среды.
4. Проведена численная апробация разработанных моделей и подтверждена их практическая применимость.

Практическая ценность работы. Разработанные математические модели могут быть использованы при проектировании электротехнических устройств – реакторов, устройств индукционного нагрева, аналоговых фильтров.

Достоверность представленных в работе результатов, полученных путем проведения вычислительных экспериментов на математических моделях, подтверждается их сравнением с экспериментальными данными, а также с результатами расчетов в среде ELCUT.

Реализация результатов работы. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, используются в учебном процессе в ГОУВПО «Ивановский государственный энергетический университет

имени В. И. Ленина» при подготовке студентов по специальности «Прикладная математика и информатика».

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на международных конференциях: XI международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, МЭИ, 2005 г.), международной научно-технической конференции "Состояние и перспективы развития электротехнологии" (XII Бенардосовские чтения, Иваново, ИГЭУ, 2005 г.), XII международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (Москва, МЭИ, 2006 г.), международной научно-технической конференции "Состояние и перспективы развития электротехнологии" (XIV Бенардосовские чтения, Иваново, ИГЭУ, 2007 г.), международной научно-технической конференции "Состояние и перспективы развития электротехнологии" (XV Бенардосовские чтения, Иваново, ИГЭУ, 2009 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 15 печатных работ, в том числе 5 статей в изданиях, рекомендованных ВАК.

Структура и объем работы. Диссертационная работа общим объемом 182 страницы состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы (115 названий).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность поставленной проблемы. Сформулирована цель работы и задачи, которые должны быть решены для ее достижения, дано краткое содержание глав работы.

Приводится обзор основных результатов, полученных по этой теме. Он позволяет сделать вывод о том, что до сих пор в рамках этой темы рассматривались только отдельные частные задачи, несмотря на то, что задача расчета электромагнитного поля магнитопроводов трансформаторов и реакторов поставлена давно. В частности, вопросами разработки математических моделей в анизотропных средах занимались А. В. Нетушил, О. В. Тозони, И. Д. Маергойз, Э. В. Колесников, К. М. Поливанов, В. Н. Чечурин. Наибольший интерес представляют две модели. Одна из них предназначена для расчета статического магнитного поля, впервые была предложена Э. В. Колесниковым. В ней расчет поля постоянного магнита сведен к системе уравнений первого и второго рода, полученных с использованием скалярных потенциалов простого слоя. Другая модель в виде системы интегральных уравнений второго рода, для построения кото-

рой использовались потенциалы простого и двойного слоев, рассматривается в книге О. В. Тозони и И. Д. Маергойза. Наличие интегралов первого рода в первой модели и потенциалов двойного слоя во второй существенно усложняет их численную реализацию и делает малопригодными для проведения эффективных расчетов.

Универсальные достаточно эффективные математические модели до сих пор не разработаны, а существующие известные модели мало пригодны для практической реализации. Причина состоит в том, что отсутствует теоретическая база для разработки эффективных и практически реализуемых математических моделей. Это доказывает необходимость проведения настоящей диссертационной работы как с теоретической, так и с практической точек зрения.

Первая глава посвящена математическим моделям для расчета плоскопараллельных и осесимметричных магнитостатических полей магнитопроводов, а также вопросам теоретического обоснования полученных моделей. Необходимость рассмотрения такого рода полей обусловлена тем, что системы интегральных уравнений (ИУ), возникающие при моделировании большинства электротехнических устройств, содержат сингулярные интегралы, основные свойства и особенности которых соответствуют сингулярным интегралам, получаемым при расчете статического поля. Так как исследование статического поля проще, то целесообразно начать теоретическое исследование именно со статических полей.

Интерес к осесимметричным полям вызван тем фактом, что значительная часть современных электротехнических устройств обладает осесимметричной структурой. В системах уравнений для расчета осесимметричного поля (независимо от того, статическое оно или электромагнитное) из интегралов всегда можно выделить сингулярные части, соответствующие сингулярным интегралам для расчета плоскопараллельного поля. Следовательно, эти системы будут обладать одинаковыми свойствами в вопросах разрешимости. Задача анализа плоскопараллельных полей более простая, поэтому с этого вопроса и начато исследование.

При разработке математической модели для расчета плоскопараллельного магнитостатического поля в анизотропной среде рассмотрена следующая задача (рис. 1).

Длинный цилиндр из однородного ферромагнетика с сечением S_i , ограниченный контуром l , находится во внешнем поле постоянных токов, расположенных вне S_i в области S_e и распределенных по некоторому сечению S_0 с заданной плотностью \vec{d}_0 . Оси декарто-

вой системы координат расположены так, что они совпадают с главными осями магнитной анизотропии.

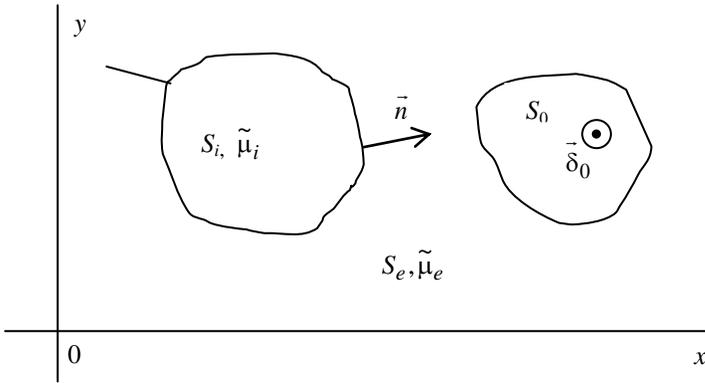


Рис.1.

При построении системы граничных интегральных уравнений использованы методы вторичных источников и полного разделения областей. Это позволило получить систему ГИУ второго рода:

$$\begin{aligned}
 i_q + \frac{1}{\pi} \oint_l i_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p - \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{\tau}_q, \tilde{\mu}_i^{-1} \vec{r})}{r_a^2} dl_p = \\
 = \frac{1}{\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} \left(\frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{m_i r_a^2} - \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} \right) dS_p; \\
 \sigma_q - \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p \left(\frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r_a^2} - k_1 \pi m_i \right) dl_p - \frac{1}{\pi} \oint_l i_p \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p = \\
 = \frac{1}{\pi} \oint_l \delta_{0p} \left(\frac{-\mu_x n_x (y_q - y_p) + \mu_y n_y (x_q - x_p)}{m_i r_a^2} - \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} \right) dl_p.
 \end{aligned}$$

В полученной системе часть интегралов, а именно вторые интегралы в левых частях уравнений, имеют нестандартный вид и, следовательно, обладают неизвестными свойствами. В связи с этим в ходе построения математической модели решены следующие задачи: 1) выяснено, что интегралы, входящие в систему, являются сингулярными на поверхностях Ляпунова; 2) получены новые формулы для предельных значений производных составляющих векторов поля; 3) доказана возможность численной реализации системы. Кроме того, впер-

вые была получена формула $\vec{H}_{0iq} = \frac{1}{2\pi m_i} \int_{S_0} \left[\vec{\delta}_{0p}, \frac{\vec{r}}{r_a^2} \right] dS_p$, которую

можно рассматривать как частный случай закона Био-Саварра-Лапласа для плоскопараллельного магнитного поля в линейной анизотропной среде.

Для полученной системы разработан новый процесс регуляризации путем введения союзной задачи, с помощью которого обоснована возможность ее численной реализации.

Решена также более общая задача, в которой каждая из областей S_i и S_e заполнена определенной анизотропной средой с тензорами относительной магнитной проницаемости $\tilde{\mu}_i$ и $\tilde{\mu}_e$ соответственно ($\tilde{\mu}_i \neq \tilde{\mu}_e$), что доказывает универсальность разработанной модели.

Разработана методика построения математической модели для расчета осесимметричного магнитостатического поля в анизотропной среде.

Первичное магнитное поле создается круглым витком (или обмоткой тороидальной формы) с произвольным сечением S_0 , по которому протекают токи с заданной плотностью $\vec{\delta}_0$. Вблизи витка (обмотки) находится анизотропный однородный ферромагнетик тороидальной формы сечением S_i , ограниченным контуром l произвольной формы. Оси анизотропии магнитного материала направлены по осям r, z . Такое расположение осей является единственным практически реальным вариантом и позволяет ввести диагональный тензор $\tilde{\mu}_i$ с компонентами μ_{ir} и μ_{iz} . Внешняя область S_e , включающая S_0 , заполнена немагнитной однородной средой.

Краевая задача в данном случае содержит такие же дифференциальные уравнения, как и задача, рассмотренная выше, однако решается она в цилиндрической системе координат. В результате получена система ГИУ следующего вида:

$$\begin{aligned} \sigma_q + \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p (\vec{n}_q, \tilde{\mu}_i \nabla_q K_{ipq} - k_1 \pi m_i) dl_p + \frac{1}{\pi} \oint_l i_p (\vec{\tau}_q, \nabla_q K_{epq}) dl_p = \\ = \frac{m_i}{\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} (\vec{\tau}_q, \nabla_q K_{ipq}) dS_p - \frac{1}{\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} (\vec{\tau}_q, \nabla_q K_{epq}) dS_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& i_q - \frac{1}{\pi} \oint_l i_p (\bar{n}_q, \nabla_q K_{epq}) dl_p + \frac{1}{\pi m_i} \oint_l \sigma_p (\bar{\tau}_q, \nabla_q K_{ipq}) dl_p = \\
& = -\frac{1}{\pi m_i} \int_{S_0} \delta_{0p} (\bar{n}_q, \tilde{\mu}_i \nabla_q K_{ipq}) dS_p + \frac{1}{\pi} \int_{S_0} \delta_{0p} (\bar{n}_q, \nabla_q K_{epq}) dS_p,
\end{aligned}$$

где $K_{epq} = \sqrt{\frac{r_p}{r_q}} \left(K(k) \left(\frac{2}{k} - k \right) - \frac{2}{k} E(k) \right)$, $K_{ipq} = \sqrt{\frac{r_p}{r_q}} k K(k)$, $K(k)$ и $E(k)$ –

эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

В работе получено специальное представление для ядра $K_{ipq} = \ln \frac{1}{r_a} + f(r_p, r_q, z_p, z_q)$, где f – гладкая функция, и доказана сингулярность полученной системы.

При построении системы использованы новые формулы для предельных значений производных векторов поля. Доказано, что с точки зрения разрешимости эти полученные системы обладают одинаковыми свойствами, так как главные части сингулярных операторов в этих системах имеют одинаковый вид. Следовательно, для полученной системы существует возможность практической применимости.

В первой главе предложено также обоснование формул, использованных при выводе систем, в частности, доказательство формулы для предельного значения нормальной производной потенциала простого слоя. Кроме того, приводятся доказательства сингулярности полученных систем, а также процесс сведения их к системам уравнений Фредгольма, т.е. процесс регуляризации.

Также приведена методика построения математической модели для союзной задачи к первой из рассмотренных задач. Записав системы уравнений для основной и союзной задач в векторно-матричной форме, получили систему $S_1 x_1 + K_1 x_1 = b_1$, $S_2 x_2 + K_2 x_2 = b_2$, где S_1, S_2 – сингулярные интегральные операторы; K_1, K_2 – интегральные операторы Фредгольма. Доказано, что в качестве регуляризаторов можно использовать сингулярные операторы союзных задач, т.е., что системы $S_2 S_1 x_1 + S_2 K_1 x_1 = S_2 b_1$, $S_1 S_2 x_2 + S_1 K_2 x_2 = S_1 b_2$ являются системами уравнений Фредгольма, что позволяет проводить эффективную численную реализацию полученных математических моделей.

Приведена методика построения математических моделей для расчета плоскопараллельного магнитостатического поля магнитопроводов реакторов, для которых характерно наличие стыков. На этих стыках (границах) оси анизотропии меняют свое направление (рис.2), что нарушает однородность среды и делает невозможным использова-

ние в расчетных областях одних и тех же представлений для потенциалов. Для этого случая разработан специальный метод частичного разделения областей, состоящий в том, что при построении модели на границах раздела областей используется одновременно и плотность тока и плотность заряда. Этот метод позволяет получить систему интегральных уравнений второго рода.

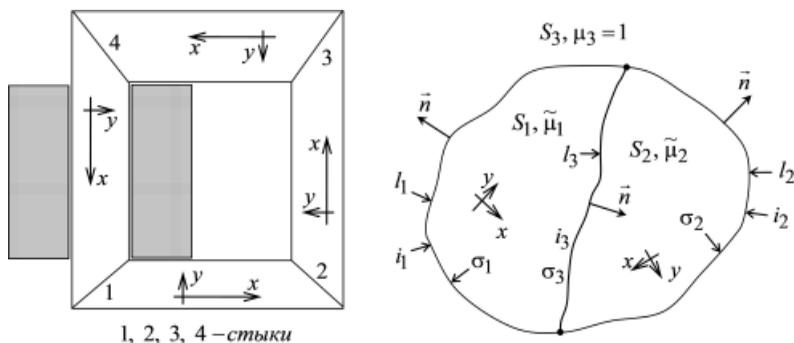


Рис. 2.

Для модели изображенной на рис.2, получена система интегральных уравнений, для которой можно доказать возможность эффективной численной реализации.

Вторая глава содержит разработанные методики построения математических моделей для расчета плоскопараллельных и осесимметричных квазистационарных электромагнитных полей в анизотропных средах магнитопроводов.

Представлены результаты разработки методики по расчету плоскопараллельного квазистационарного поля. Установлено, что характерной является следующая модельная задача (рис. 3).

Сечение обмотки S_0 , по которому протекают заданные токи с плотностью δ_0 , и сечение магнитопровода S_i с анизотропной проводимостью $\tilde{\gamma}$ и магнитной проницаемостью μ_a образуют сечение электромагнитной системы, моделирующей срединные части магнитопровода трансформатора, в которой влияние остальных частей магнитопровода относительно мало и поле имеет плоскопараллельную структуру. Особенностью данной модели является постоянство внешнего магнитного поля B_0 по сечению сердечника S_i .

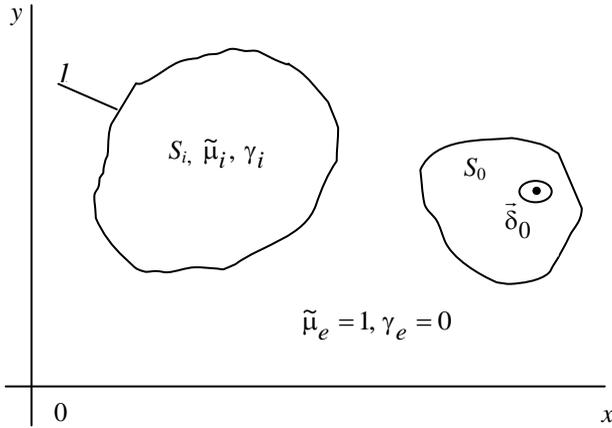


Рис. 3.

Решение проведено путем сведения краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений с использованием векторного и скалярного потенциалов. В результате получена система интегральных уравнений, содержащая интегралы нестандартного вида:

$$i_q + \frac{1}{\pi m} \oint_l i_p (\vec{n}_q \tilde{\mu}_i, \nabla_q K_0(k r_a)) dl_p - \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{\tau}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p = -2 \left(\vec{\tau}_q, \vec{H}_{0iq} - \vec{H}_{0eq} \right);$$

$$\sigma_q + \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p \frac{(\vec{n}_q, \vec{r})}{r^2} dl_p + \frac{m}{\pi} \oint_l i_p (\vec{\tau}_p, \nabla_q K_0(k r_a)) dl_p = 2 \left(\vec{n}_q, \vec{H}_{0eq} - \tilde{\mu}_i \vec{H}_{0iq} \right).$$

Функция Макдональда, входящая в систему, допускает следующее представление: $K_0(k r_a) \cong -\ln r_a, r_a \rightarrow 0$.

Доказано, что часть интегралов, входящих в систему, являются сингулярными. Кроме того, установлено, что полученная система с точки зрения разрешимости обладает такими же свойствами, что и системы, полученные в первой главе, следовательно, возможно её эффективное применение при решении технических задач.

Моделируются электромагнитные квазистационарные поля с симметрией вращения на основе анализа уравнений Максвелла. Рассмотрена методика построения математических моделей для осесимметричной магнитной системы (дросселя, реактора), состоящей из сердечника (магнитопровода) и кольцевой обмотки, охватывающей ось вращения. Кроме того, представлена модель, соответствующая маг-

нитной системе, состоящей из кольцевого магнитопровода, на который равномерно и плотно намотана обмотка.

Получена система интегральных уравнений следующего вида:

$$i_q + \frac{1}{\pi m} \oint_l i_p (\vec{n}_q, \vec{\mu}_i \nabla_q K_{ipq}) dl_p + \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p (\vec{\tau}_q, \nabla_q K_{epq}) dl_p = -2 (\vec{\tau}_q, \vec{H}_{oiq} - \vec{H}_{oeq});$$

$$\sigma_q - \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p (\vec{n}_q, \nabla_q K_{epq}) dl_p + \frac{m}{\pi} \oint_l i_p (\vec{\tau}_q, \nabla_q K_{ipq}) dl_p = 2 (\vec{n}_q, \vec{H}_{0eq} - \vec{\mu}_i \vec{H}_{0iq}).$$

Доказано, что часть интегралов этой системы являются сингулярными. При выводе системы использованы новые формулы для предельных значений производных векторов поля.

Возможность практической применимости доказана так же, как и для первой системы из этой главы.

В третьей главе рассмотрена методика построения математических моделей для расчета трехмерных магнитостатических полей и приведено их теоретическое обоснование.

Приводится специальный вывод векторного граничного интегрального уравнения, предназначенного для расчёта магнитного поля заданного распределения токов в присутствии однородных ферромагнитных тел. Практическое значение данного уравнения заключается в том, что плотность поверхностного тока, являющаяся его решением должна подчиняться условию $\text{div}_S \vec{i} = 0$. Условие это должно следовать из самого уравнения и является характерным для уравнений, применяемых для расчета трехмерных полей в анизотропной среде.

Предложена краевая задача, которую можно свести к рассматриваемому векторному интегральному уравнению при дополнительном условии $\text{div} \vec{A}_{i,e} = 0$ (введен векторный потенциал $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$). В дальнейшем в работе доказано, что дополнительное условие следует непосредственно из самого уравнения.

Доказано, что рассматриваемое векторное уравнение является уравнением типа Фредгольма и может эффективно применяться при численных расчетах.

Рассмотрена методика построения математической модели для расчета трехмерного поля в анизотропной среде методом полного разделения областей. Для односвязных областей разработана математическая модель в виде системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{i}_q + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \left[\frac{\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right]}{R_{ae}^3} \right] dS_p - \frac{\tilde{\mu}_e^{-1}}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p \frac{\left[\vec{n}_q, \vec{r}_i \right]}{R_{ai}^3} dS_p = 2 \left[\vec{n}_q, \vec{H}_{0iq} - \vec{H}_{0eq} \right], \\ \sigma_p - \frac{1}{2\pi m_i} \oint_S \sigma_p \left[\frac{\left(\vec{n}_q, \vec{r}_i \right)}{R_{ai}^3} - k_1 \right] dS_p + \frac{1}{2\pi m_e} \oint_S \left(\vec{n}_q \tilde{\mu}_i \left[\vec{i}_p, \vec{r}_e \right] \right) \frac{1}{R_{ae}^3} dS_p = 2 \left(\vec{n}_q, \mu_i \vec{H}_{0i} - \mu_e \vec{H}_{0e} \right). \end{aligned}$$

Исследованы интегральные операторы, входящие в полученную систему, и установлено, что часть из них являются сингулярными. При построении модели использовались новые формулы для предельных значений производных потенциала простого слоя.

Доказана применимость полученной системы к расчетам, а также рассмотрено дополнительное условие $\oint_S \sigma_p dS_p = 0$, необходимое для обеспечения этой применимости. Аналогичная система приведена и для многосвязных областей, но с добавлением условия $\oint_{l_i} \left(\vec{i}, \vec{n}_i \right) dl = 0$,

выполнение которого, как доказано, гарантирует численную реализуемость модели.

Рассмотрены также математические модели, основанные на методе без разделения областей определения скалярных и векторных потенциалов, так как модели, рассмотренные ранее в этой главе, не являются универсальными (существуют устройства, в которых стыкующиеся магнитопроводы имеют различные магнитные характеристики и различные направления осей анизотропии). Кроме того, на практике встречаются ситуации, когда источники тока или металлические включения располагаются непосредственно внутри магнитопроводов, т. е. в анизотропной магнитной среде. Это требует использования во всех однородных областях представлений для векторов поля на основе векторного потенциала. В связи с этим возникает необходимость введения в каждой из однородных областей кусочно-однородной анизотропной среды и векторного и скалярного потенциалов. Таким способом можно получить практически эффективную модель.

Построена система граничных интегральных уравнений:

$$\vec{i}_q + \frac{1}{4\pi} \oint_S \left[\vec{n}_q \left[\vec{i}_p, \vec{R} \right] \right] \left(\frac{1}{m_e R_{ae}^3} - \frac{1}{m_i R_{ai}^3} \right) dS_p +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi} \oint_S \sigma_p \left[\bar{n}_q, \bar{R} \right] \left(\frac{\tilde{\mu}_e^{-1}}{\sqrt[3]{m_e R_{ae}^3}} - \frac{\tilde{\mu}_i^{-1}}{\sqrt[3]{m_i R_{ai}^3}} \right) dS_p = \left[\bar{n}_q, \bar{H}_{0i} - \bar{H}_{0e} \right] \\
& \sigma_q + \frac{1}{2\pi m_S} \oint_S \sigma_p \left(\bar{n}_q, \bar{R} \right) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{m_e R_{ae}^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{m_i R_{ai}^3}} \right) dS_p + \\
& + \frac{1}{2\pi m_S} \oint_S \left(\bar{n}_q \left[\bar{i}_p, \bar{R} \right] \right) \left(\frac{\tilde{\mu}_2}{m_e R_{ae}^3} - \frac{\tilde{\mu}_1}{m_i R_{ai}^3} \right) dS_p = \frac{2}{m_S} \left(\bar{n}_q, \tilde{\mu}_i \bar{H}_{0i} - \tilde{\mu}_e \bar{H}_{0e} \right)
\end{aligned}$$

где $m_S = m_i^{\frac{2}{3}} + m_e^{\frac{2}{3}}$. Система содержит интегралы нестандартного вида. Установлено, что эти интегралы являются сингулярными.

При построении системы использованы новые формулы предельных значений производных потенциала простого слоя. Доказана практическая применимость полученной модели для расчета магнитного поля трансформаторов и реакторов с шихтованными сердечниками.

Последняя часть главы посвящена подробному теоретическому исследованию полученных в ней математических моделей для расчета трехмерного магнитного поля в анизотропной среде. В частности, доказано, что полученные системы интегральных уравнений являются системами сингулярных интегральных уравнений (интегральные операторы этих систем сингулярны). Обоснована справедливость формул для предельных значений производных потенциалов. Предложен процесс регуляризации полученной системы уравнений и с его помощью доказана разрешимость полученных систем, т.е. возможность применения полученных моделей при расчетах технических объектов.

Четвертая глава содержит результаты численной реализации математических моделей полученных в диссертационной работе.

Рассмотрены основные особенности численной реализации сингулярных интегральных уравнений, а также рассмотрено характерное сингулярное интегральное уравнение вида

$$\sigma_q + \frac{1}{\pi} \oint_l \sigma_p \left(\frac{\bar{\tau}_q, \bar{r}_{pq}}{r_{apq}^2} + k_1 \right) dl_p = -2\mu_0 \left(\bar{\tau}_q, \bar{H}_{0q} \right).$$

Путем замены гладкого контура l ломаной получены формулы для

составляющих вектора $\bar{\tau}_i$: $\tau_{ix} = \frac{x_{i+1} - x_{li}}{\Delta l_i}$, $\tau_{iy} = \frac{y_{i+1} - y_{li}}{\Delta l_i}$,

$i = 0, 1, \dots, N$, где x_i, y_i – координаты узлов ломаной; Δl_i – длина i -го отрезка. Выбрав кусочно-линейную аппроксимацию, получили систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sigma_i + \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^N a_{ij} \sigma_j = -2\mu_0 (\bar{\tau}_i, \bar{H}_{0i}),$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \left(\frac{\bar{\tau}_i, \bar{r}_{ij}}{\bar{r}_{aji}^2} + k_1 \right) t \Delta l_{ij} dt + \int_0^1 \left(\frac{\bar{\tau}_i, \bar{r}_{ij+1i}}{\bar{r}_{aji+1i}^2} + k_1 \right) (1-t) \Delta l_{ij+1} dt,$$

$$j = 1, \dots, N, \quad i = 1, \dots, N, \quad \Delta l_{ij} = \sqrt{(a_{1j} + 2a_{2j}t)^2 + (b_{1j} + 2b_{2j}t)^2}.$$

Полученный подход позволяет реализовать кусочно-постоянную и кусочно-линейную аппроксимацию расчетных функций. Численные эксперименты показали, что точность вычислений можно несколько повысить за счет кусочно-линейной аппроксимации, поскольку специфика сингулярных интегралов состоит в том, что при кусочно-постоянной аппроксимации при совпадении точек наблюдения и интегрирования сингулярный интеграл по частичному отрезку обращается в ноль.

Таким образом, получена система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующая исходное сингулярное интегральное уравнение.

Приведены результаты численной реализации математических моделей при расчетах некоторых электромагнитных устройств и анализ полученных результатов. Программная реализация проведена с использованием языка программирования Delphi на ЭВМ ПК ОП 4Гб, 1ГГц.

Рассмотрен пример расчета плоскопараллельного поля дросселя при наличии стыков (рис. 4). Проведенные расчеты показали, что при сильно выраженной анизотропии силовые линии направлены вдоль главной оси анизотропии (оси x), это очевидно соответствует физическому смыслу задачи. При увеличении значения поперечной магнитной проницаемости μ_y картина поля изменяется за счет увеличения потоков рассеяния. Кроме того, установлено сильное уменьшение внешнего поля при увеличении анизотропии: в отдельных контрольных точках при $\mu_x = 500, \mu_y = 100$ уменьшение происходит в 2 – 2,5 раза, по сравнению с изотропией $\mu_x = \mu_y = 500$, а при

$\mu_x = 15000, \mu_y = 100$ уменьшение происходит в 4 – 4,5 раза, по сравнению с изотропией $\mu_x = \mu_y = 15000$. При этом изменение основного

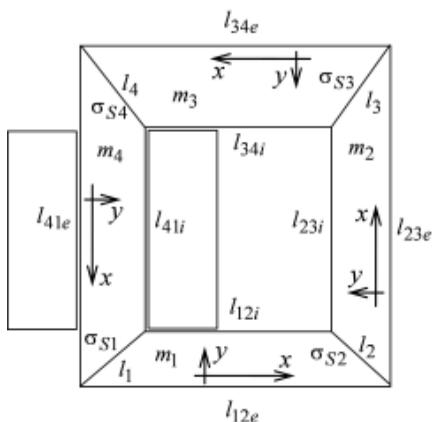


Рис. 4.

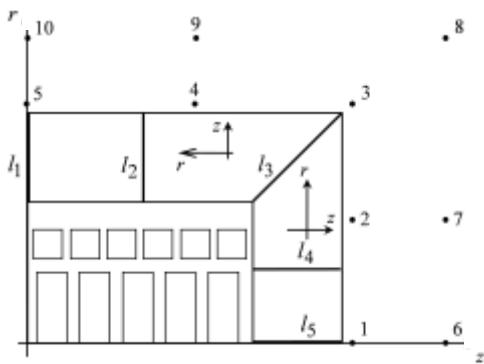


Рис. 5.

магнитного потока и индуктивности не превышает 1%.

Далее представлены результаты численной реализации математической модели для расчета осесимметричного реактора (рис.5) в случае стационарного поля.

Сравнение полученных распределений поля показывает существенное влияние анизотропии, причем гораздо более сильное, чем в предыдущем варианте замкнутого магнитопровода. Это происходит из-за сильного влияния на режим работы реактора (магнитопровода) потоков рассеяния, возникающих в зазорах между вставками. Особенно это заметно по характеру проникновения поля в основную часть магнитопровода из последней вставки. Однако при этом влияние самой анизотропии остается довольно слабым (величины μ_r сравнительно с величиной μ_z).

При увеличении суммарного воздушного зазора влияние анизотропии усиливается. Наибольшее влияние анизотропии на внешнее поле сказывается вдоль оси вращения. При этом величина магнитного поля при $\mu_x = 500, \mu_y = 100$ может уменьшаться по сравнению с изотропным вариантом $\mu_x = \mu_y = 500$ в 2 – 2,5 раза. Этот вывод следует учитывать при проектировании экранов. Также установлено, что наибольшей величины индуктивность достигает при минимальном сум-

марном зазоре, что вполне очевидно. Поэтому для дальнейшего анализа целесообразно величину зазора сопоставлять с величиной максимальной индукции в магнитопроводе, что позволит оценить запас линейности режима.

Как и при расчете дросселя, установлено сильное уменьшение внешнего поля при увеличении анизотропии: в отдельных контрольных точках уменьшение происходит в 4 – 4,5 раза. Изменение магнитного потока при этом практически отсутствует (0,3 – 0,5%).

Рассмотрена также осесимметричная модель реактора в режиме квазистационарного магнитного поля. Эта модель позволяет учитывать перераспределение токов по сечению шин вторичных обмоток трансформаторов, возникающее вследствие поверхностного эффекта. Результаты расчета позволяют сделать вывод о том, что анизотропия магнетика может оказывать существенное влияние на степень проявления поверхностного эффекта, т.е. на распределение поля и потерь мощности. В отношении картины поля все выводы соответствуют ранее полученным для стационарного поля. Это касается и изменения внешнего поля при увеличении анизотропии и ее влияния на магнитный поток.

Представлены результаты численной реализации модели трехмерного поля в анизотропной среде на примере дросселя с зазором. В отличие от плоскопараллельных и осесимметричных моделей, при моделировании трехмерных полей на персональных компьютерах возникает проблема достаточно точной аппроксимации модели. Поэтому был проведен специальный численный эксперимент, который дал возможность установить оптимальную величину количества элементов разбиения N .

Результаты эксперимента (рис.6) показали, что величина N должна быть не менее 10000, поскольку последнее распределение соответствует почти установившемуся состоянию (точность $\approx 4\%$). При этом точность расчета поля получается не менее 4%, а время расчета не более 2 – 3 ч на каждый вариант.

Были проведены численные эксперименты по исследованию влияния анизотропии. Сравнение результатов расчета при фиксированных значениях $\mu_x = 250$, $\mu_z = 5$ (конструкционная анизотропия) и вариации μ_y позволяет сделать вывод о том, что с ростом значений поперечной магнитной проницаемости μ_y магнитное поле перераспределяется по объему магнитопровода (рис. 7). Это может происходить только за счет роста поля по осям x и y , что, как показывают расчеты, приводит к росту соответствующих составляющих поля, в

том числе, и вне реактора. Следовательно, расчеты экранов (баков) реакторов нужно проводить с учетом усиления поля за счет влияния анизотропии. Расчеты показывают, что внешнее поле может при этом возрастать в 2 – 3 раза, что должно учитываться при проектировании реакторов.

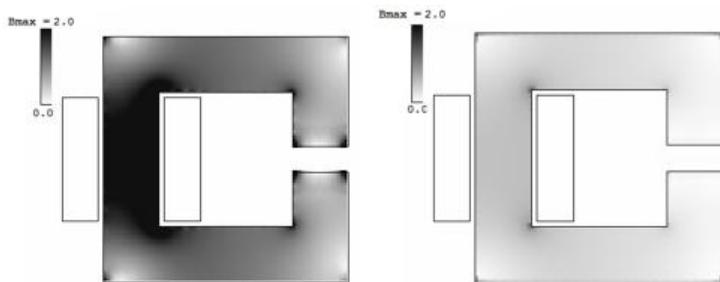


Рис. 6.

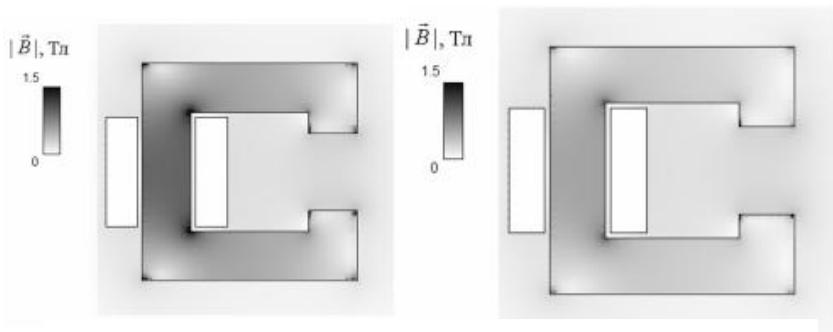


Рис. 7.

Результаты численного эксперимента по исследованию характера поля в зависимости от величины зазора показывают, что влияние анизотропии при увеличении величины зазора усиливается, т. е. при наличии естественной анизотропии ее концентрирующее действие в некоторой степени компенсирует влияние зазора.

Установлено, что, в отличие от численных расчетов предыдущих моделей, в трехмерном варианте анизотропия оказывает заметное влияние не только на картину поля, но и на интегральные параметры, а именно, на индуктивность и магнитный поток. Это показывают графики зависимости индуктивности от поперечной магнитной проницаемости и величины зазора (рис. 8).

Произведено сравнение результатов, полученных с помощью реализации разработанных математических моделей, с результатами

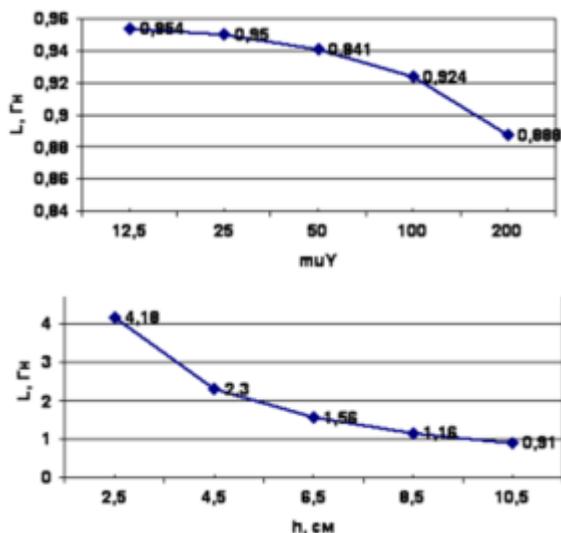


Рис. 8.

расчета в среде ELCUT. Установлено, что по точности расчета для задач одинакового геометрического характера при невысокой связности областей относительное отклонение результатов не превосходит 5% в отдельных областях, а в целом составляет 2 – 3%. По затратам времени метод интегральных уравнений, используемый в разработанной методике, оказывается существенно экономичнее для задач невысокой связности. Экономия времени составляет 70 – 80%. Однако эффект экономии времени существенно усиливается при увеличении порядка связности расчетных областей, что объясняется ухудшением обусловленности систем уравнений МКЭ, реализуемых в комплексе ELCUT.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Разработана методика построения математических моделей электромагнитного поля в анизотропной среде магнитопроводов электротехнических устройств: трансформаторов, реакторов, электрических машин, основанные на применении методов вторичных источников, разделения областей и методов сингулярных интегральных уравнений.

2. С использованием теории сингулярных уравнений обоснована возможность практического применения разработанных моделей для расчета электромагнитного поля в различных линейных анизотропных

средах, в частности, при расчетах магнитного поля сердечников электрических машин, трансформаторов и реакторов.

3. При разработке и исследовании математических моделей путем использования теории сингулярных уравнений и теории потенциалов получены следующие результаты.

3.1. Установлено, что системы содержат сингулярные интегралы.

3.2. Получены новые формулы для предельных значений производных векторов поля с помощью теории потенциала.

3.3. Получены новые формулы для закона Био-Савара-Лапласа для плоскопараллельного и трехмерного полей в анизотропной среде.

3.4. Разработана новая методика регуляризации систем сингулярных уравнений.

4. Путем численного эксперимента определено, что наиболее эффективным методом численной реализации является метод редукции системы интегральных уравнений к СЛАУ с применением кусочно-линейной аппроксимации неизвестных функций, отражает специфику сингулярных интегралов.

5. Численные эксперименты на моделях дросселя и реакторов показали следующее.

5.1. В плоскопараллельной и осесимметричной моделях влияние анизотропии магнитной среды проявляется, в основном, в отношении внешнего магнитного поля, в то время как величина интегральных параметров в этих моделях от анизотропии зависит слабо.

5.2. Установлено в трехмерном варианте влияние анизотропии наиболее существенно. В частности анизотропия гораздо сильнее влияет на величину интегральных параметров и на внешнее поле, чем в плоскопараллельном и осесимметричном вариантах, что объясняется влиянием конструкционной анизотропии, которая дает возможность успешного применения плоскопараллельного приближения при расчете электромагнитных характеристик устройств.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в изданиях по списку ВАК

1. **Кадников, С.Н. Интегральные уравнения для расчёта трёхмерного магнитного поля в анизотропной среде** / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Вестник ИГЭУ, 2005. – Вып.1. – С. 101–106.

2. **Кадников, С.Н. Математическое моделирование магнитного поля в кусочно-однородной анизотропной среде** / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Вестник ИГЭУ, 2006. – Вып. 2. – С. 58–61.

3. **Кадников, С. Н.** Исследование свойств граничного интегрального уравнения для расчета квазистатического магнитного поля / С. Н. Кадников, И. Е. Веселова // Вестник ИГЭУ, 2008. – Вып. 2.— С. 84–88.

4. **Кадников, С. Н.** Пространственный аналог интеграла типа Коши и формулы перестановки сингулярных интегралов / С. Н. Кадников, И. Е. Веселова // Вестник ИГЭУ, 2008. – Вып. 4. – С. 90–93.

5. **Кадников, С. Н.** Расчет электромагнитного поля дипольных источников с использованием векторных потенциалов / С. Н. Кадников, И. Е. Веселова // Вестник ИГЭУ, 2009. – Вып. 2. – С. 81–84.

Публикации в других изданиях

6. **Кадников, С. Н.** Методика расчета плоскопараллельного магнитостатического поля в анизотропной среде / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Повышение эффективности работы энергосистем: тр. ИГЭУ; под ред. В. А. Шуина, М. Ш. Мисриханова, А. В. Мошкарina / Мин-во образования, Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2004.— Вып. 7. – С. 311–318.

7. **Кадников, С. Н.** Методика расчета плоскопараллельного квазистационарного электрического поля в анизотропной среде / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Повышение эффективности работы энергосистем: тр. ИГЭУ; под ред. В. А. Шуина, М. Ш. Мисриханова, А. В. Мошкарina / Мин-во образования, Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2004. – Вып. 7. – С. 318–327.

8. **Кадников, С. Н.** Векторный потенциал и магнитное поле в однородной анизотропной среде / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Проблемы сварки и электротехники: материалы Междунар. науч.-техн. конф. «XII Бенардосовские чтения»: (секция «технология и оборудование сварки и электротехника): сборник научных трудов / Федеральное агентство по образованию, ГОУВПО «Иван. гос. энерг. ун-т им. В. И. Ленина», 2005. — С.126–130.

9. **Кадников, С.Н.** Интегральные уравнения для расчета трехмерного магнитного поля в анизотропной среде / С. Н. Кадников, И. Е. Сергеева // Повышение эффективности работы энергосистем: тр. ИГЭУ; под ред. В. А. Шуина, М. Ш. Мисриханова, А. В. Мошкарina / Мин-во образования, Иван. гос. энерг. ун-т. – Иваново, 2007.— Вып. 8. – С. 106–120.

10. **Кадников, С. Н.** Граничные интегральные уравнения для расчета поля в анизотропной магнитной среде / С. Н. Кадников, И. Е. Веселова // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. " Состояние и

перспективы развития электротехнологии" (XIV Бенардосовские чтения), 29-31 мая / Федеральное агентство по образованию, ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет имени В. И. Ленина", Академия технологических наук Российской Федерации, Верхне-Волжское отделение АТН РФ.—Иваново, 2007.—Т. 1.—С. 6.

11. **Кадников, С.Н. Формулы перестановки** сингулярных интегралов / С. Н. Кадников, И. Е. Веселова // Тез. докл. Междунар. науч.-техн. конф. "Состояние и перспективы развития электротехнологии" (XV Бенардосовские чтения), 27-29 мая / Федеральное агентство по образованию, ГОУВПО "Ивановский государственный энергетический университет им. В. И. Ленина", Академия электротехнических наук Российской Федерации; редкол.: С. В. Тарарыкин [и др.]. – Иваново, 2009. – Т. 1.– С. 4.

12. **Сергеева, И. Е. Математическая** модель на основе векторного интегрального уравнения для расчета магнитного поля: Тез. докл. XI Междунар. науч.-техн. конф. студ. и асп. «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». – М.: МЭИ, 2005.– Т.1.– С. 318.

13. **Сергеева, И. Е. Граничные** интегральные уравнения для расчета магнитного поля в кусочно-однородной анизотропной среде: Тез. докл. XI Междунар. науч.-техн. конф. студ. и асп. «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». – М.: МЭИ, 2005. – Т.1.– С.318–319.

14. **Сергеева, И. Е. Определение** условий разрешимости векторного интегрального уравнения для расчета магнитного поля: Тез. докл. XII Междунар. науч.-техн. конф. студ. и асп. «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». – М.: МЭИ, 2006. – Т.1. – С.411.

15. **Сергеева, И. Е. Вопросы** расчета поля в кусочно-однородной анизотропной среде с помощью граничных интегральных уравнений: Тез. докл. XII Междунар. науч.-техн. конф. студ. и асп. «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика». М.: МЭИ, 2006. – Т.1. – С.412.