Астраханский государственный технический университет

Кафедра *«Информатика»*

Методические указания по изучению курсов САПР для студентов механических специальностей

Решение задач теплопроводности методом конечных элементов в CAE – системе ELCUT

Астрахань

2001

Авторы методического указания:

Мишичев А.И.; проф., д-р техн. наук;
Мартьянова А.Е.; ст. преп., канд. техн. наук.

Рецензент:

Гаращенко П.А.; доц., канд. техн. наук.

Методические указания рассмотрены и одобрены к публикации на заседании кафедры «Информатика».

Протокол № ______ от _______________ г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие информационных технологий привело к существенному изменению методов проведения расчётов во всех областях техники и технологии. Метод конечных элементов (МКЭ), который является основой системой инженерного анализа (САЕ), стал доступен не только специалистам – профессионалам, но входит в разряд обычных инструментов инженеров – проектировщиков и исследователей.

При работе с программами, реализующими расчеты с помощью МКЭ, необходима специальная подготовка пользователей, которые могут осуществить оценку достоверности полученных результатов и условий, при которых обеспечивается получение достоверных результатов. Оценка достоверности результатов анализа МКЭ производится тестированием МКЭ на задачах, для которых известно точное решение.

Лабораторный практикум по расчетам элементов конструкций в курсах САПР имеет целью приобретение навыков расчетов с помощью МКЭ и предусматривает постановку, решение и анализ тестовых задач в САПР «Звезда – М+» и САЕ – системе ELCUT. Разработаны методические материалы «Система автоматизированных расчетов «Звезда» [1], комплекс лабораторных работ по проведению расчетов МКЭ в САПР «Звезда – М+» [2-4] и системе ELCUT [5]. Эти методические пособия достаточно полно охватывают решение учебных задач анализа напряженно-деформированного состояния в плоской и осесимметричной постановках.

Настоящее методическое указание предназначено для приобретения навыков анализа плоских и осесимметричных задач линейной и нелинейной теплопроводности с помощью МКЭ.

В методическом указании в части описания общих сведений использованы справочные материалы САЕ –системы ELCUT.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

МКЭ – один из наиболее гибких и универсальных методов решения широкого круга задач механики сплошной среды, тепло- и массообмена. электро- и магнитостатики и многих других задач науки и техники [1].

CAE – система ELCUT позволяет решать двумерные краевые задачи математической физики, описываемые эллиптическими дифференциальными уравнениями в частных производных относительно скалярной или однокомпонентной векторной функции (потенциала), а также задачи расчета напряженно-деформированного состояния твердого тела (плоские напряжения, плоские деформации, осесимметричные нагрузки).

Система ELCUT предназначена для расчетов МКЭ плоских и осесимметричных (двумерных) задач:

- линейной и нелинейной магнитостатики,
- магнитного поля переменных токов (с учетом вихревых токов),
- электростатики,
- растекания токов в проводящей среде,
- линейной и нелинейной теплопроводности,
- линейного анализа напряженно-деформированного состояния,
- связанные (мультидисциплинарные) задачи.

Температурный анализ играет заметную роль при проектировании многих механических и электромагнитных систем. Как правило, интерес представляют распределение температуры, температурного градиента и теплового потока.

ELCUT может выполнять линейный и нелинейный стационарный температурный анализ в плоской и осесимметричной постановке. Формулировка задачи основывается на стационарном уравнении теплопроводности с граничными условиями радиационного и конвективного теплообмена.

При постановке задачи возможно использование следующих возможностей.

Свойства сред:

ортотропные материалы с постоянной теплопроводностью,

изотропные материалы с теплопроводностью, зависящей от температуры.

Источники поля:

постоянные и зависящие от температуры объемные источники тепловой мощности,

конвективные и радиационные источники,

мощность джоулевых потерь, импортированная из задачи растекания токов.

Граничные условия:

заданная температура,

заданный тепловой поток на границе,

условия радиационного и конвективного теплообмена,

поверхности с постоянной, наперед неизвестной температурой.

Результаты расчета:

температура,

градиент температуры,

плотность теплового потока

интегральные значения теплового потока через заданные поверхности.

Специальные возможности: Интегральный калькулятор может вычислять различные интегральные значения на определенных Вами линиях и поверхностях. Распределение температуры может быть передано в задачу расчета механического напряженного состояния (совмещенная термо-упругая задача).

1.1. ВЫБОР КЛАССА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются три основных класса двумерных задач: *плоские*, *плоскопараллельные* и *осесимметричные*.

Плоские задачи обычно возникают при описании процессов теплопередачи в тонких пластинах. Они решаются в двумерной прямоугольной системе координат.

Плоскопараллельные постановки используют декартову систему координат *xyz*, причем предполагается, что геометрия расчетных областей, свойства сред и параметры, характеризующие источники поля, неизменны в направлении оси *z*. Вследствие этого описание геометрии, задание свойств, граничных условий и источников, а также обработку результатов можно проводить в плоскости *xy*, называемой *плоскостью модели.* Принято, что ось *x* направлена слева направо, а ось *y* - снизу вверх.

Осесимметричные задачи решаются в цилиндрической системе координат $zr\theta$. Порядок следования осей выбран для общности с плоскопараллельными задачами. Физические свойства и источники поля предполагаются не зависящими от угловой координаты. Работа с моделью проводится в плоскости *zr* (точнее в полуплоскости $r>0$). Ось вращения *z* направлена слева направо, ось *r* - снизу вверх.

Геометрическая конфигурация задачи определяется как набор *подобластей*, представляющих собой одно- и многосвязные криволинейные многоугольники в плоскости модели, не пересекающиеся между собой иначе как по границе. Каждой подобласти приписан определенный набор физических свойств. Мы будем использовать термины блок для полигональной подобласти, ребро для отрезков и дуг окружностей, образующих границы блоков и вершина для концов рёбер и изолированных точек. Рёбра, отделяющие расчетную область от остальной части плоскости, составляют внешнюю границу расчетной области. Все остальные рёбра являются *внутренними границами*.

1.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ

ELCUT позволяет решать задачи теплопередачи в линейной и нелинейной постановках. При решении тепловых задач используется уравнение теплопроводности в одном из видов:

для линейных задач:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right)=-q$$ — в плоском случае;

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r r \frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right)=-q$$ — в осесимметричном случае;

для нелинейных задач:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y}\right)=-q(T)$$ — в плоском случае;

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(T) r \frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z}\right)=-q(T)$$ — в осесимметричном случае;

где:

T — температура;

$\lambda_{x(y,z,r)}$ — компоненты тензора теплопроводности (в линейной постановке);

λT — теплопроводность как функция температуры, представленная кубическим сплайном (анизотропия не поддерживается в нелинейной постановке);

q — удельная мощность тепловыделения; в линейной постановке - константа, в нелинейной постановке - задаваемая кубическим сплайном функция температуры.

Все параметры уравнений в линейной постановке постоянны в пределах каждого блока модели.

Постановка задачи распределения температурного поля в тонких пластинах весьма похожа на формулировку плоскопараллельной задачи.

1.3. ИСТОЧНИКИ ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

ELCUT позволяет задать источники тепла в *блоках*, *рёбрах* или отдельных *вершинах* модели. Источник, заданный в конкретной точке плоскости *xy*, описывает нагреватель в виде струны, следом которой служит данная точка плоскости, и задается мощностью тепловыделения на единицу длины. В осесимметричном случае точечный источник поля представляет нагреватель в виде окружности вокруг оси симметрии или точечный источник расположенный на оси. Чтобы охватить оба этих случая, точечный источник в осесимметричном случае всегда описывается полной тепловой мощностью, которая для окружности связана с линейной плотностью тепловыделения соотношением $q \quad 2\pi r\, ql$.

Источник тепла, заданный на ребре модели соответствует тепловыделяющей поверхности в трехмерном мире. Он характеризуется поверхностной плотностью тепловыделения и описывается при помощи *граничного условия второго рода* для ребра.

Объемная плотность тепловыделения, заданная для блока модели, соответствует объемному источнику тепла.

1.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В ЗАДАЧАХ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Следующие виды граничных условий могут быть заданы на внешних и внутренних границах расчетной области.

Условие заданной температуры специфицирует на ребре или в вершине модели наперед заданное значение температуры T_0 (например, при интенсивном омывании поверхности жидкостью постоянной температуры). Значение T_0 на ребре может быть задано в виде линейной функции координат. Параметры задающей функции могут меняться от ребра к ребру, но должны быть согласованы так, чтобы функция T_0 не претерпевала разрывов в точках соприкосновения ребер. Этот вид граничного условия иногда называют *условием первого рода*.

Условие заданного теплового потока описывается следующими соотношениями:

$F_n = -q_s$ — на внешних границах,

$F_n^+ - F_n^- = -q_s$ — на внутренних границах,

где F_n нормальная компонента вектора плотности теплового потока, индексы «+» и «-» означают «слева от границы» и «справа от границы» соответственно. Для внутренней границы q_s означает поверхностную мощность источника, для внешней - означает известное значение теплового потока через границу. Этот вид граничного условия иногда называют *граничным условием второго рода*.

Если q_s равно нулю, граничное условие называется однородным. Однородное условие второго рода на внешней границе означает отсутствие теплового потока через указанную поверхность. Однородное условие второго рода является естественным, оно устанавливается по умолчанию на всех тех сторонах, составляющих внешнюю границу, где явно не указано иное граничное условие. Это вид граничного условия употребляется в двух случаях: на плоскости симметрии задачи (если ввиду симметричности геометрии и источников задача решается только на части области), а также для описания адиабатической границы.

Если неоднородное граничное условие второго рода задано на внешнем ребре, являющемся следом плоскости симметрии задачи, истинное значение мощности тепловыделения следует разделить пополам.

Граничное условие конвекции может быть задано на внешней границе модели. Оно описывает конвективный теплообмен и определяется следующим образом:

$$F_n = \alpha(T - T_0) ,$$

где α - коэффициент теплоотдачи, и T_0 —температура окружающей среды. Параметры α и T_0 могут меняться от ребра к ребру.

Граничное условие этого типа иногда называют *граничным условием третьего рода.*

Граничное условие радиации может быть задано на внешней границе модели. Оно описывает радиационный теплообмен и определяется следующим образом:

$$F_n = k_{SB}\beta(T^4 - T_0^4) ,$$

где k_{SB} -константа Стефана-Больцмана, β - коэффициент поглощения поверхности, и T_0 — температура поглощающей среды. Параметры β и T_0 могут меняться от ребра к ребру.

Замечание. Чтобы задача расчета температурного поля была поставлена корректно, необходимо поставить хотя бы в одной вершине условие заданной температуры, либо хотя бы на одном ребре условие конвекции или радиации.

Граничное условие равной температуры может быть использовано для описания тел с очень высокой по сравнению окружающими телами теплопроводностью. Внутренность такого тела может быть исключена из расчета температурного поля при условии описания всей его поверхности как поверхности равной температуры. Данное условие отличается от условия первого рода тем, что температура на описываемой поверхности не известна заранее.

Замечание. Ребро, описанное условием равной температуры, не должно соприкасаться с любым ребром, где температура задана явно. В последнем случае - ребро с условием равной температуры должно быть переопределено при помощи граничного условия первого рода с подходящим значением температуры.

1.5. ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ В ЗАДАЧАХ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

При анализе результатов задачи растекания токов ELCUT позволяет оперировать со следующими локальными и интегральными физическими величинами.

Локальные величины:

- Температура T;
- Вектор плотности теплового потока $F \quad -\lambda\, grad\, T$

$$F_x = -\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad , F_y = -\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}$$ в плоском случае;

$$F_z = -\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad , F_r = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}$$ в осесимметричном случае;

Интегральные величины:

- Поток тепла через заданную поверхность

$$\mathbf{\Phi} = \int \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$$

где **n** - единичный вектор нормали к поверхности.

Поверхность интегрирования задается контуром в плоскости модели, состоящим из отрезков и дуг окружностей.

2. ПОДГОТОВКА К АНАЛИЗУ ЗАДАЧ

В настоящем методическом пособии будет рассматриваться анализ двумерных задач линейной теплопроводности с помощью МКЭ в рамках версии ELCUT – студенческое издание. Решение этих задач имеет целью приобретение навыков анализа теплопроводности с помощью МКЭ.

Для использования МКЭ необходимо располагать возможностью оценки возникающей погрешности решения. Этот вопрос решается тестированием МКЭ на задачах, для которых известно точное решение.

Чтобы эффективно использовать CAE – систему ELCUT, необходима тщательная предварительная подготовка пользователя (студента) к выполнению конкретной работы. Порядок такой подготовки изложен в методических указаниях [1,2]. Ниже предлагается ТИПИЧНЫЙ СЦЕНАРИЙ подготовки студента к выполнению лабораторной работы по проведению расчетов МКЭ на ПК.

- Поставить задачу по схеме: ДАНО, НАЙТИ, УСЛОВИЕ. В разделе ДАНО записать исходные данные задачи (а также каждой подзадачи) в следующем порядке: геометрические размеры, свойства материалов, граничные условия. Раздел НАЙТИ следует снабдить подробным комментарием. В разделе УСЛОВИЕ необходимо перечислить все условия, которые приняты в части поведения материалов.
- При проведении расчетов из реального объекта выделить расчетную схему (РС). Необходимо сделать эскизы реального объекта и РС. При этом размерам дать буквенные обозначения и задать размеры базовой РС. Здесь же необходимо указать ГУ, тип решаемой двумерной задачи и источники температурного поля.
- Записать фундаментальные и производные единицы размерностей, которые принимаются в задаче.
- Дать теоретическое решение поставленной задачи в пакете Mathcad. Здесь же необходимо дать расчет массовых сил, температурной нагрузки, нормальных и касательных давлений или перемещений.
- Дать общее имя рабочим файлам. Имя файла должно быть контекстное (например, *heat_ai.расширение*, где *heat* – тепловая задача, *ai* – начальные буквы имени студента).
- Целесообразно сделать предварительный прогноз результатов решения задачи.

Листы с исходными данными конкретного сценария разработки задачи являются подтверждением готовности студента к вычислительной работе на ПК. Каждый студент должен выполнить свой собственный вариант задачи, провести расчеты на ПК, написать отчет и защитить работу.

В отчете необходимо также отразить схему контура с нанесением узловых точек и точек, в которых расчетные значения представляют интерес в рассматриваемом случае. описание обработки данных в пакете Mathcad с воспроизведением графиков, полученных в ходе выполнения работы и расчетов величин, необходимых для теплового анализа объекта.

Отчет должен быть завершен выводами.

3. РАБОТА В CAE-СИСТЕМЕ ELCUT

Здесь приводится подробное описание создания и решения тепловой задачи в CAE – системе ELCUT.

3.1 СОЗДАНИЕ НОВОЙ ЗАДАЧИ ELCUT

Анализ поведения механической или иной технической системы производится по расчётной модели, которая должна быть предварительно подготовлена к вводу в систему.

В разделе меню системы ELCUT **Файл**, выбирается пункт **Создать…** При запуске пункта открывается шаблон **Создание нового документа**. Выбирается строка **Задача ELCUT**. В открывшемся шаблоне **Создание задачи** вводится **Имя файла задачи**: *Heat_ai*. По умолчанию предлагается путь, а именно:

Создать в папке *C:\Program Files\Elcut\Examples*.

С помощью кнопки **Далее** открывается шаблон **Ввод параметров новой задачи:**

- указывается **Тип задачи:** Heat Transfer,
- выбирается **Класс модели:**

Плоская

Осесимметричная

- выбирается уровень точности **Расчета:**

Прикидочный

Обычный

Прецизионный

- по умолчанию предлагается имя **Файла** расчётной схемы и закладываемых в расчёт физико-механических характеристик:

Геометрия: *Heat_ai.mod*

Свойства: *Heat_ai.dht*

С помощью кнопки **Далее** открывается шаблон **Выбор системы координат:**

- указываются **Единицы длины:**

Микроны

Миллиметры

Сантиметры

Метры

Километры

Дюймы

Футы

Мили

- выбирается **Система координат** в ELCUT:

Декартовы координаты

Полярные координаты

Кнопка **Готово** позволяет закончить выполнение первого этапа задачи, после чего в окне описания задачи появляется сообщение:

Heat_ai.pbm – **задача теплопередачи**

Геометрия: *Heat_ai.mod*

Физические свойства: *Heat_ai.dht*

Связи задач

3.2. ВВОД ГЕОМЕТРИИ

Построение геометрической модели начинается с выбора в пункте меню **Правка** пункта **Геометрическая модель** или двойного щелчка мыши по элементу *Heat_ai.dht* в окне описания задачи, после чего подтверждается необходимость создания файла *Heat_ai.dht* кнопкой **OK** и открывается окно модели.

Первое, что нужно сделать в окне работы с моделью, это указать размеры прямоугольника, в котором целиком поместится расчетная область, которая определяется геометрическими размерами элемента. Чтобы этот прямоугольник занял окно модели целиком:

1. На панели инструментов, нажмите кнопку **Крупнее**.

2. Переместите указатель мыши в точку с заданными координатами левого нижнего угла прямоугольника, следя за координатами в левом нижнем углу окна приложения ELCUT. Необязательно попасть точно в указанную точку, достаточно щелкнуть мышью поблизости от точки левее и ниже нее.

3. Щелкните левой кнопкой мыши и перетащите ее в точку правого верхнего угла прямоугольника.

Окно модели отразит сделанное Вами масштабирование.

Щелчок правой кнопкой мыши при выделенном элементе дерева модели в **Окне описания задачи** при выбору опции **Свойства задачи** открывает три закладки:

Общие

Координаты

Связь задач

Правая кнопка мыши в **Окне создания геометрической модели** открывает контекстное меню, позволяющее создать геометрическую модель. Выбираем опцию **Вставка вершин/ребер**. Построение геометрической модели может быть осуществлено также с помощью кнопочного меню или пункта основного меню **Правка\Добавить вершины…**

Рекомендуется начать работу с ввода координат вершин с использованием опции **Добавить вершины**. Затем следует соединить вершины прямыми и дугами окружности. В результате получаем контур РС.

Далее производится построение сетки конечных элементов (КЭ) и осуществляется контроль введенных геометрических характеристик. При этом используем пункты меню **Сетка привязки…** и **Построить сетку.**

При построении сетки КЭ первый шаг – автоматическое построение. После получения первого результата расчета можно приступить к редактированию сетки КЭ.

Опция **Свойства** открывает шаблон **Свойства выделенных объектов – Статистика:**

Блоки

Ребра

Вершины

Габариты.

3.3. ЗАДАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Физические параметры и ГУ задачи вводятся последовательно через

- метки блоков,
- метки ребер,
- метки вершин.

Физические параметры задаются для каждого блока отдельно. В случае однородности свойств имеем один блок. При необходимости учета неоднородности свойств элемента задаётся соответствующее число блоков. Метка блока создается через шаблон **Свойства выделенных объектов**: в поле **Метка** вводится метка блока – имя блока. Задание свойств объекта производится после создания соответствующей метки блока в открывающемся шаблоне **Свойства метки блока,** где необходимо задать **Теплопроводность** материалам объекта.

ГУ задаются с использованием меток ребер и вершин. Ниже даётся описание последовательности задания ГУ. Метка ребра создается через шаблон **Свойства выделенных объектов**: в поле **Метка** вводится метка ребра – имя ребра. Задание ГУ производится после создания соответствующих меток ребер в открывающемся шаблоне **Свойства метки ребра,** где необходимо задать **Общие** свойства, соответствующие ГУ для указанной метки:

Температура

Тепловой поток

Конвекция

Радиация

Равная температура

Задание ГУ может производиться с использованием меток вершин. Метка вершины создается в шаблоне **Свойства выделенных объектов**. После чего в шаблоне **Свойства метки вершины** возможно осуществить задание **Общих** свойств, соответствующих ГУ указанной метки:

Температура

Источник тепла

Теперь геометрическая и физическая идеализация задачи завершена. Перед запуском на счёт рекомендуется проверить исходные данные (правая кнопка мыши, **Свойства**) и записать их в предварительный отчёт.

При соответствии введенных исходных данных выбранной расчётной модели производится запуск на счёт: **Правка\Решить задачу.**

4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ СЧЕТА

После выбора опций **Правка/Анализ результатов** открывается окно результатов с картиной поля. Необходимые значения параметров выводятся на экран путем настройки **Картины поля**, которая может представлена следующими форматами графического представления:

Изотермы (масштаб);

Векторы (масштаб, шаг сетки):

Градиент температуры

Тепловой поток.

Параметры поля:

Температура

Градиент температур

Тепловой поток

Прочие величины – Проводимость.

Для каждой конкретной задачи разрабатывается план исследования, намечается перечень изучаемых параметров, и в связи с этим выводятся на экран или на печать необходимые значения и картины полей.

5. ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

5.1. **Задача Circle.**

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах. Решение задачи Дирихле для тонкого стального кольца с заданными постоянными значениями температуры на внутренней и внешней окружностях [6].

Дано:

Геометрические размеры кольца (рис. 5.1):

Внутренний радиус кольца: R1=20 мм;

Внешний радиус кольца: R2=40 мм;

Толщина: 1 мм.

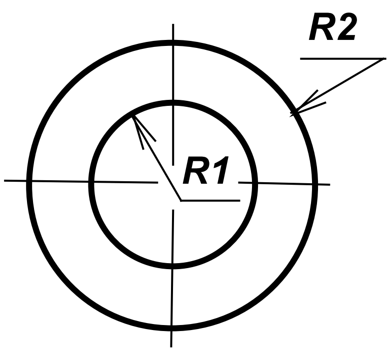


Рис. 5.1. Геометрические размеры кольца в задаче **Circle**

Свойства материала:

Коэффициент теплопроводности λ=45,4 Вт/(м*К)

Граничные условия:

Температура на внутренней окружности кольца постоянна и равна 20° С, на внешней окружности кольца также постоянна и равна 40° С.

Найти:

С помощью системы ELCUT решение уравнения Лапласа в области, ограниченной окружностью K2 радиуса R2=40 мм и окружностью K1 радиуса R1=20 мм (кольцо), принимающее следующие граничные значения $T\big/_{K1}=20\,°C$, $T\big/_{K2}=40\,°C$.

Тип решаемой задачи:

Расчет плоской задачи.

Условие:

Материал кольца – ортотропный с постоянной теплопроводностью.

Решение:

См. приложение П 1.

5.2. **Задача Stenka.**

Рассмотреть решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной неограниченной стенки толщиной 10 мм (рис. 5.2) при ГУ 1 рода (при $x=0$ $T=T1$, при $x=L$ $T=T2$) [7].

Дано:

Геометрический размер стенки (рис. 5.2):

Толщина: L=10 мм.

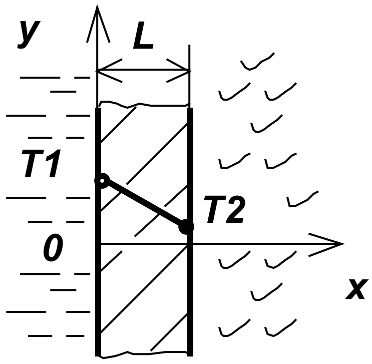


Рис. 5.2. Процесс передачи теплоты через плоскую стенку теплопроводностью в задаче **Stenka**

Свойства материала:

Коэффициент теплопроводности λ=45,4 Вт/(м*К)

Граничные условия:

Температура на внутренней поверхности стенки T1 постоянна и равна 100° С, на внешней поверхности стенки T2 постоянна и равна 20° С.

Найти:

С помощью системы ELCUT распределение одномерного температурного поля, когда температура зависит только от одной координаты при постоянном коэффициенте теплопроводности λ для плоской стенки для случая ГУ 1 рода.

Тип решаемой задачи:

Расчет плоской задачи.

Условие:

Материал стенки – ортотропный с постоянной теплопроводностью.

Решение:

См. приложение П 2.

5.3. **Задача Stenka1.**

Рассмотреть решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной неограниченной стенки толщиной 10 мм (рис. 5.3) при ГУ 3 рода – конвективный теплообмен):

при $x=0$ $$\lambda \frac{dT}{dx} + \alpha_1 \left(T_{c1} - T_{x=0} \right) = 0$$

при $x=L$ $$-\lambda \frac{dT}{dx} + \alpha_2 \left(T_{x=L} - T_{c2} \right) = 0,$$

где T_{c1} и T_{c2} –соответственно температуры с левой и правой сторон пластины, α_1 и α_2 - коэффициенты теплообмена поверхностей пластины [7].

Дано:

Геометрический размер стенки (рис. 5.3):

Толщина: L=10 мм.

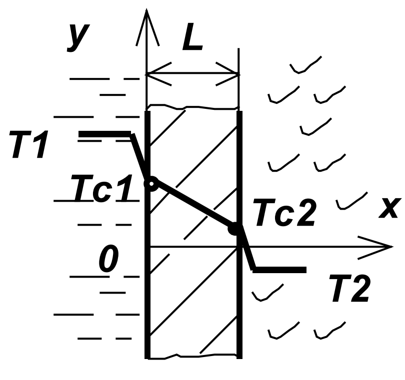


Рис. 5.3. Процесс передачи теплоты через плоскую стенку теплопроводностью в задаче **Stenka1**

Свойства материала:

Коэффициент теплопроводности λ=45,4 Вт/(м*К),

коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке α_1 = 240 Вт/(м*К),

коэффициент теплоотдачи от стенки к газу α_2 = 12 Вт/(м*К)

Граничные условия:

Температура жидкости Т1 постоянна и равна 100° С, температура наружного газа Т2 постоянна и равна 20° С. ГУ 3 рода – конвективный теплообмен пластины с жидкостью (слева) и газом (справа).

Найти:

С помощью системы ELCUT распределение одномерного температурного поля, когда температура зависит только от одной координаты при постоянном коэффициенте теплопроводности λ для плоской стенки для случая ГУ 3 рода.

Тип решаемой задачи:

Расчет плоской задачи.

Условие:

Материал стенки – ортотропный с постоянной теплопроводностью.

Решение:

См. приложение П 3.

5.4. **Задача Stenka2.**

Рассмотреть решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной неограниченной стенки толщиной 10 мм (рис. 5.4) при смешанных ГУ 2 рода и 1 рода:

при x=0 $q = -\lambda \frac{dT}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)}\left(T_{c1} - T_{c2}\right),$

где q - -поток тепла через стенку

при x=L T=$T2$).

Дано:

Геометрический размер стенки (рис. 5.4):

Толщина: L=10 мм.

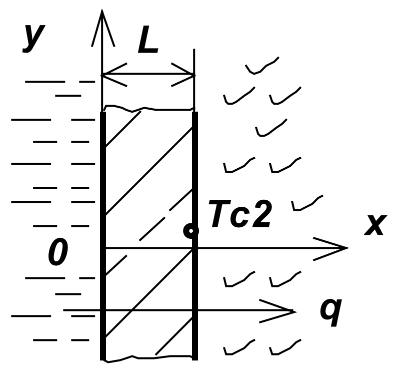


Рис. 5.4. Процесс передачи теплоты через плоскую стенку теплопроводностью в задаче **Stenka2**

Свойства материала:

Коэффициент теплопроводности λ=45,4 Вт/(м*К)

коэффициент теплоотдачи от жидкости к стенке α_1 = 240 Вт/(м*К),

коэффициент теплоотдачи от стенки к газу α_2 = 12 Вт/(м*К)

Граничные условия:

На внутренней (левой) поверхности стенки задан тепловой поток q=911,99 Вт/м^2(ГУ 2 рода), на внешней поверхности стенки температура Т2 постоянна и равна 96° С (ГУ 1 рода).

Найти:

С помощью системы ELCUT распределение одномерного температурного поля, когда температура зависит только от одной координаты при постоянном коэффициенте теплопроводности λ для плоской стенки при смешанных ГУ 2 и 1 родов.

Тип решаемой задачи:

Расчет плоской задачи.

Условие:

Материал стенки – ортотропный с постоянной теплопроводностью.

Решение:

См. приложение П 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мишичев И.А., Мишичев А.И. Система автоматизированных расчетов «Звезда». /Методические указания к изучению курса САПР. – Астрахань, АГТУ, 1997. – 32 с.

2. Мишичев А.И. Комплекс лабораторных работ по проведению расчетов на ПЭВМ методом конечных элементов в вычислительной среде САПР «Звезда». Часть 1. Тестовые задачи начального уровня. /Методические указания к изучению курса САПР. – Астрахань, АГТУ, 1997. – 22 с.

3. Мишичев А.И., Мартьянова А.Е. Комплекс лабораторных работ по проведению расчетов на ПЭВМ методом конечных элементов в вычислительной среде САПР «Звезда». Часть 2. Обработка результатов расчетов с использованием пакета «Mathcad». /Методические указания к изучению курса «Основы САПР» для студентов механических специальностей. – Астрахань, АГТУ, 2000. – 38 с.

4. Мишичев А.И., Мартьянова А.Е. Комплекс лабораторных работ по проведению расчетов на ПЭВМ методом конечных элементов в вычислительной среде САПР «Звезда». Часть 3. Осесимметричная задача. /Методические указания к изучению курса «Основы САПР» для студентов механических специальностей. – Астрахань, АГТУ, 2000. – 61 с.

5. Мишичев А.И., Мартьянова А.Е., Зимина Г.В. Решение задач упругости методом конечных элементов в CAE – системе ELCUT /Методические указания по изучению курсов САПР для студентов. механических специальностей. – Астр.: изд-во АГТУ, 2000. – 17 с.

6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.

7. Лыков А.В. Тепломассобмен: (Справочник). 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Решение задачи Дирихле для тонкого кольца с постоянными значениями на внутренней и внешней окружностях (граничные условия 1 рода)

Выполнили:
ст-ты гр. МА-31
Фролов Д. И.
Абдрахманова И. З.

Дано:

$R1 := 20 \cdot mm$	Радиус внутренней окружности кольца
$R2 := 40 \cdot mm$	Радиус внешней окружности кольца
$T1 := 293 \cdot K$	Температура на внутренней окружности кольца
$T2 := 313 \cdot K$	Температура на внешней окружности кольца

Коэффициент теплопроводности стали =45,4 Вт/(м*К)

Найти:
и сравнить с аналитическим решение численнным методом с помощью CAE-системы ELCUT решение уравнения Лапласа в области, ограниченной окружностью К2 m и окружностью К1 (кольцо), принимающее граничные условия 1 рода.

Решение:

Радиус кольца r принимает значения

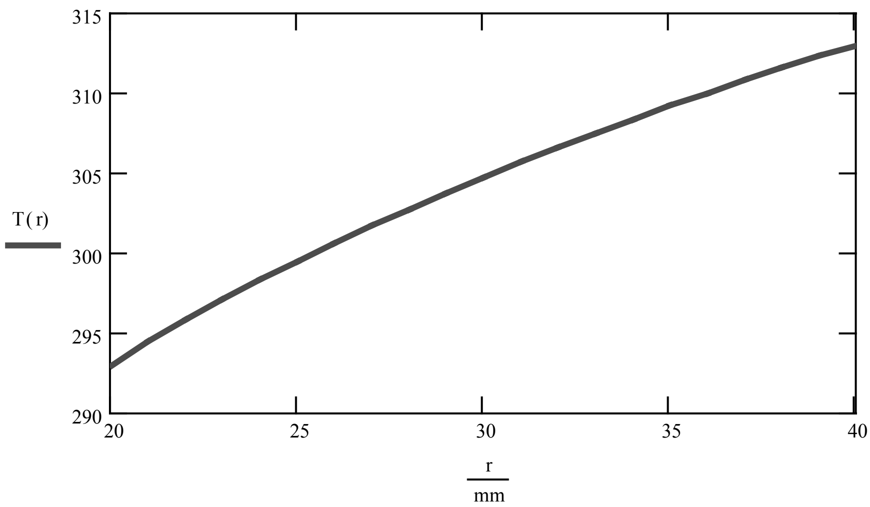
$r := R1, R1 + 1 \cdot mm .. R2$

Решение уравнения Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид:

$$T(r) := T1 + \frac{\ln\left(\frac{r}{R1}\right)}{\ln\left(\frac{R2}{R1}\right)}\cdot(T2 - T1)$$

$T(20\cdot mm) = 293K$ $\quad$ $T(40\cdot mm) = 313K$

Графическое изображение решения уравнения Лапласа:



Сравнение численного и аналитического решений:

Solv Elcut		Solv Math
x = 25 мм	x = 0 мм	$T(25\cdot mm) = 299.439K$
y = 0 мм	y = 25 мм	
r = 25 мм	r = 25 мм	
q = 0 град	q = 90 град	
Температура T = 299.42 K	Температура T = 299.45 K	
Градиент G = 1157.2 K/м	Градиент G = 1151 K/м	
Тепловой поток F = 52538 Вт/м2	Тепловой поток F = 52257 Вт/м2	
Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	

$$\delta\_25\_0 := \frac{299.42K - T(25\cdot mm)}{T(25\cdot mm)} \qquad \delta\_0\_25 := \frac{299.45K - T(25\cdot mm)}{T(25\cdot mm)}$$

$$\delta\_25\_0 = -6.199\times 10^{-3}\,\% \qquad \delta\_0\_25 = 3.82\times 10^{-3}\,\%$$

Solv Math

$T(30 \cdot mm) = 304.699K$

Solv Elcut

x = 0 мм
y = 30 мм
r = 30 мм
q = 90 град
Температура T = 304.67 K
Градиент G = 965.11 K/м
Тепловой поток F = 43816 Вт/м2
Теплопроводность l = 45.4 Вт/К•м

$$\delta\_0\_30 := \frac{304.67K - T(30 \cdot mm)}{T(30 \cdot mm)}$$

$$\delta\_0\_30 = -9.6 \times 10^{-3}\,\%$$

Solv Math

$T(35 \cdot mm) = 309.147K$

Solv Elcut

x = 0 мм
y = 35 мм
r = 35 мм
q = 90 град
Температура T = 309.17 K
Градиент G = 826.65 K/м
Тепловой поток F = 37530 Вт/м2
Теплопроводность l = 45.4 Вт/К•м

$$\delta\_0\_35 := \frac{309.17K - T(35 \cdot mm)}{T(35 \cdot mm)}$$

$$\delta\_0\_35 = 7.408 \times 10^{-3}\,\%$$

П.2. Решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной стенки при граничных условиях 1 рода

Выполнили:
ст-ты гр. МА-31
Фролов Д. И.
Абдрахманова И. З.

Дано:

$L := 10\cdot mm$ Толщина стенки

$T1 := 373\cdot K$ Температура на внешней стороне стенки

$T2 := 293\cdot K$ Температура на внутренней стороне стенки

Коэффициент теплопроводности стали =45,4 Вт/(м*К)

Найти:
и сравнить с аналитическим решение численнным методом с помощью CAE-системы ELCUT распределение одномерного температурного поля для плоской стенки для случая граничных условияй 1 рода

Решение:

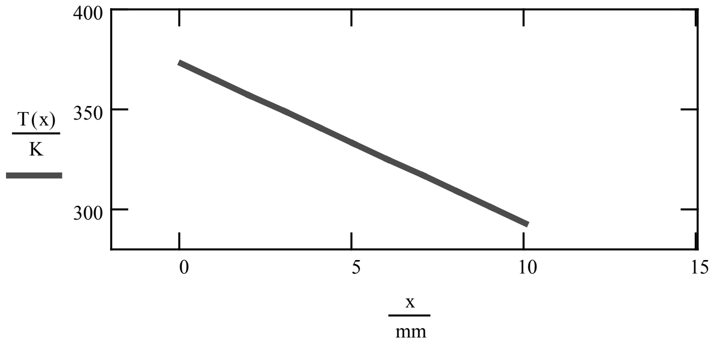
Текущая координата принимает значения

$x := 0\cdot mm, 1\cdot mm .. L$

Решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая имеет вид:

$$T(x) := T1 - \frac{(T1 - T2)\cdot x}{L}$$

Графическое изображение решения уравнения теплопроводности:



Solv Elcut	x = 1 мм y = 0 мм r = 1 мм q = 0 град Температура T = 365 K Градиент G = 8000 K/м Тепловой поток F = 363200 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	x = 2 мм y = 0 мм r = 2 мм q = 0 град Температура T = 357 K Градиент G = 8000 K/м Тепловой поток F = 363200 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м
Solv Math	$T(1\cdot mm) = 365K$	$T(2\cdot mm) = 357K$
Solv Elcut	x = 5 мм y = 0 мм r = 5 мм q = 0 град Температура T = 333 K Градиент G = 8000 K/м Тепловой поток F = 363200 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	x = 9 мм y = 0 мм r = 9 мм q = 0 град Температура T = 301 K Градиент G = 8000 K/м Тепловой поток F = 363200 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м
Solv Math	$T(5\cdot mm) = 333K$	$T(9\cdot mm) = 301K$

П.3. Решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной стенки при граничных условиях 3 рода

Выполнили:
ст-ты гр. МА-31
Фролов Д. И.
Абдрахманова И. З.

Дано:

$L := 10 \cdot mm$ Толщина стенки

$Tc1 := 373 \cdot K$ Температура жидкости

$Tc2 := 293 \cdot K$ Температура газа

$\lambda := 45.4 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ Коэффициент теплопроводности стали

$\alpha 1 := 240 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$

$\alpha 2 := 12 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$

Найти:
и сравнить с аналитическим решение численнным методом с помощью CAE-системы ELCUT распределение одномерного температурного поля для плоской стенки для случая граничных условияй 1 рода

Решение:

Текущая координата принимает значения

$x := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. L$

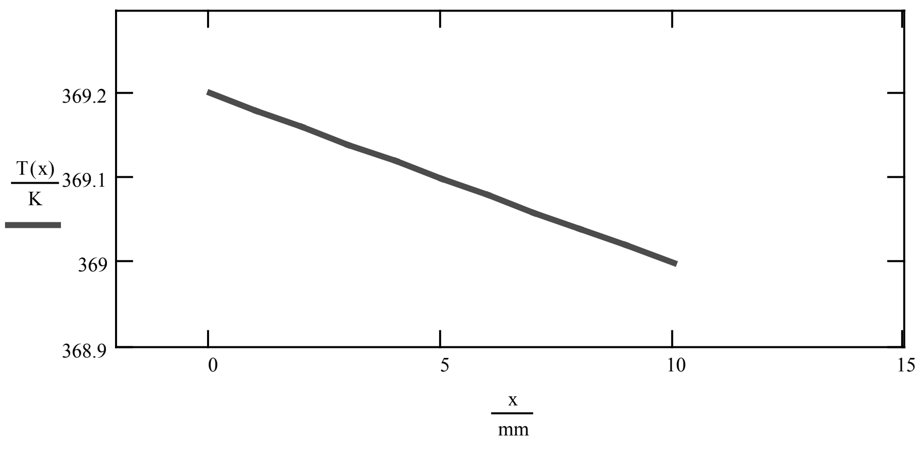
Решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая имеет вид:

$$T(x) := Tc1 - \frac{Tc1 - Tc2}{\frac{1}{\alpha 1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha 2}} \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha 1} \right)$$

$T(0 \cdot mm) = 369.2K$

$T(10 \cdot mm) = 368.999K$

Графическое изображение решения уравнения теплопроводности:



ГУ 3 рода - конвективный теплообмен

Solv Elcut	Solv Math
x = 1 мм y = 0 мм r = 1 мм q = 0 град Температура T = 369.18 K Градиент G = 20.088 K/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	$T(1 \cdot mm) = 369.18K$
x = 2 мм y = 0 мм r = 2 мм q = 0 град Температура T = 369.16 K Градиент G = 20.088 K/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	$T(2 \cdot mm) = 369.16K$
x = 5 мм y = 0 мм r = 5 мм q = 0 град Температура T = 369.1 K Градиент G = 20.088 K/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	$T(5 \cdot mm) = 369.1K$
x = 9 мм y = 0 мм r = 9 мм q = 0 град Температура T = 369.02 K Градиент G = 20.088 K/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/K•м	$T(9 \cdot mm) = 369.019K$

П.4. Решение задачи распределения одномерного температурного поля для плоской стальной стенки при граничных условиях 2 рода и 1 рода

Выполнили:
ст-ты гр. МА-31
Фролов Д. И.
Абдрахманова И. З.

Дано:

$L := 10 \cdot mm$ Толщина стенки

$Tc1 := 373 \cdot K$ Температура жидкости

$Tc2 := 293 \cdot K$ Температура газа

$\lambda := 45.4 \cdot \frac{W}{m \cdot K}$ Коэффициент теплопроводности стали

$\alpha 1 := 240 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$ Коэффициент теплообмена поверхности стенки с жидкостью

$\alpha 2 := 12 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K}$ Коэффициент теплообмена поверхности стенки с газом

Найти:
и сравнить с аналитическим решение численнным методом с помощью CAE-системы ELCUT распределение одномерного температурного поля для плоской стенки для случая граничных условияй 2 рода и 1 рода

Решение:

Текущая координата принимает значения

$x := 0 \cdot mm, 1 \cdot mm .. L$

Решение уравнения теплопроводности для рассматриваемого случая имеет вид:

$$T(x) := Tc1 - \frac{Tc1 - Tc2}{\frac{1}{\alpha 1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha 2}} \cdot \left(\frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\alpha 1} \right)$$

Поток тепла через плоскую стенку:

$$q := \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha 1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha 2} \right)} \cdot (Tc1 - Tc2)$$

$T(0 \cdot mm) = 369.2K$

$T(10 \cdot mm) = 368.999K$

$q = 911.99 \frac{W}{m^2}$

ГУ 2 и 1 рода: левая граница - тепловой поток через стенку, правая граница - температура поверхности стенки

Solv Elcut	x = 0 мм y = 0 мм r = 0 мм q = 0 град Температура T = 369.2 K Градиент G = 20.088 К/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/К•м	x = 10 мм y = 0 мм r = 10 мм q = 0 град Температура T = 369 K Градиент G = 20.088 К/м Тепловой поток F = 911.99 Вт/м2 Теплопроводность l = 45.4 Вт/К•м
Solv Math	$T(0 \cdot mm) = 369.2K$	$T(10 \cdot mm) = 368.999K$