

Министерство образования РФ
Тамбовский государственный технический университет

**КУРСОВАЯ РАБОТА
ПО ТЕПЛОПЕРЕДАЧЕ
С ПРИМЕРАМИ РАСЧЕТА
И ОФОРМЛЕНИЯ**

Методическая разработка
для студентов третьего курса специальности 101600

Тамбов 2003

УДК 621.1.016(076)

ББК 3311я73-5

Утверждено Редакционно-издательским советом университета

Составитель
к.т.н., профессор В.И. Ляшков

Рецензент
к.т.н., доцент С.А Набатов

Курсовая работа по теплопередаче с примерами расчета и оформления:
метод. разработка /Сост. В.И. Ляшков. -Тамбов: Тамб. гос. тех. ун-т, 2003. -32
с

Методическая разработка составлена в соответствии с программой и учебным планом дисциплины "Теоретические основы теплотехники" и содержит 3 индивидуальных задания по расчетам стационарных и нестационарных температурных полей и тепловому расчету теплообменных аппаратов, а также примеры расчета и оформления работы. Приводится список рекомендуемой литературы и необходимые справочные данные.

© Тамбовский государственный
технический университет

Тамбов 2003

ВВЕДЕНИЕ

Только широкое обновление средств и методов производства, использование высокопроизводительных энерго- и ресурсосберегающих технологий и оборудования способно обеспечить поступательное развитие отечественной экономики, производство конкурентоспособной на мировом рынке продукции и, как следствие, укрепление международного престижа нашей страны. Новые технологии и промышленное оборудование должны отличаться широким применением приемов регенерации и утилизации тепла, трансформации различных видов энергии друг в друга, использованием наиболее интенсивных и экономичных процессов, обеспечивающих необходимый теплообмен, наличием оптимально подобранных теплоносителей и тепловой изоляции и т.п.

Тепловые процессы получили самое широкое распространение в технике, и сегодня очень трудно назвать оборудование или технологию, где бы тепловая энергия не играла определяющей роли. Тепло используется как для выработки механической и электрической энергии, так и для проведения и интенсификации технологических процессов. Широкое распространение нашли также холодильные установки умеренного и глубокого охлаждения, установки для разделения воздуха, газотурбинные установки для дожигания вредных отходов и другое оборудование. Энергетическая эффективность и степень совершенства такого оборудования определяется тем, насколько широко и правильно были проведены различные тепловые расчеты еще на этапе проектирования и доводки таких установок, их основных частей и агрегатов.

Теплопередача, а точнее - теория тепло- и массообмена, вооружает нас инженерными методиками расчета различных процессов теплообмена, позволяющими рассчитывать температурные поля и такие важнейшие характеристики процессов теплообмена как передаваемый тепловой поток, плотность теплового потока, температурные градиенты, температурные напоры и др. Наряду с аналитическими решениями многих задач для тел простой геометрической формы, здесь широко применяются методы численного решения задач теплопроводности, конвективного и лучистого теплообмена, которые с развитием компьютерной техники стали все больше принимать первостепенное значение.

Поэтому твердое знание основ теории тепло- и массообмена, умение применить эти знания для решения практических задач является совершенно необходимым для специалистов, связанных с проектированием, доводкой, эксплуатацией и автоматизацией современных технологических процессов и оборудования, т.е. практически для всех инженерно-технических работников, не говоря уже о тех людях, которые выбрали благородную, интересную и очень важную профессию – обеспечивать теплом и светом жизнь и труд других людей в нашей стране.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Курсовая работа по теплопередаче выполняется студентами с целью закрепления и углубления учебного материала, изучаемого во второй части учебной дисциплины «Теоретические основы теплотехники». Выполнение работы прививает навыки практического применения основных методик анализа температурных полей и тепловых потоков при стационарной и нестационарной теплопроводности, расширяет знания о численных методах решения тепловых задач. Она знакомит студента с использованием различных критериальных уравнений для расчетов интенсивности теплоотдачи, позволяет на конкретном примере освоить методику теплового расчета самых распространенных теплотехнических устройств – рекуперативных теплообменников. Работа включает решение трех отдельных задач и выполняется в течение всего учебного семестра. Выполнение ее является обязательным условием положительной аттестации студента на зачетах.

Индивидуальное задание выдается каждому студенту в начале семестра в виде простого цифрового кода. При этом исходные данные для расчета выбираются из соответствующей таблицы по значениям первой и последней цифрам этого кода. Цифровой код един для всех трех задач.

Чтобы успешно подготовиться и выполнить курсовую работу по теплопередаче необходимо:

1. Внимательно ознакомиться с содержанием задач, выписать их для себя, вставляя в текст численные значения исходных данных из соответствующих таблиц.

2. По конспекту лекций изучить теоретический материал по соответствующим темам, обращая особое внимание на методики практических расчетов. Подобрать по списку рекомендованной литературы и получить в библиотеке университета один из учебников или учебное пособие «Теоретические основы теплотехники» [1], подробно ознакомиться по ним с соответствующим теоретическим материалом.

3. Провести приближенный расчет, соблюдая последовательность расчетов такой же, как она дается в приведенных примерах.

4. Изучить основы работы с пакетом Elcut [2], приведенные в приложении настоящего пособия.

5. В компьютерном классе кафедры гидравлики и теплотехники с помощью пакета Elcut выполнить необходимые расчеты процессов теплопроводности. По специальным программам, разработанным на кафедре, проверить правильность своих расчетов теплообменника. Если погрешности выполненных расчетов не будут превышать предельных уровней, программа зашифрует это в специальном зашифрованном файле.

6. Оформить отчет по курсовой работе в соответствии с требованиями стандарта ТГТУ [3], ориентируясь при этом на приведенные в настоящей

методической разработке примеры. Краткий перечень основных требований к оформлению отчета, вытекающих из [3] приведен в методической разработке [4].

7. Защитить работу перед комиссией из двух – трех преподавателей выпускающей кафедры.

Если в процессе работы над заданиями или при расчетах возникают вопросы или неясности, студенту необходимо обращаться к преподавателю за консультациями, которые организуются кафедрой еженедельно по специальному расписанию.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ И ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ ДЛЯ РАСЧЕТОВ

Задача 1

Исследование стационарных температурных полей

Рассчитать стационарное температурное поле в неограниченном по длине теле сложной геометрической формы при граничных условиях первого рода на наружных и внутренних поверхностях. Геометрические размеры поперечного сечения и температуры t_n и t_b на наружной и внутренней поверхностях принимать по табл. 1 в соответствии с номером варианта, задаваемым преподавателем. Приближенный расчет (с крупной сеткой, дающей 5 – 15 узлов) выполнить методом релаксации [1] вручную (с расчетами на калькуляторе). Точный расчет выполнить на ПК с помощью интегрированной диалоговой системы *ELCUT*. С помощью этой же системы провести расчет температурного поля при условии, что с наружной стороны исследуемого сечения реализуется ГУ-3, т.е. теплообмен осуществляется теплоотдачей с коэффициентом α_n , а температура окружающего воздуха равна t_b . Результаты расчетов для трех-четырех характерных точек сечения представить в виде таблицы, сопоставить их и сделать соответствующие выводы из этого сопоставления.

Таблица 1

Исходные данные к задаче 1

Первая цифра номера варианта	Номер схемы поперечного сечения	t_n , °C	α_n , Вт/(м ² ·К)	Вторая цифра номера варианта	t_b , °C	$t_{воз}$, °C
1	1	30	10	1	1600	16
2	2	35	12	2	1500	18
3	3	40	14	3	1400	20
4	4	45	16	4	1300	22
5	5	50	18	5	1200	24
6	6	55	20	6	1100	26

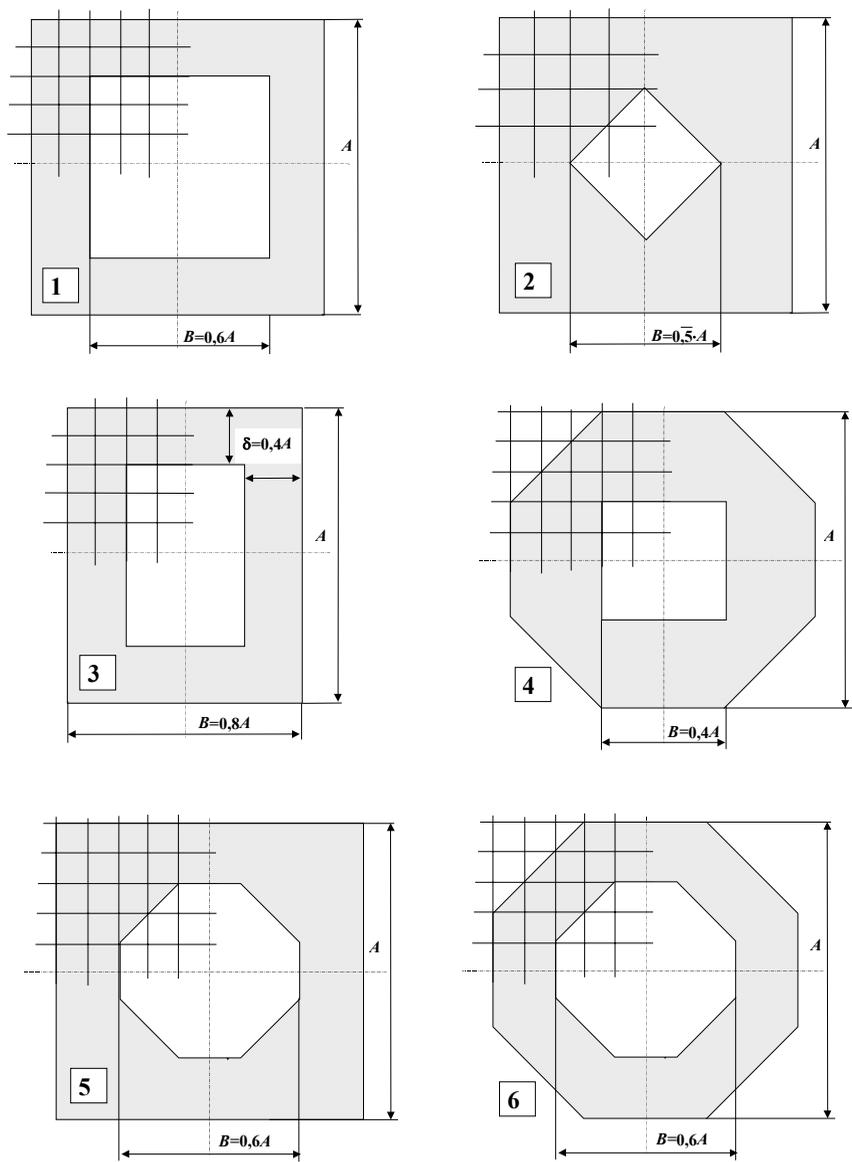


Рис. 1. Схемы поперечных сечений к задаче 1

Задача 2

Исследование нестационарных температурных полей

Плоская пластина из _____ с размерами $950 \times 850 \times \delta$ мм и равномерно распределенной начальной температурой $t_0 = ___ \text{ }^\circ\text{C}$ быстро и плотно прижимается к двум плоским поверхностям с постоянными температурами $t_1 = ___$ и $t_2 = ___ \text{ }^\circ\text{C}$ (см рис. 2). Рассчитать, как распределится температура по толщине пластины через $\tau = ___ \text{ с}$ после начала процесса. Приближенный расчет выполнить методом сеток [1] вручную (с помощью калькулятора), точный расчет – на ПК с помощью пакета *ELCUT*.

Исходные данные принимать по табл.2, теплофизические свойства материалов – по табл. 1П приложения.

С помощью пакета *ELCUT* определить также, как изменится это температурное поле, если толщину пластины увеличить на 5 мм? Как изменится распределение температуры, если теплообмен с холодной поверхности плиты будет осуществляться конвекцией с коэффициентом теплоотдачи $\alpha = ___ \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ в среду с температурой $t_{\text{ж}} = ___ \text{ }^\circ\text{C}$.

Во всех случаях считать, что тепловой контакт между поверхностями идеальный, т. е. контактные термические сопротивления отсутствуют.

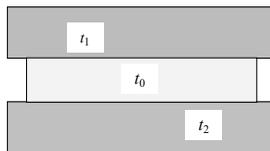


Рис. 2 Расположения исследуемой пластины

Таблица 2

Исходные данные к задаче2

Первая цифра номера варианта	Материал	δ	τ	α	Вторая цифра номера варианта	t_0	t_1	t_2	$t_{\text{ж}}$
1	Резина	30	350	20	1	10	90	30	20
2	Оргстекло	25	250	25	2	40	110	70	15
3	Текстолит	35	450	15	3	50	70	110	18
4	Фанера	40	800	10	4	60	90	40	22
5	Стекло	15	25	23	5	70	30	100	17
6	Гипс	35	190	13	6	80	40	60	10
7	Сосна	42	850	10	7	90	50	30	15

Задача 3

Тепловой расчет теплообменного аппарата

Выполнить конструктивный тепловой расчет рекуперативного теплообменного аппарата, схема и основные исходные данные для расчета которого заданы в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные к задаче 3

Первая цифра номера варианта	Номер задания по методической разработке [5]	Вторая цифра номера варианта	Номер варианта этого задания по методической разработке [5]
1	1	1	2
2	2	2	4
3	3	3	6
4	6	4	8
5	7	5	10
6	9	6	12
7	13	7	14

Литература

1. Ляшков В.И. Теоретические основы теплотехники / В.И. Ляшков. -М., 2002. – 260 с.
2. ELCUT: Руководство пользователя. - СПб.: 2000. -185 с.
3. Проекты (работы) дипломные и курсовые. Правила оформления: СПб ТГТУ 07-97. – Тамбов: ТГТУ, 2000. - 40 с.
4. Ляшков В.И. Курсовая работа по термодинамике с примерами расчета и оформления / В.И. Ляшков. – Тамбов: ТГТУ, 2003. -19 с.
5. Ляшков В.И. Тепловой расчет теплообменных аппаратов / В.И. Ляшков, И.А. Черепенников. Тамбов: ТИХМ, 1991. - 48 с.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ И ОФОРМЛЕНИЯ*

Пример решения задачи 1

Задача 1. Рассчитать стационарное температурное поле в неограниченном по длине теле сложной геометрической формы (нагревательной печи) при граничных условиях первого рода на наружных и внутренних поверхностях. Геометрические размеры поперечного сечения принять по табл. 1 схема 2, а температуры на наружной и внутренней поверхностях $t_n=0$ °С и $t_b=2000$ °С, соответственно. Приближенный расчет выполнить методом релаксации вручную, точный расчет выполнить на ПК с помощью интегрированной диалоговой системы *Elcut*. С помощью этой же системы провести расчет температурного поля при условии, что с наружной стороны исследуемого сечения теплообмен осуществляется теплоотдачей с коэффициентом $\alpha_n=17$ Вт/(м²К), а температура окружающего воздуха равна $t_b=23$ °С. Результаты расчетов для нескольких характерных точек сечения представить в виде таблицы, сопоставить их и сделать соответствующие выводы из этого сопоставления.

1.1 Расчет стационарного двумерного температурного поля методом релаксации.

Ввиду симметрии заданного геометрического сечения в нашем случае достаточно рассчитать температурное поле в одной восьмой сечения (например, в заштрихованном участке на рис. 1).

На рис. 2 представлен выделенный участок сечения с прилегающей к нему зоной и с нанесенной прямоугольной сеткой с постоянным в обоих направлениях шагом $h=A/8$. Отдельные узлы сетки пронумерованы двойными индексами. При этом первая цифра индекса – это номер узла по оси абсцисс, а вторая – по оси ординат.

Запишем граничные условия первого рода на наружных и внутренних поверхностях выделенного участка

$$t_{-1,0} = t_{0,0} = t_{1,0} = t_{2,0} = t_{3,0} = t_{4,0} = t_{4,1} = t_{4,2} = t_{4,3} = 0^{\circ}\text{C} \quad (1)$$

$$t_{-1,3} = t_{0,2} = t_{1,3} = 2000^{\circ}\text{C} \quad (2)$$

Из условий симметрии имеем:

$$t_{-1,1} = t_{1,1}, \quad (3)$$

$$t_{1,2} = t_{2,3}, \quad (4)$$

$$t_{2,1} = t_{3,2}, \quad (5)$$

а тепловые потоки q через грани $(0,0) - (0,2)$ и $(4,0) - (1,3)$ отсутствуют.

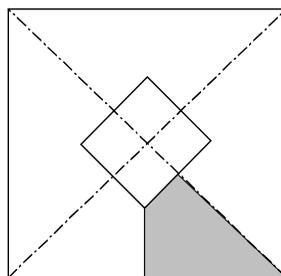


Рис. 1 Поперечное сечение печи по схеме 2

* В этом разделе принята собственная нумерация рисунков, формул, таблиц и литературных источников

Для сетки с равномерным шагом алгебраический аналог дифференциального уравнения теплопроводности для любого узла представляется следующим конечно – разностным уравнением [1], [2] (при $\lambda = \text{const}$):

$$t_{i,j} = 1/4(t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1}), \quad (6)$$

где i и j – индексы расчетного узла. Из формулы видно, что температуры в узлах не зависят от величины коэффициента теплопроводности и определяются лишь величиной шага сетки. В соответствии с приведенной формулой (6) для температур в узлах, лежащих на осях симметрии, можем записать

$$t_{0,1} = \frac{1}{4}(t_{-1,1} + t_{1,1} + t_{0,0} + t_{0,2}) = \frac{1}{4}(2t_{1,1} + 0 + 2000) = \frac{1}{2}(t_{1,1} + 1000), \quad (7)$$

$$t_{2,2} = \frac{1}{4}(t_{1,2} + t_{3,2} + t_{2,1} + t_{2,3}) = \frac{1}{2}(t_{1,2} + t_{2,1}), \quad (8)$$

$$t_{3,1} = \frac{1}{4}(t_{1,1} + t_{4,1} + t_{3,0} + t_{3,2}) = \frac{1}{4}(2t_{2,1} + 0 + 0) = \frac{1}{2}t_{2,1}, \quad (9)$$

откуда видно, что эти температуры однозначно определяются значениями температур в близлежащих внутренних узлах сетки $t_{1,1}$, $t_{1,2}$ и $t_{2,1}$.

Зададимся в первом приближении этими температурами, приняв $t_{1,1} = 600$ °С, $t_{1,2} = 400$ °С и $t_{2,1} = 1300$ °С. Тогда по приведенным формулам рассчитываем:

$$t_{0,1} = \frac{1}{2}(t_{1,1} + 1000) = \frac{1}{2}(600 + 1000) = 800 \text{ °С}$$

$$t_{2,2} = \frac{1}{2}(t_{1,2} + t_{2,1}) = \frac{1}{2}(400 + 1300) = 850 \text{ °С},$$

$$t_{3,1} = \frac{1}{2}t_{2,1} = \frac{1}{2} \cdot 1300 = 650 \text{ °С}.$$

По формуле [1]

$$R_{i,j} = -4 t_{i,j} + t_{i-1,j} + t_{i+1,j} + t_{i,j-1} + t_{i,j+1} \quad (10)$$

рассчитаем "остатки" в каждом внутреннем узле в первом приближении:

$$R_{1,1} = -4t_{1,1} + t_{0,1} + t_{2,1} + t_{1,0} + t_{1,2} = -4 \cdot 600 + 800 + 0 + 1300 = 100 \text{ °С},$$

$$R_{1,2} = -4t_{1,2} + t_{2,2} + t_{0,1} + t_{1,3} + t_{1,1} = -4 \cdot 400 + 850 + 2000 + 2000 + 600 = 250 \text{ °С},$$

$$R_{2,2} = -4t_{2,2} + t_{1,2} + t_{3,2} + t_{2,1} + t_{2,3} = -4 \cdot 850 + 400 + 400 + 1300 = 0 \text{ °С}.$$

При расчете $R_{2,3}$ используем соотношения (4) и (5):

$$R_{2,1} = -4t_{2,1} + t_{1,1} + t_{3,1} + t_{2,2} + t_{2,0} = -4 \cdot 1300 + 600 + 650 + 850 + 0 = 50 \text{ °С}.$$

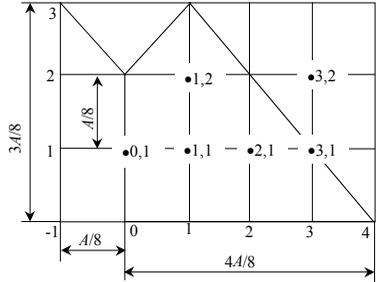


Рис.2 Расчетная сетка для выделенного сечения

Легко убедиться, что "остатки", определяемые по формуле (10) в точках (0,1) и (3,1), равны тождественно нулю, а температура в этих точках согласно (7) и (9) зависят от температуры только одного узла области решения. Начальные температуры этих точек нужны для нахождения "остатков" соседних узлов при начальном приближении.

Температуры и "остатки" в каждом узле записываем в сводную таблицу 1. Туда же будем записывать температуры и "остатки" при последующих приближениях.

В соответствии с основным правилом релаксации при последующем приближении следовало бы свести к нулю наибольший по абсолютной величине "остаток" начального приближения, то есть $R_{3,3}=250$ °C. Но для ускорения сходимости релаксационного процесса существует несколько специальных приемов [2], [3], применение которых мы и продемонстрируем при решении нашей задачи.

Если сумма "остатков" начального приближения существенно отличается от нуля, то при первом приближении их сумму целесообразно получить нулевой. В нашем случае:

$$\Sigma R_{i,j} = R_{1,1} + R_{1,2} + R_{2,2} + R_{2,1} = 100 + 250 + 0 + 50 = 400^{\circ}\text{C},$$

поэтому воспользуемся так называемой блоковой релаксацией и получим "остатки" с нулевой суммой (все узлы, где рассматриваются "остатки", образуют блок). Определим, насколько изменятся "остатки" в узлах (1,1), (1,2), (2,2), (2,2), если температура в каждом из них увеличится на Δ . При этом следует учесть соотношения (4) - (9). Так для узла (1,1), учитывая, что $t_{2,0}=0$ °C, можно записать:

$$\begin{aligned} R_{1,1} + \Delta R_{1,1} &= -4(t_{1,1} + \Delta) + (t_{0,1} + \Delta) + (t_{2,1} + \Delta) + t_{1,0} + (t_{1,2} + \Delta) = \\ &= -4t_{1,1} - 4\Delta + \left[\frac{1}{2}(t_{1,1} + 1000 + \Delta) \right] + t_{2,2} + \Delta + t_{2,0} + t_{1,2} + \Delta = \\ &= R_{1,1} - 4\Delta + 0,5\Delta + \Delta + \Delta = R_{1,1} - 1,5\Delta, \end{aligned}$$

откуда

$$\Delta R_{1,1} = -1,5\Delta.$$

Аналогично находим:

$$\Delta R_{1,2} = -4\Delta + \Delta + \Delta = -2\Delta,$$

$$\Delta R_{2,2} = -4\Delta + \Delta + \Delta + \Delta = 0,$$

$$\Delta R_{2,1} = -4\Delta + 0,5\Delta + \Delta + \Delta = -1,5\Delta.$$

Приравнявая суммарное изменение "остатков"

$$\Sigma \Delta R_{i,j} = -1,5 - 2 + 0 - 1,5 = -5$$

сумме "остатков" $\Sigma R_{i,j}$ первого приближения, взятой с противоположным знаком, найдем Δ :

$$\Delta = \frac{-\sum R_{i,j}}{\sum \Delta R_{i,j}} = \frac{-400}{-5} = 80^\circ \text{C}.$$

Определяем теперь температуры следующего (второго) приближения в точках (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (0,1) и (3,1):

$$t_{1,1}^{(2)} = t_{1,1}^{(1)} + \Delta = 600 + 80 = 680^\circ \text{C},$$

$$t_{1,2}^{(2)} = t_{1,2}^{(1)} + \Delta = 1300 + 80 = 1380^\circ \text{C},$$

$$t_{2,1}^{(2)} = t_{2,1}^{(1)} + \Delta = 400 + 80 = 480^\circ \text{C},$$

$$t_{0,1}^{(2)} = \frac{1}{2}(t_{1,1}^{(2)} + 1000) = \frac{1}{2}(680 + 1000) = 840^\circ \text{C},$$

$$t_{3,1}^{(2)} = \frac{1}{2}t_{2,1}^{(2)} = \frac{1}{2}480 = 240^\circ \text{C}.$$

"Остатки" второго приближения в этих точках:

$$R_{1,1}^{(2)} = R_{1,1}^{(1)} - 1,5\Delta = 100 - 1,5 \cdot 80 = -20^\circ \text{C},$$

$$R_{1,2}^{(2)} = R_{1,2}^{(1)} - 2\Delta = 250 - 2 \cdot 80 = 90^\circ \text{C},$$

$$R_{2,1}^{(2)} = R_{2,1}^{(0)} - 1,5\Delta = 50 - 1,5 \cdot 80 = -70^\circ \text{C},$$

$$R_{2,1}^{(2)} = R_{2,2}^{(1)} = 0^\circ \text{C}.$$

Заносим полученные данные в сводную таблицу 1 и видим, что новые "остатки" заметно уменьшились, а значит значения температур $t_{i,j}$ стали намного ближе к истинным.

Для третьего приближения целесообразно использовать групповую свёрхрелаксацию. Групповую в том смысле, что уменьшаем по абсолютной величине до нуля сразу 2 "остатка": $R_{1,2}^{(2)}$ и $R_{2,1}^{(2)}$, а свёрхрелаксацию в том смысле, что полагаем уменьшаемые до нуля "остатки" несколько большими по абсолютной величине предыдущих их значений, а именно:

$$R_{1,2}^{(2)} = 92^\circ \text{C} \quad R_{2,1}^{(2)} = -72^\circ \text{C}.$$

Новые значения "остатков" в точках (1,2) и (2,1) кратны 4, что удобно для нахождения "остатков" третьего приближения в смежных с этими точках, так как по правилу релаксации для существующего приближения значение "остатка" в них равно прежнему плюс одна четвертая уменьшаемого (по абсолютной величине) до нуля "остатка". Итак, в третьем приближении имеем:

$$t_{1,2}^{(3)} = t_{1,2}^{(2)} + \frac{R_{1,2}^{(2)}}{4} = 1380 + \frac{92}{4} = 1403^\circ \text{C},$$

$$t_{1,1}^{(3)} = t_{1,1}^{(2)} = 680^\circ \text{C},$$

$$t_{2,1}^{(3)} = t_{2,1}^{(2)} + \frac{R_{2,1}^{(2)}}{4} = 480 - \frac{72}{4} = 462 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{2,2}^{(3)} = t_{2,2}^{(2)} = 930 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{0,1}^{(3)} = \frac{1}{2}(t_{1,1}^{(3)} + 1000) = \frac{1}{2}(680 + 1000) = 840 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{3,1}^{(3)} = \frac{1}{2}t_{2,1}^{(3)} = \frac{1}{2}480 = 240 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

Далее находим остатки после третьего приближения:

$$R_{1,2}^{(3)} = R_{1,2}^{(2)} - R_{1,2}^{(2)} = 90 - 92 = -2 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{1,1}^{(3)} = R_{1,1}^{(2)} + \frac{R_{1,2}^{(2)}}{4} + \frac{R_{2,1}^{(2)}}{4} = -20 + \frac{92}{4} - \frac{72}{4} = -15 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{2,1}^{(3)} = R_{2,1}^{(2)} - R_{2,1}^{(2)} = -70 - (-72) = 2 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{2,2}^{(3)} = R_{2,2}^{(2)} + 2\frac{R_{1,2}^{(2)}}{4} + 2\frac{R_{2,1}^{(2)}}{4} = 0 + 2 \cdot \frac{92}{4} + 2 \cdot \frac{-72}{4} = 10 \text{ }^{\circ}\text{C}. \quad (11)$$

Во втором и третьем слагаемых правой части формулы (11) стоит множитель 2, так как по одной дополнительной четверти "остатков" $R_{1,2}^{(2)}$ и $R_{2,1}^{(2)}$ к "остатку" в точке (2,1) будет добавляться от точек (2,3) и (3,2), симметричных соответственно точкам (2,1) и (1,2) и расположенных в смежной с рассматриваемой "осьмушке" сечения и смежных по направлениям осей координат с точкой (2,2).

Для следующего, четвертого приближения опять применим метод групповой релаксации. Уменьшаем по абсолютной величине до нуля "остатки" в точках (1,1) и (1,2). Тогда в четвертом приближении имеем:

$$t_{1,1}^{(4)} = t_{1,1}^{(3)} + \frac{R_{1,1}^{(3)}}{4} = 680 - \frac{15}{4} = 676,2 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{1,2}^{(4)} = t_{1,2}^{(3)} = 1403 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{2,1}^{(4)} = t_{2,1}^{(3)} = 462 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$t_{2,2}^{(4)} = t_{2,2}^{(3)} + \frac{R_{2,2}^{(3)}}{4} = 930 + \frac{10}{4} = 932,5 \text{ }^{\circ}\text{C}.$$

При этом новые "остатки" в точках (1,1) и (2,2) будут

$$R_{1,1}^{(4)} = R_{1,1}^{(3)} - R_{1,1}^{(3)} = 15 - (-15) = 0 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{1,2}^{(4)} = R_{1,2}^{(3)} + \frac{R_{1,1}^{(3)}}{4} + \frac{R_{2,2}^{(3)}}{4} = -2 + \frac{-15}{4} + \frac{10}{4} = -3,3 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{2,1}^{(4)} = R_{2,1}^{(3)} + \frac{R_{1,1}^{(3)}}{4} + \frac{R_{2,2}^{(3)}}{4} = 2 + \frac{-15}{4} + \frac{10}{4} \approx 0,7 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$R_{2,2}^{(4)} = R_{2,2}^{(3)} - R_{2,2}^{(3)} = 10 - 10 = 0 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Определим теперь температуры в точках (0,1) и (3,1) по формулам (7) и (9):

$$t_{0,1}^{(4)} = \frac{1}{2}(676,2 + 1000) = 838,1 \text{ } ^\circ\text{C},$$

$$t_{3,1}^{(4)} = \frac{1}{2} \cdot 462 = 231 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Очевидно, что дальнейшие приближения будут еще меньше изменять температуры в рассматриваемых точках, поэтому итерационный процесс приближений можно прекратить, учитывая, что достигнута приемлемая точность определения температур (порядка нескольких градусов Цельсия).

Таблица 1

Температуры и «остатки» в процессе последовательных приближений

Первое приближение		Второе приближение		Третье приближение		Четвертое приближение	
$t_{i,j}$ °C	$R_{i,j}$ °C	$t_{i,j}$ °C	$R_{i,j}$ °C	$t_{i,j}$ °C	$R_{i,j}$ °C	$t_{i,j}$ °C	$R_{i,j}$ °C
$t_{0,0}=0$		$t_{0,0}=0$		$t_{0,0}=0$		$t_{0,0}=0$	
$t_{0,1}=800$		$t_{0,1}=840$		$t_{0,1}=840$		$t_{0,1}=838,1$	
$t_{0,2}=2000$		$t_{0,2}=2000$		$t_{0,2}=2000$		$t_{0,2}=2000$	
$t_{1,0}=0$		$t_{1,0}=0$		$t_{1,0}=0$		$t_{1,0}=0$	
$t_{1,1}=600$	$R_{1,1}=100$	$t_{1,1}=680$	$R_{1,1}=-20$	$t_{1,1}=680$	$R_{1,1}=-15$	$t_{1,1}=676,2$	$R_{1,1}=0$
$t_{1,2}=1300$	$R_{1,2}=250$	$t_{1,2}=1380$	$R_{1,2}=90$	$t_{1,2}=1403$	$R_{1,2}=-2$	$t_{1,2}=1403$	$R_{1,2}=-3,3$
$t_{1,2}=2000$		$t_{1,2}=2000$		$t_{1,2}=2000$		$t_{1,2}=2000$	
$t_{2,0}=0$		$t_{2,0}=0$		$t_{2,0}=0$		$t_{2,0}=0$	
$t_{2,1}=400$	$R_{2,1}=50$	$t_{2,1}=480$	$R_{2,1}=-70$	$t_{2,1}=462$	$R_{2,1}=2$	$t_{2,1}=462$	$R_{2,1}=0,7$
$t_{2,2}=850$	$R_{2,2}=0$	$t_{2,2}=930$	$R_{2,2}=0$	$t_{2,2}=930$	$R_{2,2}=10$	$t_{2,2}=932,5$	$R_{2,2}=0$
$t_{3,0}=0$		$t_{3,0}=0$		$t_{3,0}=0$		$t_{3,0}=0$	
$t_{3,1}=200$		$t_{3,1}=240$		$t_{3,1}=231$		$t_{3,1}=231$	
$t_{4,0}=0$		$t_{4,0}=0$		$t_{4,0}=0$		$t_{4,0}=0$	

$$\Sigma|(R_{i,j})|=400$$

$$\Sigma|(R_{i,j})|=180$$

$$\Sigma|(R_{i,j})|=29$$

$$\Sigma|(R_{i,j})|=4$$

Более точные значения температур в рассматриваемой области можно получить, задавая более густую сетку и принимая для нее в качестве исходных данных найденные нами температуры. Естественно, что такие итерационные расчеты удобно выполнять на ЭВМ.

1.2 Компьютерное решение задачи

При использовании пакета *ELCUT* необходимо задавать все условия однозначности, и в частности геометрические размеры (величину размера A) и значение коэффициента теплопроводности материала λ , хотя в нашей задаче эти величины не влияют на решение. Итак, будем считать, что сторона наружного квадрата будет $A=1600$ мм (принята сетка с шагом 200 мм; такой шаг удобно выбирать и для других схем), а $\lambda=0,25$ Вт/(м·К).

В соответствии с инструкцией по работе с пакетом *ELCUT*, приведенной в приложении, через кнопку «Пуск» активизируем меню «Программы», выбираем *ELCUT* и запускаем пакет в работу. Далее через меню «Файл» выбираем «Открыть» и в появившемся диалоговом окне указываем имя файла «Схема2».

Чтобы вызванная схема появилась в рабочем поле, мышкой дважды щелкаем по позиции «Геометрия» в левом поле экрана.

Чтобы задать значение коэффициента теплопроводности λ , дважды щелкаем мышкой на пиктограмму папки «Физические свойства» в левом поле экрана. Далее указываем на метку «Блок1», нажимаем правую клавишу мышки и выбираем позицию «Свойства». В открывшемся окне вводим численное значение λ .

Чтобы ввести заданные температуры и условия теплообмена на границах элемента, сначала дважды щелкнем на пиктограмму папки «Физические свойства» в левом окне экрана. Далее указываем на метку «Ребро1» и дважды щелкаем на ней. В открывшемся окне вводим численное значение температуры на этом ребре. Аналогично задаем все остальные граничные условия, при этом на ребрах, проходящим по осям симметрии указываем не значение температуры, а другое условие: $q=0$.

После задания граничных условий переходим к построению расчетной сетки. Для этого нажмем кнопку «Построить сетку» на панели инструментов.

Теперь можно приступить к расчетам. Для этого в меню «Правка» выбираем позицию «Решить задачу», подтверждаем введенные нами изменения в описание задачи и указываем, чтобы результаты расчета были выведены на рабочее поле. В итоге там появится цветное отображение температурного поля.

Чтобы сопоставить результаты полученного решения с результатами ручного расчета, выпишем значения температур в характерных точках сечения. В нашем примере (по рис. 2) это точки (0,1), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) и (3,1). При выбранном шаге сетки в 20 см координаты этих точек будут соответственно: 0:20, 20:20, 20:40, 40:20, 40:40 и 60:20 см. Чтобы получить значения температур в этих точках нажимаем иконку «Локальные значения» на панели инструментов. Далее нажимаем правую кнопку мышки и указываем «Координаты точки». В появившееся окно вводим координаты точки и нажимаем «Enter», после чего в диалоговом окне появятся значения

заданных координат и всех характеристик температурного поля в этой точке. Результаты решения для каждой точки заносим в специальную таблицу 2.

Чтобы увеличить дискретизацию сечения, а значит и точность расчетов, сначала удалим из рабочего поля результаты решения, нажав соответствующую кнопку с символом \times на основном меню системы *ELCUT*. Далее на панели инструментов нажмем кнопку «Удалить сетку». Укажем теперь курсором на позицию «Блок1» в левом поле экрана, нажмем правую клавишу мышки и выберем позицию «Свойства». В появившемся диалоговом окне вместо автоматической дискретизации укажем «Шаг дискретизации ручной» и в открывшееся окно введем шаг дискретизации 5 см. После этого нажимаем кнопку «Построение сетки».

Когда мелкая сетка будет построена, запускаем задачу на решение, а после решения выписываем значения температур в характерных точках и вносим их в табл. 2 как результаты наиболее точного решения.

Таблица 2

Сопоставление результатов решения задачи

Температура $t_{i,j}$, °C	Координаты точки, см	Результаты ручного расчета	Результаты расчета на ПК при автоматической дискретизации	Результаты расчета на ПК с наиболее мелкой сеткой
$t_{0,1}$	0:20	838,1	837,8	759,8
$t_{1,1}$	20:20	676,2	672,9	647,2
$t_{1,2}$	20:40	1403	1379,2	1349,5
$t_{2,1}$	40:20	462	427,9	442,9
$t_{2,2}$	40:40	932,5	938,9	894,4
$t_{3,1}$	60:20	231	249,2	222,9

Чтобы решить задачу при Г.У. – 3 на наружных поверхностях, сначала кнопкой с символом \times удалим из рабочего поля полученное ранее решение. Далее дважды щелкнем на метку «Ребро4» в левом поле экрана и в появившемся окне укажем теперь «Конвекция», а в открывшиеся строки ввода введем значения α и t_v (примем для примера $\alpha=25$ Вт/(м²·К), $t_v=20$ °C). Дважды щелкнем на папке «Метки вершин» в левом поле, а затем дважды щелкнем на метку «Вершина1». В открывшемся окне показываем «Источник тепла» и $q=0$. Аналогично задаем параметры во всех остальных вершинах (в вершинах 3 и 3 $t=2000$ °C, в вершине 4 $q=0$). Далее запускаем задачу на решение и проводим анализ этого решения, выписывая температуры в характерных точках сечения в специальную таблицу 3. Для сравнения в этой таблице через символ дроби (/) даются значения температур, полученных при точном решении предыдущей задачи.

Анализируя данные таблиц 2 и 3, можно сделать заключение, что наибольшее расхождение между ручным и точным компьютерным расчетами при Г.У. –1 составляет примерно 10%, хотя среднее значение расхождений не

превышает 4,5%. Переход к Г.У. –3 при $\alpha=25 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ и $t_b=20 \text{ }^\circ\text{C}$ приводит к незначительному повышению температуры в характерных точках и неравномерному распределению ее на наружных поверхностях.

Таблица 3

Температуры в характерных точках при Г.У. –3 снаружи сечения

Координаты					
X	0	20	40	60	80
Y					
0	54,8/0	50,4/0	41,4/0	31,2/0	20/0
20	790,9/759,8	679/647,2	474,9/443	255,5/223	
40	2000/2000	1364/1350	918,3/894		

Пример решения задачи 2

Задача 2. Плоская пластина из резины твердой с размерами $950 \times 850 \times 25$ мм ($\delta=25$ мм и другие исходные величины приняты нами для примера) и равномерно распределенной начальной температурой $t_0=25 \text{ }^\circ\text{C}$ быстро и плотно прижимается к двум плоским поверхностям с постоянными температурами $t_1=65$ и $t_2=160 \text{ }^\circ\text{C}$. Как распределится температура по толщине пластины через $\tau=350$ с после начала процесса? Как изменится температурное поле, если толщину пластины увеличить на 5 мм? Как изменится распределение температуры, если теплообмен с холодной поверхности плиты будет осуществляться конвекцией с коэффициентом теплоотдачи $\alpha=27 \text{ Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ в среду с температурой $t_{ж}=13 \text{ }^\circ\text{C}$?

2.1 Решение методом сеток

При заданных размерах пластины нашу задачу можно считать одномерной (толщина пластины намного меньше ее ширины), т.е. принимать, что температура в ней меняется только по толщине x . Чтобы решить задачу методом сеток, разобьем пластину по толщине на 10 параллельных слоев толщиной $\Delta x=\delta/10=35/10=3,5$ мм, пронумеруем эти слои от 0 до 9 и будем считать, что внутри каждого слоя по направлению x температура постоянная, а любые ее изменения происходят скачками на гранях слоя. Расчетную точку с температурой слоя будем относить к середине этого слоя. Точно также допустим, что и по времени температура изменяется не непрерывно, а скачкообразно, только через каждые Δt с. В результате такой дискретизации температурное поля можно отобразить пространственно-временной сеткой или аналогичной таблицей с двумя аргументами [1].

Для решения задачи воспользуемся самым простым из известных численных методов, с так называемой явной схемой расчетов. Алгебраический аналог дифференциального уравнения теплопроводности здесь содержит лишь одну неизвестную и позволяет определить значение последующей по времени температуры для любой точки по значениям ее в

предыдущий момент времени [1]:

$$t_{i,k+1} = t_{i,k} + \frac{a\tau}{\Delta x^2} (t_{i+1,k} + t_{i-1,k} - 2t_{i,k}), \quad (12)$$

где индексом i отмечены номера слоев, а индексом k номера временных интервалов $\Delta\tau$; $a=\lambda/(\rho\cdot c)$ – коэффициент температуропроводности материала; λ , ρ и c – коэффициент теплопроводности, плотность и удельная теплоемкость материала, соответственно.

Чтобы решение задачи было устойчивым и сходящимся, необходимо соблюдать условие

$$\frac{a\tau}{\Delta x^2} \leq 0,5,$$

откуда находим максимально допустимый шаг $\Delta\tau$ по времени

$$\Delta\tau_{max} = \frac{0,5\Delta x^2}{a} = \frac{0,5(2,5 \cdot 10^{-2})^2}{0,0833 \cdot 10^{-6}} = 37,5 \text{ с.}$$

Для удобства расчетов принимаем $\Delta\tau=35$ с, строим таблицу 4 и заполняем ее известными при $\tau=0$ температурами $t_{0,i}$, а также температурами на наружных поверхностях пластины $t_{k,0}$ и $t_{k,9}$ ($i=1,2,\dots,8$, $k=0,1,2, \dots, 10$).

Вычислим предварительно значение безразмерного множителя, стоящего перед скобкой в формуле (12):

$$A = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2} = \frac{0,0833 \cdot 10^{-6} \cdot 35}{(2,5 \cdot 10^{-3})^2} = 0,4665$$

и будем последовательно рассчитывать значения температур в выделенных слоях, которые будут в них через 35 с после начала процесса ($k=1$) по формуле [1]:

$$t_{1,1} = t_{1,0} + A(t_{2,0} + t_{0,0} - 2t_{1,0}) = 25 + 0,4665(25 + 65 - 2 \cdot 25) = 43,7 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_{2,1} = t_{2,0} + A(t_{3,0} + t_{1,0} - 2t_{2,0}) = 25 + 0,4665(25 + 25 - 2 \cdot 25) = 25 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_{3,1} = t_{3,0} + A(t_{4,0} + t_{3,0} - 2t_{3,0}) = 25 + 0,4665(25 + 25 - 2 \cdot 25) = 25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Понятно, что и все другие температуры $t_{4,1}$, $t_{5,1}$, $t_{6,1}$ и $t_{7,1}$ будут равны $25 \text{ }^\circ\text{C}$, и только в предпоследнем слое температура изменится

$$t_{8,1} = t_{8,0} + A(t_{9,0} + t_{7,0} - 2t_{8,0}) = 25 + 0,4665(160 + 25 - 2 \cdot 25) = 87,9 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Заполняем теперь первую строку таблицы 4 и переходим к расчету второго временного слоя (при $k=2$).

$$t_{1,2} = t_{1,1} + A(t_{2,1} + t_{0,1} - 2t_{1,1}) = 43,7 + 0,4665(25 + 65 - 2 \cdot 43,7) = 44,9 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_{2,2} = t_{2,1} + A(t_{3,1} + t_{1,1} - 2t_{2,1}) = 25 + 0,4665(25 + 43,7 - 2 \cdot 25) = 33,7 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$t_{3,2} = t_{3,1} + A(t_{4,1} + t_{2,1} - 2t_{3,1}) = 25 + 0,4665(25 + 25 - 2 \cdot 25) = 25 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Как и в предыдущем случае легко понять, что температуры $t_{4,2}$, $t_{5,2}$ и $t_{6,2}$ будут равны $25 \text{ }^\circ\text{C}$, поскольку численные значения, входящие в формулу (12), будут такими же, как в последнем расчете. Поэтому продолжим расчет для крайних точек:

$$t_{7,2} = t_{7,1} + A(t_{8,1} + t_{6,1} - 2t_{7,1}) = 25 + 0,4665(87,9 + 25 - 2 \cdot 25) = 54,3 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$t_{8,2} = t_{8,1} + A(t_{9,1} + t_{67,1} - 2t_{8,1}) = 87,9 + 0,4665(160 + 25 - 2 \cdot 87,5) = 92,2 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Заполняем теперь очередную строку таблицы и переходим к аналогичным расчетам при $k=3$. Поскольку алгоритм и механизм расчетов достаточно подробно продемонстрирован предыдущими расчетами, целесообразно не приводить подробную запись всех расчетов, а заполнить таблицу 4 результатами из черного расчета.

Найдем теперь температуру на оси симметрии пластины при $\tau=350$ с. Ось симметрии проходит через координату $x=12,5$ мм, т.е. по стыку между четвертым и пятым слоями. Значит

$$t_{x=12,5, \tau=350} = \frac{t_{4,10} + t_{5,10}}{2} = \frac{47,1 + 56,4}{2} = 51,75 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

2.2 Компьютерное решение задачи

Чтобы решить задачу с помощью пакета *ELCUT*, открываем файл «Пример_зад2» и записываем его на диск например под именем «Сидоров2». Далее дважды щелкаем мышкой на позицию «Геометрия» в правом поле экрана. На появившейся в рабочем поле схеме пластины передвигаем правое ребро так, чтобы толщина пластины стала равной заданной в нашем варианте. Для этого выделяем это ребро щелчком мышки, нажимаем на ней правую кнопку и в появившемся меню выбираем «Передвинуть выделенное». Далее в появившемся окне указываем, на сколько мм следует увеличить или уменьшить координату x этого ребра, чтобы получить заданную толщину пластины.

Изменим теперь основные характеристики задачи, щелкнув мышкой на позицию «Геометрия» в правом поле системы *ELCUT* и выбрав в появившемся меню «Свойства задачи». В открывшемся окне укажем «Временные параметры» и введем значение конечного момента времени τ для интегрирования.

Далее задаем физические свойства блока с названием «Пластина» и ребер с названиями «Внутреннее_ребро», «Гор_ребро» и «Хол_ребро» (аналогично тому, как задавались эти свойства при решении задачи 1). При этом следует иметь в виду, что решение нестационарной задачи при Г.У. – 1 обычно ищут как результат решения той же задачи, но при Г.У.-3, принимая, что $\alpha \rightarrow \infty$ [2] (при численном решении будем принимать $\alpha=100000$ Вт/(м²К)).

Особенностью и определенным недостатком пакета *ELCUT* является то, что здесь всегда при расчетах нестационарной теплопередачи принимается, что начальная температура t_0 любого блока равна 0 °С. Поэтому, когда $t_0 \neq 0$, приходится предварительно решить вспомогательную задачу, в результате решения которой в исследуемом теле возникает равномерное температурное поле с заданной температурой.