Применение ELCUT для моделирования течений газа, а также подъемной силы крыла.

Вишняков Е.М[1]., Хвостов Д.А.[2]
[1]ОТИ МИФИ, [2] ЗАО "Самара-импэкс-кабель"

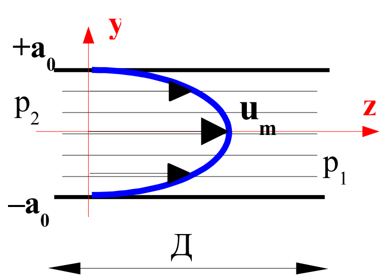
Показана возможность моделирования в среде ELCUT ламинарных течений вязких жидкостей и газов. Даны некоторые рекомендации к соответствующему усовершенствованию инструментария ELCUT.

Существующая версия ELCUT не предусматривает решение задач гидро- и газодинамики. Тем не менее, его можно использовать для решения некоторых из них. Как для наглядных учебных демонстраций, так и для некоторых важных технических приложений.

Это связано с тем, что основные уравнения, с помощью которых исследуют ламинарное течение газов и жидкостей, совпадают с уравнениями теории упругости и теплопроводности (диффузии).

Цель настоящей работы – показать, как это может быть сделано на примерах некоторых плоских и осесимметричных течений газов (и, качественно, – жидкостей), а также продольных течений вдоль цилиндрических каналов (труб) произвольной формы.

Плоское вязкое течение. Точное решение.



Пусть в щелевом канале, ограниченном двумя плоскостями с зазором ± d_0 (d_0 = 2 мкм) и длиной Д = 1 мм под действием продольного градиента давления происходит ламинарное вязкое течение воздуха (или жидкости). Точное решение получим с помощью простейшей формы уравнения Навье-Стокса для горизонтального одномерного потока газа:

$$\eta\, \partial^2 u/\partial y^2 = \partial p/\partial z = -\Delta p/Д$$

где Δp – перепад давлений вход-выход (Δp = 2.5 атм. [1]).

Его решение с граничными условиями $u(\pm a_0) = 0$:

$$u(y) = u_m\, [\, 1 - y^2/a_0^2\,]$$

где $u_m = \Delta p a_0^2/2\eta Д = 2.559$ м/с,
$\eta = 1.954\ 10^{-5}$ кг/мс – вязкость воздуха.

Средняя скорость воздуха в канале (расход/сечение):

$$\langle u\rangle = Q/A = \Delta p/Д\ a_0^2/12\eta = 2/3\ u_m$$

где $A = 2\ a_0$ Ш $= 0.16$ мм^2.
Ш = 40 мм – ширина щели по оси x (по глубине рисунка, а также – модели ELCUT),
$Q = 2.8\ 10^{-7}$ м^3/с – расход газа [1].

Сила P трения газа о стенки канала:

$$P = 2\ \eta\ \partial u/\partial y|_0\ A = 2\ \eta\ \Delta p/2\eta Д\ a_0\ Ш\ Д = \Delta p\ a_0\ Ш$$

Таким образом, перепад давлений вход-выход

$$\Delta p = P\ /\ Ш\ a_0 \qquad (1)$$

И, если задача решена правильно, то эта величина должна быть равной заданному перепаду давлений (2.5 атм). И её можно использовать для верификации расчётов.

Отметим также точные выражения для цилиндрического круглого канала радиуса a_0 [2]:

$$u(r) = u_m\ [\ 1 - r^2/a_0^2\ ]$$
$$u_m = \Delta p/Д\ a_0^2/4\eta\ ;\ \langle u\rangle = u_m/2$$

Подобие потенциального течения и упругих деформаций.

Уравнения гидромеханики могут быть записаны для внутренних напряжений p_{mn} жидкости [2]

$$\rho g_x = -\ [\ \partial p_{xx}/\partial x + \partial p_{xy}/\partial y + \partial p_{xz}/\partial z\ ]$$
$$\rho g_y = -\ [\ \partial p_{yx}/\partial x + \partial p_{yy}/\partial y + \partial p_{yz}/\partial z\ ]$$
$$\rho g_z = -\ [\ \partial p_{zx}/\partial x + \partial p_{zy}/\partial y + \partial p_{zz}/\partial z\ ]$$

Здесь ρg – плотность объёмных сил, действующих на газ. Например, сил тяготения. Ими в дальнейшем пренебрегаем. Напряжения связаны законом Ньютона с градиентами локальной скорости жидкости $\mathbf{u}(x,y,z) = (u_x,u_y,u_z)$:

$$p_{xx} = -\ N + 2\eta\ \partial u_x/\partial x;$$
$$p_{yy} = -\ N + 2\eta\ \partial u_y/\partial y;$$
$$p_{zz} = -\ N + 2\eta\ \partial u_z/\partial z;$$
$$p_{xy} = p_{yx} = \eta\ (\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x);$$
$$p_{xz} = p_{zx} = \eta\ (\partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x);$$
$$p_{yz} = p_{zy} = \eta\ (\partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y);$$

где N – некоторый скаляр, пропорциональный гидростатическому давлению.

Эти уравнения совпадают с уравнениями для деформированного упругого тела [2]:

$$\rho g_x = -\,[\,\partial p_{xx}/\partial x + \partial p_{xy}/\partial y + \partial p_{xz}/\partial z\,]$$
$$\rho g_y = -\,[\,\partial p_{yx}/\partial x + \partial p_{yy}/\partial y + \partial p_{yz}/\partial z\,]$$
$$\rho g_z = -\,[\,\partial p_{zx}/\partial x + \partial p_{zy}/\partial y + \partial p_{zz}/\partial z\,]$$

Здесь напряжения связаны законом Гука с градиентами смещения точек тела $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ (то есть, деформациями):

$$p_{xx} = 3\lambda\varepsilon + 2\,G\,\partial u_x/\partial x;$$
$$p_{yy} = 3\lambda\varepsilon + 2\,G\,\partial u_y/\partial y;$$
$$p_{zz} = 3\lambda\varepsilon + 2\,G\,\partial u_z/\partial z;$$
$$p_{xy} = p_{yx} = G\,(\partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x);$$
$$p_{xz} = p_{zx} = G\,(\partial u_x/\partial z + \partial u_z/\partial x);$$
$$p_{yz} = p_{zy} = G\,(\partial u_y/\partial z + \partial u_z/\partial y);$$

где $G = E/2(1+\mu)$ – модуль сдвига,
E – модуль Юнга,
$\lambda = E/3(1-2\mu)$ – постоянная Ламе,
μ – коэффициент Пуассона,
$\varepsilon = (\partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z)/3$ – объёмная (гидростатическая) деформация.

Так как $3\lambda\varepsilon$ – скаляр, подобный N, то в целом уравнения гидродинамики и упругости отличаются только обозначениями.

Так что, что если мы вместо газа с вязкостью η заполним канал упругим веществом с модулем сдвига $G = \eta$, то при тех же граничных условиях и объёмных силах, профиль упругих смещений численно совпадёт с профилем скоростей жидкости.

Таким образом, задача течения жидкости сводится к задаче теории упругости, которую в двумерных случаях можно решить в ELCUT. Поскольку с граничными условиями всё ясно, остаётся определиться с объёмными силами.

Объёмные силы для ELCUT

Их идентифицируем как градиент давления в канале – «движущую силу потока»:

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}\ p.$$

В точном решении этот градиент был постоянен вдоль потока, так как зазор a_0 не зависел от координаты z. Но если он переменный: $a = a(z)$, то скорость течения и градиент давления вдоль канала изменяются. Скорость определим из закона сохранения вещества для стационарного течения ($\partial M/\partial t = 0$; M – масса газа, пересекающая сечение z канала):

$$\partial M/\partial t + \partial(A\rho\mathbf{u})/\partial z = 0 \text{ или } \partial(A\rho\mathbf{u})/\partial z = 0$$

Для одномерного движения А = 2 Ш а, поэтому:

$$\rho u\ \partial a/\partial z + ua\ \partial\rho/\partial z + \rho a\ \partial u/\partial z = 0 \qquad (2)$$

Здесь неизвестны ρ и u. Плотность ρ найдём из уравнения состояния. Например, для идеального газа:

$$\rho = \rho_0\ p/p_0\ T/273$$

Здесь температура газа T зависит от типа течения: адиабатическое, политропное или изотермическое. А это, в свою очередь, определяется соотношением времени пролёта $t_{пр}$ газа вдоль канала:

$$t_{пр} \sim Д/ \langle u\rangle = 4\ 10^{-3}\ с$$

и характерного времени τ его теплообмена со стенками канала:

$$\tau \sim a^2/\pi^2 D = 10^{-7}\ с$$

Здесь $D = 1.8\ 10^{-5}$ м^2/с – коэффициент температуропроводности азота.

Движение адиабатическое, если $\tau >> t_{пр}$ (когда зазор и/или скорость настолько большие, что газ не успевает обменяться теплом со стенками).

Если же $\tau << t_{пр}$, как в рассматриваемом случае, то T успевает "отследить" температуру стенок T_0. И, если последняя – постоянная, то течение изотермическое $T = T_0$. Тогда уравнение состояния – тоже изотерма:

$$\rho = \rho_0\ p/p_0$$

Подставим это ρ в (2) :

$$p\ u\ \partial a/\partial z + u\ a\ \partial p/\partial z + p\ a\ \partial u/\partial z = 0 \qquad (2')$$

Давление p газа в канале связано с его скоростью уравнением Навье-Стокса:

$$\rho\ \partial\mathbf{u}/\partial t = \rho\mathbf{g} - \mathrm{grad}\ p + (\zeta + \eta)\ \mathrm{grad\ div}\ \mathbf{u} + \eta\ \Delta\mathbf{u} \qquad (3)$$

где ζ ~ η [3] – коэффициент объёмной вязкости.

Кроме того, в рассматриваемой задаче [1] общее время процесса 180с >> $t_{пр}$. Так что процесс можно считать практически стационарным и пренебречь производными по времени. Пусть также стенки канала настолько гладкие ([1]), что можно пренебречь производными скорости по y (по x они нулевые, так как течение плоское). Тогда из (3) получим:

$$F = \mathrm{grad}\ p = -(\zeta + \eta)\ \partial^2 u/\partial z^2 - \eta\ \partial^2 u/\partial y^2$$

[1] Для ELCUT это условие безразлично. Но при нём получаются простые выражения для объёмных сил.

Первым слагаемым справа пренебрегаем, так как его порядок $(\zeta+\eta)\ u_m /Д^2 << \eta\ u_m /a^2$. И получим такой закон объёмных сил (знак минус не пишем):

$$F = \eta\ 2\ u_m /a^2 = 3Q\eta/Шa^3 = 5.13\ 10^7 /(a/a_0)^3\ Н/м^3$$

Численное значение – для указанных выше параметров. Его и подставляем в газовый блок модели ELCUT вместе с G = η. Например, подставив модуль Юнга E = 2η и коэффициент Пуассона μ = 0 ([2]). Отметим, что для плоского канала $F \sim 1/a^3$. А для канала круглого сечения $F \sim 1/a^4$ [2] (см. ниже).

Течение в плоских каналах

В таблице 1 приведены результаты расчётов для трёх геометрий канала: параллельной, сужающейся к выходу (конфузор) и расширяющейся (диффузор) с одинаковой средней толщиной. Расход во всех случаях $Q = 2.8\ 10^{-7}$ $м^3/с$. Скорость в центре канала 2.565 м/с всего на 0.3% отличается от точной $u_m = 2.559$ м/с.

Табл.1 Расчёт скорости и давления в канале.

	Δp, атм	скорость, м/с		
		вход	центр	Выход
параллель	2.51	3.1498	2.5646	3.1483
конфузор	2.67	2.5973	2.5648	4.0619
диффузор	2.67	4.0613	2.5646	2.5968

Это подтверждает разумность модели. Перепад давлений Δp в параллельном плоском канале получился равным 2.51 атм. Что всего на 0.4% отличается от заданного. Что, как упомянуто выше, дополнительно подтверждает верность расчёта. Как видно из таблицы, неоднородность толщины канала ведёт к увеличению разности давлений (или, при той же разности – к снижению утечки газа).

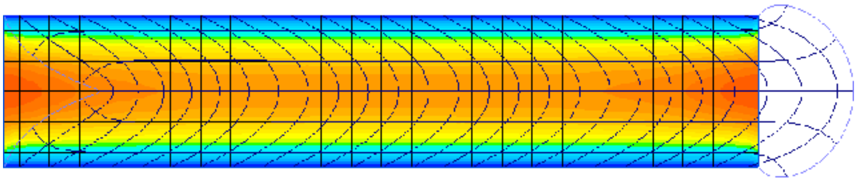
На рис.1 показано распределение скоростей вдоль параллельного канала с толщиной щели 4 мкм длиной 20 мкм и глубиной 40 мм ([3]). Видна сходящаяся струя на входе слева и

[2] Хотя результаты не сильно зависят от модуля Пуассона, с ним нужна осторожность. Например, для жидкостей надо вводить μ ~0.49999. Но уже при μ~0.499 вычисления в ELCUT катастрофически замедляются и возрастает риск отказов. Приходится ограничиваться μ <~0.498 и, если необходимо, учитывать возникающие погрешности.

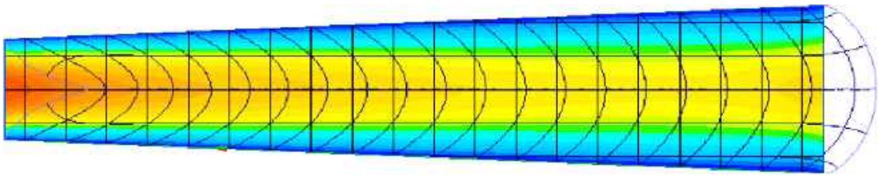
[3] Плоские задачи ELCUT решает, вообще говоря, для канала бесконечной глубины, если смотреть на рисунок сверху. Но для численных оценок эту глубину надо задавать (для таблицы – 40 мм, как указано выше). По умолчанию ELCUT устанавливает «стандартную» глубину 1 м.

расходящаяся – на выходе справа. В теле канала профиль – параллельные параболы. В других случаях видно, как ускоряется газ в конфузоре и замедляется в диффузоре.

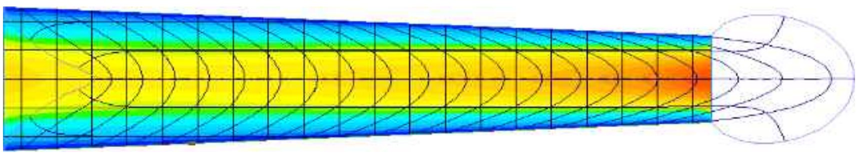
Следует обратить внимание на повышенную скорость в центре входа и выхода каналов. Это, видимо, связано с тем, что на входе ещё не "включается" трение газа о стенки, а на выходе – оно "выключается".



параллельный канал



диффузор



конфузор

Рис.1. Течение газа в канале.

Моделирование плоских газовых течений в ELCUT – это самый простой, быстрый и, возможно, самый точный способ их демонстрации.

Осесимметричное течение

Достаточно характерно также распределение скоростей по сечению сопла (рис.2).

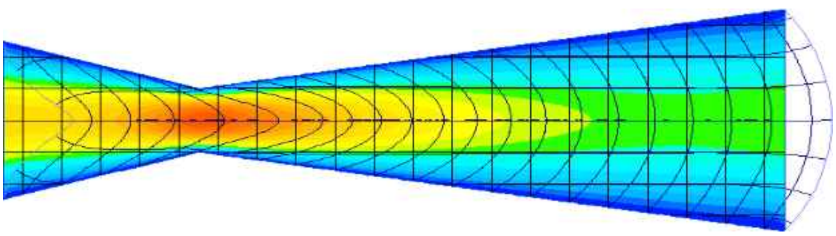


Рис. 2. Течение газа вдоль осесимметричного сопла.

Это – осесимметричная задача. И потому, как указано выше, для неё закон объёмных сил:

$$F = \eta\ 2\ u_m / a^2 = Q\eta/\pi a^4 = 6.23\ 10^4 / (a/a_0)^4$$

где $a_0 = (A/\pi)^{1/2} = 0.216$ мм.

Подъёмная сила крыла.

Можно моделировать эффект подъёмной силы крыла и его зависимость от угла атаки, которая, согласно теории Жуковского [3], при малых углах почти линейна (рис.3).

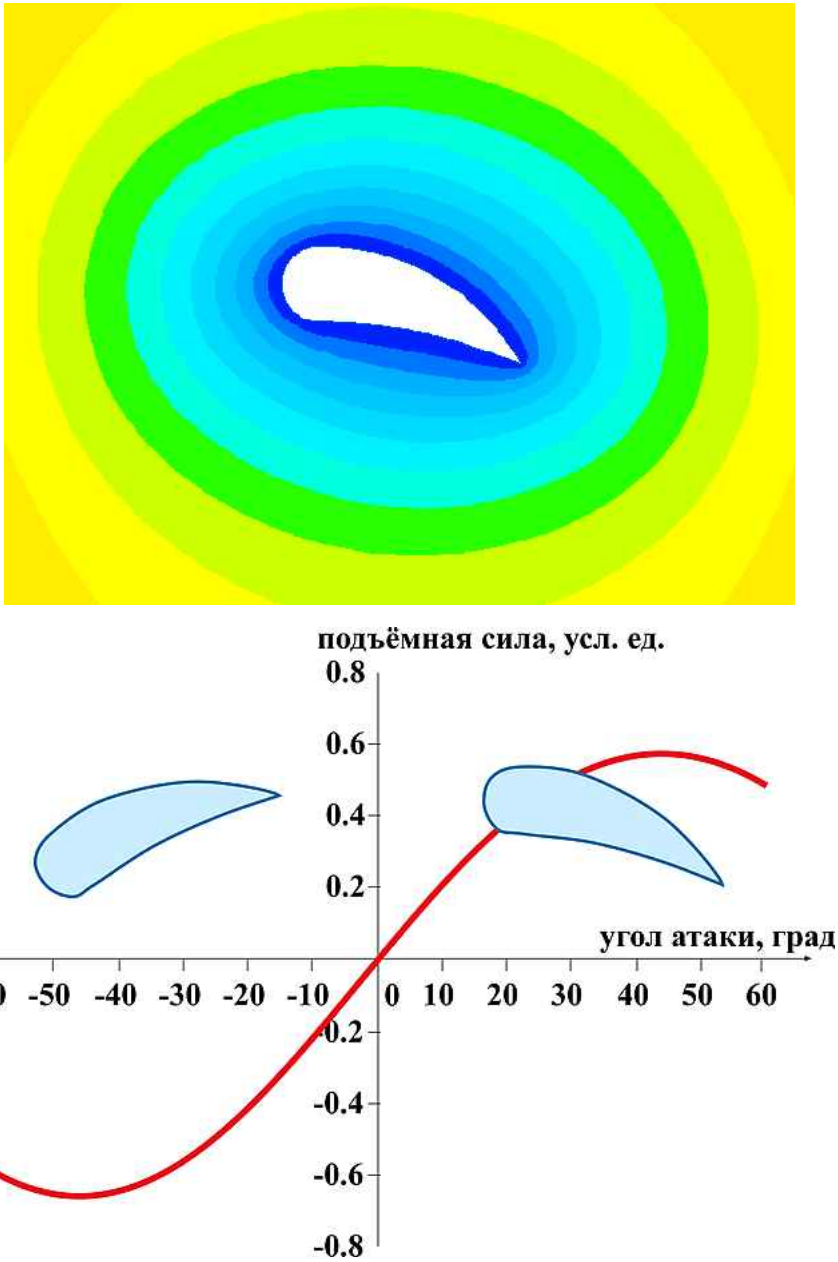


Рис.3. Расчёт подъёмной силы крыла в газовом потоке. Вверху – цветовая карта скорости воздуха около крыла (синий цвет – пониженная, теплые тона – повышенная). Внизу – зависимость подъёмной силы крыла от угла атаки.

На графике есть, «как и положено», критический угол атаки, при котором подъёмная сила максимальна. Здесь он около 50^{o}. Реальные углы, однако, намного меньше: $5...15^{o}$. Последнее, скорее всего, связано с образованием вихрей при углах атаки больше 15^{o}, когда реальные воздушные потоки отрываются от крыльев [3], и «ламинарные» расчёты теряют силу.

И хотя пока неясно, как этот отрыв моделировать в существующем варианте ELCUT, это никак не умаляет его демонстрационной полезности.

Распределение скоростей по сечению каналов произвольной формы.

Выше рассчитаны распределения потоков газа в плоскости, параллельной оси потока (вид сбоку). Есть, однако, задачи, в которых надо знать распределение скоростей жидкости по сечению потока (вид в торец). Для таких задач уравнение (3) имеет следующий вид:

$$\eta\ (\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2) = -\Delta p/Д$$

где плоскость x,y перпендикулярна потоку.

У стенок канала, как и выше, $u = 0$. Это уравнение с точностью до обозначений совпадает с двумерным уравнением теплопроводности при наличии объёмных источников тепла W [Вт/м^3]:

$$\lambda\ (\partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2) = W$$

где λ [Вт/м К] – коэффициент теплопроводности.

Поэтому, если в ELCUT решить задачу теплопроводности с $\lambda = \eta$, $W = \Delta p/Д$ и $T = 0$ на границе, то полученное распределение температур численно совпадёт с распределением скоростей. Физически подобие задач обусловлено тем, что распространение тепла в твёрдом теле можно рассматривать, как диффузию частиц тепла – фононов – квантов колебаний атомов. А торможение слоёв текущей жидкости – с диффузией её атомов из быстрых слоёв в медленные и наоборот (тут говорят – с диффузией импульса).

На рис.4 представлена цветовая карта скоростей газа в пустотах двухпроводниковых сигнальных линий. Такие задачи возникают, к примеру, при расчёте скорости распространения продуктов горения вдоль кабелей, а также при их испытании на герметичность.

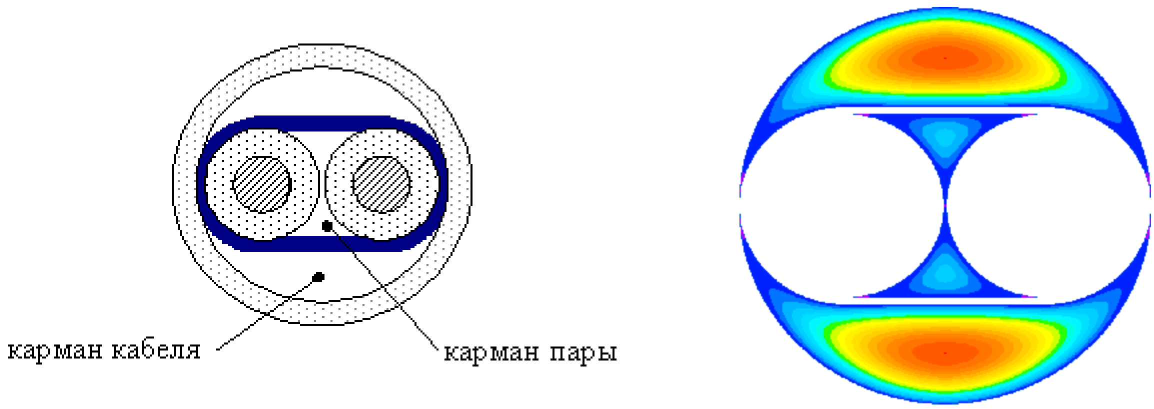


Рис.4. Цветная карта скорости газа вдоль воздушных карманов кабеля и сигнальной пары (красный цвет – повышенная скороть, синий – пониженная, фиолетовый – нулевая).

В рассмотренном примере по полостям кабеля протекает более 97% всего потока газа (например, в случае разгерметизации уплотнения). Стало быть, если их заполнить герметиком, то поток уменьшится более, чем в 30 раз.

Подобного рода расчёты полезны для конструкторов кабельных изделий.

Выводы

Таким образом, используя арсенал программных средств ELCUT, можно успешно моделировать ряд задач по течению газов и достаточно сжимаемых жидкостей (а также качественно – несжимаемых). Для чего полезно предусмотреть вывод в полевом калькуляторе ELCUT (и в LabelMover) следующих (интегральных) величин:

- число Рейнольдса;
- скорость жидкости в заданной точке;
- расход жидкости через заданное ребро (текущей вдоль блока);
- среднюю скорость жидкости, пересекающей ребро и текущей вдоль блоков;
- распределение и общий запас кинетической энергии жидкости ($\rho\ u^2/2$);
- давление набегающего (на площадку) потока (пропорционально $\rho\ u^2/2$);

Целесообразно также давать картину линий тока жидкости (подобно силовым линиям электрического поля или тока).

Полезно научить ELCUT решать задачи для $\mu = 0.5$ (модуль Пуассона для несжимаемых жидкостей) и около этой величины.

Литература

1. Для численных примеров приняты величины начального перепада давления (около 2.5 атм.), времени стравливания (3 мин) и конечного перепада (2 атм.), предусмотренные нормативами п. 7.3.107 ПУЭ – Правил устройства электроустановок (во взрывоопасных зонах). Для оценка расхода Q принят типичный объём (1 л) предусмотренной п. 7.3.105 ПУЭ уплотняющей коробки. Для величины Д (1 мм) принята типичная толщина стенок коробки.

2. Б.Т.Емцев Техническая гидромеханика. - М: Машиностроение, 1987.

3. Физическая энциклопедия. т.1,5.-М: БРЭ, 1998.