

В. Т. Чемерис¹⁾, канд. техн. наук,
И. А. Бородий¹⁾.

¹⁾Национальный авиационный университет Украины
(Украина, 03680, Киев, просп. Комарова, 1
тел.(044) 4067840, e-mail: vchemer@gmail.com)

Соблюдение принципов подобия решений при численном моделировании диффузионных процессов

There is considered the application of the similarity principles to the solution of the field diffusion equation. For the two samples of medium with same physical properties but different space and time scales the solutions of the field diffusion equation can be similar and moreover identical at fulfillment of some correlations between the dimensions, time duration of process and boundary conditions for both samples. These correlations are derived in the paper on the base of non-dimension form of diffusion equation consideration. The possibility of similar solution obtaining in non-linear ferromagnetic is shown on the examples of solutions performed with use of program QuickField v.6.10 (prof.).

Ключевые слова: нестационарная диффузия, магнитное поле, условия подобия, одномерный случай, нелинейная среда.

Введение. Большинство популярных пакетов прикладных программ для моделирования физических полей (такие, как Comsol, Maxwell, QuickField, Elcut, FlexPDE-6, FEMM и другие) предлагают пользователю выполнять расчеты в размерных единицах. Это удобно при решении прикладных задач, однако создает некоторые трудности при попытках обобщения полученных результатов. Несмотря на имеющуюся обширную литературу по теории подобия, особенности анализа численных решений заслуживают отдельного обсуждения. Помимо критериев подобия, которые могут быть введены при переходе к уравнениям в безразмерной форме, должны быть приняты во внимание условия подобия, связанные с видом граничных условий. Эти вопросы рассматриваются в данной работе на примере численного анализа процессов диффузии поля.

Уравнение нестационарной диффузии. Для однородных изотропных сред это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_k \Delta u = 0,$$

где u – величина, характеризующая рассматриваемое поле, в зависимости от вида задачи (диффузия массы, тепла или электромагнитного поля), D_k – коэффициент диффузии, соответствующий виду поля. При анализе диффузии массы $u \equiv \rho$ – это плотность вещества, $D_k = D_1$ – коэффициент диффузии частиц вещества; при анализе диффузии тепла $u \equiv T$ – это температура среды, $D_k = D_2 = \lambda/(c \cdot \rho)$ – коэффициент диффузии теплоты, где λ – коэффициент теплопроводности среды, c – изобарная теплоемкость среды, ρ – плотность среды; при анализе диффузии электромагнитного поля $u \equiv B$ – это магнитная индукция, $D_k = D_3 = 1/(\mu \cdot \sigma)$ – коэффициент диффузии поля, здесь μ – магнитная проницаемость среды, σ – коэффициент электропроводности среды.

Условия подобия при диффузии магнитного поля. Далее выбираем для обсуждения уравнение нестационарной диффузии магнитного поля

$$\frac{\partial B}{\partial t} = D \Delta \vec{B}; \quad D = \frac{1}{\mu \sigma}.$$

Запишем его дважды в безразмерной форме для двух расчетных моделей, которые имеют различные характерные размеры (X_{1bas} и X_{2bas}) и отличаются длительностью процесса диффузии (t_{1bas} и t_{2bas}):

$$\partial B_1^* / \partial t_1^* = D_1 \frac{t_{1bas}}{X_{1bas}^2} \Delta_1^* B_1^*; \quad \partial B_2^* / \partial t_2^* = D_2 \frac{t_{2bas}}{X_{2bas}^2} \Delta_2^* B_2^*. \quad (1); (2)$$

В уравнениях (1), (2) используются следующие обозначения:

$$t^* = t / t_{bas}; \quad x^* = x / X_{bas}; \quad y^* = y / Y_{bas}; \quad z^* = z / Z_{bas};$$

Δ_1^* , Δ_2^* — операторы Лапласа по безразмерным переменным x^* , y^* , z^* .

Значения магнитной индукции, входящие одновременно в левую и правую часть каждого уравнения, могут быть нормированы с помощью произвольных базисных величин: $B_1^* = B_1 / B_{1bas}$; $B_2^* = B_2 / B_{2bas}$; однако для корректного сопоставления получаемых решений следует принять одинаковые базисные величины: $B_{1bas} = B_{2bas}$. Если в уравнениях (1) и (2) соблюдается равенство нормированных значений коэффициентов диффузии $D_1^* = D_2^*$, которые равны соответственно

$$D_1^* = D_1 \frac{t_{1bas}}{X_{1bas}^2}; \quad D_2^* = D_2 \frac{t_{2bas}}{X_{2bas}^2}, \quad (3)$$

тогда можно говорить о подобии относительного распределения величин поля в этих уравнениях. При совместном выполнении условий

$$D_1^* = D_2^* \quad \text{и} \quad B_{1bas} = B_{2bas} \quad (4)$$

можно говорить о полной идентичности уравнений (1) и (2), ее результатом будет тождественность решений, получаемых для магнитной индукции $B_1^*(x_1^*, y_1^*, z_1^*, t_1^*) = B_2^*(x_2^*, y_2^*, z_2^*, t_2^*)$ при идентичных граничных условиях. В случае нелинейности магнитных свойств ферромагнетика для обеспечения этой тождественности в уравнениях (1) и (2) желательно использовать нормированные зависимости параметров среды от магнитной индукции. При решении задачи в размерных величинах учет нелинейности реализуется путем выбора граничных условий, гарантирующих одинаковый уровень магнитной индукции при выходе решения на установившийся режим, когда процесс диффузии может считаться законченным, и использованием идентичных кривых намагничивания ферромагнитного материала в сопоставляемых расчетных моделях.

При линейных свойствах среды, когда коэффициент диффузии поля является постоянной величиной в каждом из уравнений (1) и (2), условие подобия полей (4) упрощается, если $D_1 = D_2$, и сводится к соотношению между пространственными и временными характеристиками расчетных моделей:

$$\frac{t_{2bas}}{t_{1bas}} = \left(\frac{X_{1bas}}{X_{2bas}} \right)^2 \quad (5)$$

Для демонстрации возможности получения подобия картины поля в программе QuickField (professional version 6.10) был выполнен в квази-одномерном приближении расчет нестационарной диффузии поля в двух разномасштабных моделях, представляющих собой полосу из ферромагнетика, кривая намагничивания которой была задана в виде Табл. 1. Длительность процесса была доведена до наступления стационарного состояния, когда диффузия прекращается. Индикатором наступления стационарного состояния было распределение магнитной индукции по длине образца. Окончание процесса диффузии

Таблица 1. Кривая намагничивания для расчета нелинейной диффузии поля

Индукция B (Тесла)	0	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
Напряженность H (А/м)	0	140	171	211	261	318	397	502	647
Индукция B	1,3	1,2	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
Напряженность H	1140	843	1580	2500	4400	7800	13000	22000	34200
									200000

контролировалось по установлению однородного распределения индукции вдоль оси x с отклонениями не более 0,1% от стационарного значения $B_{стаци}$, которое может быть предсказано заранее при одномерной диффузии благодаря простому соотношению между индукцией и векторным магнитным потенциалом:

$B_z = \partial A_y / \partial x$. Используя заданные на границах образца значения потенциала A_{1y} и A_{2y} , это соотношение можно переписать в виде $B_{стаци} = (A_{1y} - A_{2y}) / L$, где L – длина образца, измеренная вдоль оси x . Для двух образцов длиной 0,5 м и 5,0 м были получены распределения индукции вдоль координаты x во времени, которые показаны на рис.1 и рис. 2. Соотношение между параметрами моделей: $X_{1bas} = 0,5$ м, $X_{2bas} = 5,0$ м, $t_{1bas} = 10$ сек, $t_{2bas} = 1000$ сек, т. е. соответствует формуле (5). Граничные условия выбраны следующим образом:

для образца длиной 0,5м задано $A_{1y} - A_{2y} = 0,8$ (Вб/м),

а для образца длиной 5,0м задано $A_{1y} - A_{2y} = 8,0$ (Вб/м).

Благодаря такому соотношению между длительностями процесса и характерными размерами образцов, а также благодаря одинаковым значениям индукции стационарного состояния достигается полное подобие в распределении индукции по длине образцов на равных по относительной величине отрезках длительности процесса в одном и другом образце. Таким образом, при учете нелинейных свойств ферромагнетика к условиям подобия, содержащим размеры образцов и длительности процессов, необходимо добавить условие идентичности уровней магнитной индукции в стационарном состоянии, обеспечиваемое заданием граничных условий: $\Delta A_y / L = \text{const}$.

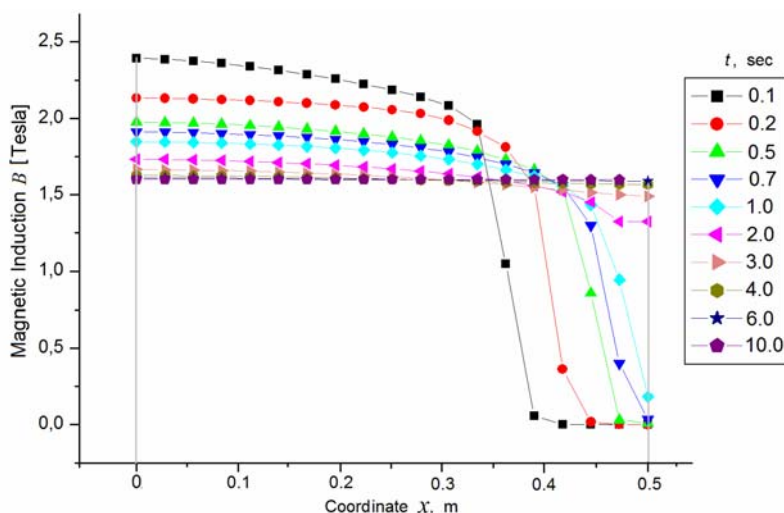


Рис. 1. Распределение магнитной индукции по длине образца длиной 0,5м для различных моментов времени.

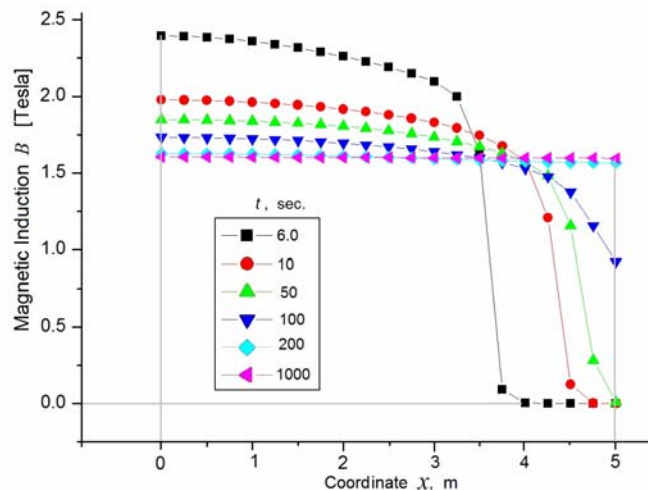


Рис. 2. Распределение магнитной индукции по длине образца длиной 5,0 м для различных моментов времени.

Для обоих образцов процесс диффузии характерен тем, что имеет перемещающийся фронт, впереди которого поле вначале отсутствует, а позади него имеется зона насыщения ферромагнетика, в которой индукция постепенно приближается к установившемуся значению, распределяясь в итоге равномерно по сечению образца.

Заключение. Рассмотренные в статье условия подобия диффузии поля справедливы для одномерных процессов, однако с определенной осмотрительностью могут быть обобщены и для двумерных и трехмерных задач. Такая же осмотрительность потребуется при попытках обобщения процессов в гетерогенных или анизотропных средах на основе принципов подобия. Применение принципов подобия к расчету диффузии в линейных средах не вызывает затруднений. В частности, они применимы к задачам нестационарной диффузии тепла, если принять во внимание, что при формулировке граничных условий для таких задач температура играет ту же роль, что векторный магнитный потенциал в задачах о диффузии магнитного поля, а тепловой поток – ту же роль, что магнитная индукция в рассмотренных выше задачах.

Авторы выражают признательность представительству фирмы Tera Analysis в г. Торонто, Канада, за предоставленную возможность использования профессиональной версии программы QuickField.

1. Райченко А. И. Математическая теория диффузии в приложениях. – Киев: Наукова думка, 1981. – 396 с.
2. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. – М.: Наука, 1966. – 366 с.