

## **ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ**

**Борзунова Т. Л.**

(Россия, Волгоград)

*В статье рассматриваются возможности совершенствования обучения студентов новым компьютерным технологиям типа электронных таблиц, баз данных, стандартных программ математических вычислений, оптимизации и специальных пакетов для математического моделирования различных процессов.*

В современном обществе с высокими технологиями невозможно обойтись без высокопрофессиональных специалистов, умеющих использовать все новейшие компьютерные технологии. Воспитанию таких специалистов в ВУЗе и служит обучение студентов-первокурсников основам информатики, алгоритмизации и получение первичных навыков работы на компьютере.

В настоящее время качественно и количественно в сторону улучшения изменился компьютерный парк в учебных аудиториях; назрела необходимость изменения установленных программ по информатике. В связи с этим на кафедре прикладной математики постепенно модернизируются лабораторные работы и вводятся новые: на первом этапе - в лабораторные работы были введены задания, выполняемые на таких общедоступных компьютерных средствах, как электронные таблицы Excel и математический пакет MathCad.

Студенты учатся не только основам работы с этими пакетами, но и решают конкретные задачи с использованием различных средств. Так, например, некоторые задания по численным методам решаются с использованием Excel, а другие с использованием MathCad, а также с помощью программирования в среде Pascal. Студент имеет возможность сравнить результаты

полученные как с помощью программы на языке Pascal, так и результаты с использованием программ MathCad или Excel.

Важным достоинством является то, что при выполнении лабораторных студентов значительно упрощается подготовительная работа: построение графиков, подсчет значения производных для проверки сходимости того или иного численного метода и так далее осуществляется не вручную, а с помощью компьютера.

Некоторые лабораторные работы в связи с большой объемом в написании программы на языке программирования, такие как, решение систем алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимация функций методом наименьших квадратов полностью переведены на компьютерные пакеты. Студенты проявляют к ним большой интерес и не только из-за простоты исполнения, но и в связи с возможностью сравнения результатов вычислений с помощью различных подходов и программ и значительного уменьшения рутинного труда. Например, студенту необходимо подобрать аппроксимирующую функцию для экспериментальных данных и сделать прогноз на несколько периодов вперед или назад. В Excel, в качестве сглаживающих функций можно взять линейную, полиномиальную, степенную, логарифмическую, экспоненциальную и другие функции. По одним и тем же данным рисуются различные тренды, а по величине достоверности аппроксимации делается вывод о выборе наиболее подходящей сглаживающей кривой для исследуемых экспериментальных данных. При нахождении решения систем алгебраических уравнений и обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается также использовать пакет MathCad.

Основные навыки, полученные при работе с MathCad, будут полезны будущим специалистам при создании ряда технологических цепочек, без умения построения которых в настоящее время не обходится ни один технологический процесс.

Многие задачи математической физики сводятся к исследованию уравнений с частными производными второго порядка, называемых уравнениями математической физики. В настоящее время одномерные параболические и гиперболические диффе-

ренциальные уравнения в частных производных (PDE) могут быть решены с помощью компьютерного пакета MathCad. Это достигается с помощью нового построителя-функции numol() или расширения блоков решателя: построитель-функции pdsolve(). С помощью MathCad могут быть численно решены системы уравнений в частных производных и уравнений в частных производных с алгебраическими ограничениями, если они линейны относительно их наивысших степеней производных.

Задача (волновое уравнение). Однородная струна с одним свободным концом  $x = L$  ( $L = 2\pi$ ), и закрепленная другим концом  $x = 0$  имеет в начальный момент времени форму синусоиды  $\sin \frac{\pi \cdot x}{L}$ . Описать процесс колебания (смещение точек)

струны от прямолинейного положения равновесия, предполагая, что начальные скорости отсутствуют. Известно отношение силы натяжения к плотности  $a^2 = 9$  (плотность – постоянна) и период  $T = 2 \cdot \pi$ .

Запишем уравнение малых поперечных колебаний струны без внешнего воздействия:  $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ . Колебания –

процесс нестационарный, в них независимыми переменными являются время  $t$  и пространственная переменная  $x$  (так как одномерный случай). Одномерные волновые уравнения описывают продольные колебания стержней, сечения которых совершают плоскопараллельные движения и поперечные колебания тонкого стержня (струны) и другие задачи. Для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо знать дополнительные начальные и граничные условия (величины смещения и скорости). Для поперечных колебаний струны искомая функция  $u(x,t)$  описывает положение струны в момент  $t$ . Колебания предполагаются малыми, то есть амплитуда мала по сравнению с длиной струны. В нашем случае надо решить смешанную задачу для ограниченной струны  $L$ . В этом случае задают граничные условия на ее концах. В частности, при закрепленных концах их смещение равно нулю. Однако, гранич-

ные условия могут задаваться и для производной. Например, в случае свободных колебаний стержня на его незакрепленном конце значение скорости (производной) равно нулю. Таким образом, граничные условия в нашем случае имеют вид  $u(0,t) = 0$  и  $\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$ , а начальные условия:

$u(x,0) = \sin \frac{\pi \cdot x}{L}$  и  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$ , где  $u(x,0)$  описывает начальную форму струны, а  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$  — скорость ее точек в начальный момент времени.

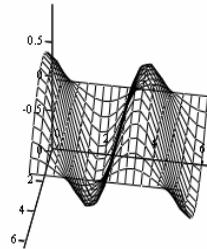
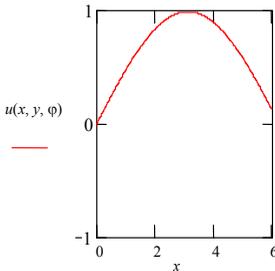
Количество начальных условий должно равняться порядку входящей в уравнение производной по  $t$ .

Данную задачу можно решить с помощью одной из двух функций `Pdsolve()` или `numol()`. Покажем технику решения этой задачи с использованием функции `Pdsolve`. Начинаем блок решения:

```

Given
u_t(x,t) = v(x,t)
v_t(x,t) = a^2 u_xx(x,t)
u(x,0) = sin(pi*x/L)    v(x,0) = 0
u(0,t) = 0    u(L,t) = 0

(u
 v) = Pdsolve([u
 v], x, (0
 L), t, (0
 T))
M := CreateMash(u,0,L,0,T)
T ≡ 2π    L ≡ 2π    a ≡ 3
    
```



Наряду с умением построения алгоритмов и программ, применения компьютерных пакетов на начальном этапе обучения для будущих инженеров предполагается дальнейшее совершенствование компьютерной грамотности при изучении специаль-

ных дисциплин таких как математическое моделирование технических систем, технологических процессов, естественно - научных дисциплин (алгоритмические языки и программирование; прикладная математика), а также обще-профессиональных дисциплин (методы и средства исследования технологических процессов, теоретические основы технологических процессов, прикладное программирование).

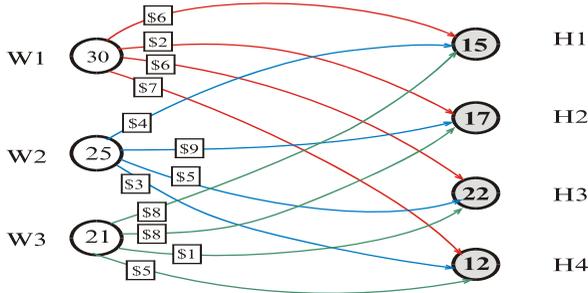
Подготовительная работа для овладения этими дисциплинами осуществляется также на специальных дополнительных курсах, организованных на кафедре прикладной математики. Они призваны дать обзор возможностей компьютерных технологий для решения специальных задач. Например, для сглаживания функции можно применить пакет Curver Expert, у которого более расширенный список математических моделей, и он не ограничивается перечисленными выше в Excel, то есть это средство является более мощным для подбора аппроксимирующей функций. Даются навыки создания простейших баз данных, запросов, форм, отчетов с помощью общедоступного пакета ACCESS и FoxPro, а не только написания программы с помощью алгоритмического языка. На курсах рассматриваются специальные пакеты оптимизации SOLVER SUITE LINDO, Lingo для решения задач линейного, целочисленного, сетевого программирования, в том числе задач о смесях и распределительных задач. Удобство этих пакетов заключается в следующем: перечисленные задачи пишутся практически как обычная постановка задачи на бумаге. Пакет Lingo отличается от Lindo синтаксисом и имеет удобный язык программирования для составления более сложных алгоритмов программ для решения соответствующих задач.

Транспортная задача. Средствами транспортировки (в зависимости от характера передаваемых товаров) могут являться трубопроводы, линии электропередачи, автомобильные или железнодорожные магистрали и т.п. Например, автотранспортное предприятие должно обеспечить перевозку товаров с 3-х складов ( $W_1, W_2, W_3$ ) к 4-м магазинам ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ). Известна цена перевозки единицы груза по каждому из маршрутов. Цель: не-

обходимо обеспечить перевозку грузов с минимальными затратами. Ограничения:

а) количество вывозимых с каждого склада товаров не должно превышать величину запасов этого товара на складе,

б) количество доставляемого товара к каждому магазину не должно быть меньше его потребностей.

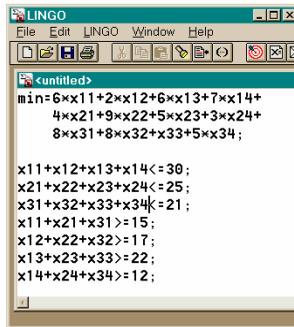


Целевая функция:

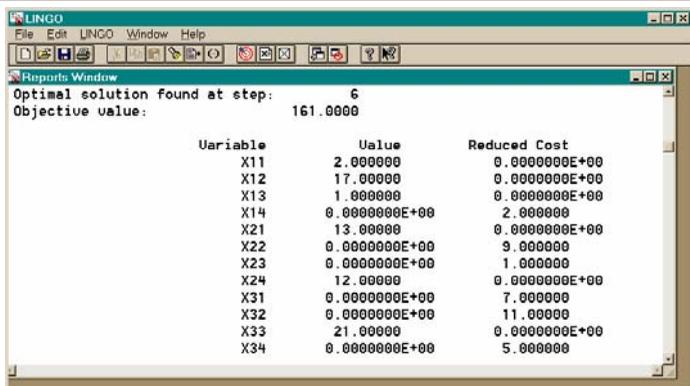
$$6x_{11} + 2x_{12} + 6x_{13} + 7x_{14} + 4x_{21} + 9x_{22} + 5x_{23} + 3x_{24} + 8x_{31} + 8x_{32} + 1x_{33} + 5x_{34} \rightarrow \min$$

Ограничения:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &\geq 15 & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\leq 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &\geq 17 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\leq 25 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &\geq 22 & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\leq 21 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &\geq 12 \end{aligned}$$



Решение задачи, которое получено в LINGO, выглядит так:



Optimal solution found at step: 6  
Objective value: 161.0000

Variable	Value	Reduced Cost
X11	2.000000	0.000000E+00
X12	17.000000	0.000000E+00
X13	1.000000	0.000000E+00
X14	0.000000E+00	2.000000
X21	13.000000	0.000000E+00
X22	0.000000E+00	9.000000
X23	0.000000E+00	1.000000
X24	12.000000	0.000000E+00
X31	0.000000E+00	7.000000
X32	0.000000E+00	11.000000
X33	21.000000	0.000000E+00
X34	0.000000E+00	5.000000

Используемые в настоящее время методики проектирования сложных процессов и установок, основанных на взаимосвязи многих физических процессов, являются приближенными и в большой мере основаны на экспериментальных данных, что часто приводит к большим погрешностям в расчетах. В связи с этим проектирование сложных объектов должны завершаться этапом моделирования.

В практике моделирования существует большое многообразие программных продуктов. Среди них выделяются по мощности конечно-элементного анализа компьютерный пакет ANSYS, отечественный пакет ELCUT, а также пакет FEMLAB. Все три пакета FEMLAB, ANSYS, ELCUT — являются универсальными, позволяют решать линейные и нелинейные задачи и обладают примерно одинаковой точностью и возможностью.

Пакет ANSYS обладает наибольшим числом достоинств. Например, он позволяет моделировать переход материала из твердого состояния в жидкое и наоборот. Однако сложность интерфейса программы, большое число параметров ее настройки и отсутствие документации на русском языке затрудняет ее использование.

Напротив, пакет ELCUT является отечественным, имеет документацию на русском языке, но обладает некоторыми ограничениями в использовании по сравнению с ANSYS и FEMLAB в

видах анализа, типах расчета, в построении геометрических моделей и др.

Почти такими же возможностями как пакет ANSYS, обладает пакет FEMLAB.

Как известно, почти любой физико-химический процесс можно представить в виде математической модели - краевой задачи дифференциальных уравнений в частных производных. Решение простейших примеров дифференциальных уравнений в частных производных в настоящее время можно решить с использованием одиннадцатой версии пакета MathCad. Более сложные математические модели, такие как, например, термо-электрический эффект и другие, решаются с помощью специального пакета FEMLAB.

Компьютерный пакет FEMLAB предназначен для моделирования и анализа, включая создание виртуальных прототипов физических явлений. FEMLAB может моделировать любое физическое явление, которое инженер или ученый может описать с помощью уравнений с частными производными, включая перенос тепла, поток жидкости, электромагнетизм и теорию упругости. FEMLAB решает задачи, включающие все явления физики одновременно — мультифизика. Отличает этот пакет также значительная простота в использовании: вся вычислительная мощь FEMLAB доступна пользователю через простой в использовании графический пользовательский интерфейс, позволяющий решать многие сложные задачи, описывая их рисунками и не записывая громоздкие уравнения. Он позволяет также импортировать DXF файлы — чертежи из популярных программ конструирования, таких как AutoCAD и CATIA. Еще более упрощает процесс разработки приложений библиотека моделей, которая содержит готовые к запуску примеры для общих ситуаций во многих приложениях. Пользователям не требуется глубоких знаний в математическом и численном анализе. Фактически многие модели можно построить с помощью введения физических величин, не прибегая к написанию уравнений, описывающих их. Изучение этих моделей прекрасный способ убедиться как используется вся мощь FEMLAB в различных областях.

Пользователи могут расширить стандартные возможности FEMLAB при помощи добавления собственных программ, а также в ходе выполнения заложенной в FEMLAB модели пользователь может приостановить процесс в любой точке, оценить его ход и методологию и продолжить его стандартным методом или с помощью другого модельного. Эта комбинация простого моделирования, настройки, способности быстрой импровизации делает FEMLAB инструментом пригодным для нестандартных вычислений и быстрых исследований моделей и параметров в физике. Последняя версия программы FEMLAB 3.0 может функционировать самостоятельно или под управлением программы MATLAB, которая является промышленным стандартом для технических вычислений. Интеграция этих двух продуктов дает возможность сочетать моделирование, имитацию и анализ FEMLAB с множеством инженерных и научных приложений MATLAB.

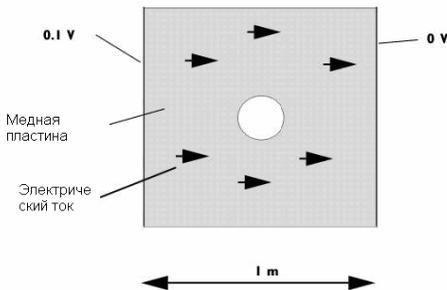
Следует отметить, что компьютерный пакет FEMLAB легко осваивается студентами, тем более, что методика изучения его начинается с простейших задач, в ходе решения которых получается наглядный результат в виде цветных рисунков, показывающих изменение того или иного исследуемого параметра.

Основные этапы построения моделей в программе FEMLAB аналогичны другим пакетам, они включают:

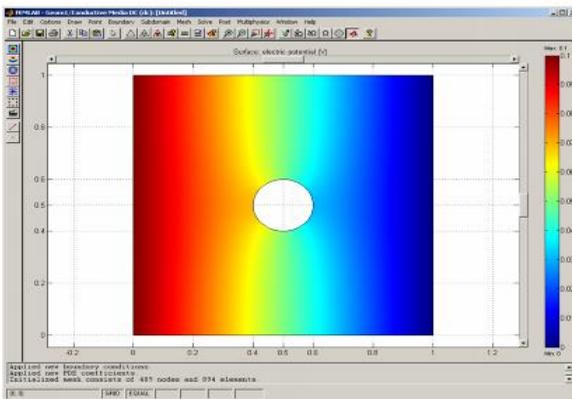
- Выбор типа модели решаемой задачи (теплопередача, электростатика, магнитостатика, проводящая среда, диффузия и др.);
- Выбор класса задач (плоская, трехмерная или осесимметричная);
- Создание геометрической модели (чертеж объекта);
- Задание свойств материалов (электропроводность, магнитная проницаемость, теплопроводность и т.д.);
- Задание нагрузок (величины токов, мощности тепловыделения и т.д.);
- Задание граничных условий (значение температур на границах, величины потенциала поля и т.д.);
- Построение сетки конечных элементов;
- Решение задачи;

- Обработка результатов решения (построение цветowych карт, графиков изменения переменных по какому либо контуру, расчет интегральных значений и т.д.).

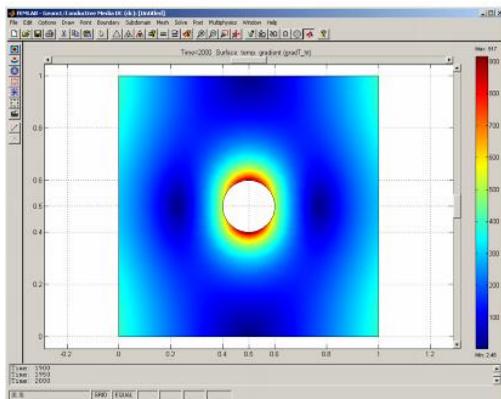
В качестве примера использования пакета FEMLAB возьмем квадратную медную пластинку размером  $1 \times 1$  метр, которая имеет маленькое круглое отверстие посередине. Предположим, вы подвергаете пластину разности электрических потенциалов через две противоположные стороны (две другие стороны изолированы), как показано на рисунке ниже. Разность потенциалов индуцирует ток, которая нагревает пластину.



После выполнения всех указанных выше этапов программа визуализации выдает на экран поверхностное изображение электрического потенциала (V).



Задачу можно усложнить, так как в FEMLAB можно моделировать сложные процессы. Так, например, можно добавить со-вмещение теплопроводности и проводимости. В этом случае картина температурного градиента меняется:



Можно также создать 3-хмерное изображение температурно-го градиента.

Для успешного овладения этими пакетами по некоторым из указанных компьютерных технологий на кафедре прикладной математике подготовлены и выпущены учебные пособия, которые помогают в освоении новых технологий и в саморазвитии студентов. Все это предполагает также самосовершенствование и самих преподавателей на всех уровнях обучения. Одновременно с этим, следует указать на необходимость дальнейшего развития в использовании современных информационных технологий в направлении создания условий для использования сетевых технологий, таких как INTERNET и электронная почта, для формирования представлений о методах защиты локальных и глобальных сетей ЭВМ, не только теоретически, но и практически на лабораторных занятиях или курсах.

### Список литературы:

1. Волчков В.М. Работаем в Visual системах. Программное оформление электронных таблиц в Excel. — Волгоград: Политехник, 1996.

2. Борзунова Т.Л. Базы данных на FoxPro. — Волгоград: Политехник, 1997.
3. Борзунова Т.Л. Алгоритмы и программы в примерах и блок-схемах (Pascal). — Волгоград: Политехник, 2002.
4. Борзунова Т.Л., Волчков В.М. и др. Оптимизационные задачи в экономике. Компьютерный пакет LINDO SOLVER SUITE. — Волгоград: Политехник, 2003.
5. Барыкин М.П., Борзунова Т.Л. Элементы теории графов и некоторые их приложения. — Волгоград: Политехник, 2003.
6. Волчков В.М., Борзунова Т.Л. Методы математической физики для инженеров (компьютерные технологии) (в печати).
7. Барыкин М.П., Борзунова Т.Л. Введение в динамическое программирование (в печати).

## **INFORMATION TECHNOLOGIES IN MATHEMATICAL MODELLING**

**Borzunova T. L.**

(Russia, Volgograd)

*In article opportunities of perfection of training of students to new computer technologies such as spreadsheets, databases, standard programs of mathematical calculations, optimizations and special packages for mathematical modeling of various processes are considered.*